科学版

大学工科数学学习指导系列

概率论与数理统计

学习指导

陈桂林 计东海 编

- 精心辅导课程学习
- 训练数学思想与技能
- 展示数学方法与技巧

科学出版社
www.sciencep.com

大学工科数学学习指导系列

概率论与数理统计学习指导

陈桂林　计东海　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据高等学校(工科)本科基础课程教学基本要求,结合国家教育部制定的硕士研究生入学考试大纲的要求而编写。

全书共四章。内容包括概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征与极限定理和数理统计。每章均按内容提要、例题分析、习题、习题答案四个部分编写。最后还给出了200道综合测试题,每道题都给出了详尽的解答。

本书可供高等理工科院校、师范院校作教学参考书使用,亦可作为报考工学、经济学硕士研究生考试的参考资料,还可作为青年教师和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/陈桂林,计东海编.—北京:科学出版社,2003

(大学工科数学学习指导系列)

ISBN 7-03-010553-2

Ⅰ.概… Ⅱ.①陈… ②计… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第048671号

责任编辑:王利

责任印制:刘秀平/封面设计:黄华斌 陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年8月第一次印刷 印张:20 1/2

印数:1—3 500 字数:402 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一个数学学科，它是工科院校中的一门理论性和应用性都很强的基础课，初学者往往感到概率统计的题目很难，甚至感到无从入手。大量参加硕士研究生入学考试的考生，也普遍感到概率统计的题目难做。为帮助(工科)大学生和考研的考生解决概率统计做题难的问题，我们编写了本书。

本书是根据工科院校数学课程指导委员会颁布的教学基本要求和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写的。全书分四章，每章都由内容提要、例题分析、习题和习题答案四部分组成。另外还给出了200道综合测试题。我们特别注重了题型的挑选和解题技巧的设计，力求做到全面并富有启发性，以便使读者能够举一反三，触类旁通，提高解题能力，开拓解题思路。为便于读者学习，所有的习题都给出了详尽的解答。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、内 容 提 要

(一) 随机事件的概念

1. 随机试验

如果试验具有以下特点，则称为随机试验，记为 E：

① 可以在相同的条件下重复进行；

② 试验的可能结果不止一个，而且是事先已知的；

③ 每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验之前不能确切预言。

2. 基本事件(样本点)

随机试验中，每一个可能出现的结果称为一个基本事件(或样本点)，记为 e。

3. 样本空间

随机试验 E 的所有基本事件构成的集合称为 E 的样本空间，记为 S。

4. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 S 的某些子集称为随机事件，简称为事件。我们用 $A,B,C,\cdots$表示事件。

5. 必然事件和不可能事件

样本空间 S 和空集$\varnothing$作为样本空间的子集也是事件。由于 S 包含所有的基本事件，在每次试验中 S 必然发生，故称 S 为必然事件。而空集$\varnothing$不包含任何基本事件，所以在每次试验中都不可能发生，故称$\varnothing$为不可能事件。

注：需要强调指出，“基本事件”的“基本”二字是相对试验的目的和要求而言的，而不是绝对的。例如考虑试验 E“对同一目标重复进行两次射击”，如果要考察各次射击的情况，则 E 有四个基本事件：$e_1=(0,0)$，$e_2=(0,1)$，$e_3=(1,0)$，$e_4=(1,1)$，其中 1 表示命中，0 表示未命中。如果只关心命中次数，则 E 有三个基本事件：$e_0=$“命中 0 次”，$e_1=$“命中 1 次”，$e_2=$“命中 2 次”。因此，为描述一个随机试验，一是要指明试验的条件，二是要指出试验的一切可能的基本事件。

6. 事件的关系和运算

(1) 包含和相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称 B 包含 A，或 A 包含于 B，记为 $B\supset A$或$A\subset B$。

如果 $B\supset A$ 且 $A\supset B$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$。

(2) 事件的交(或积)

由事件 A 与 B 同时(共同)发生所构成的事件 C 称为 A 与 B 的交(或积),记为 $C=A\cap B=AB$。

推广:$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n$

$\triangleq n$ 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生

$A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1A_2\cdots$

$\triangleq$无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots$同时发生

(3) 事件的并(或和)

由事件 A 与 B 至少一个发生所构成的事件 C 称为 A 与 B 的并(或和),记为 $C=A\cup B=A+B$。

推广:$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$

$\triangleq n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生

$A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots$

$\triangleq$无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots$,至少一个发生

(4) 互不相容(互斥)

如果事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 互不相容(或 A 与 B 互斥)。

$$A\text{ 与 }B\text{ 互不相容}\Leftrightarrow AB=\varnothing$$

推广:n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容

$\Leftrightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 任意两个互不相容(两两互不相容)

$\Leftrightarrow A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

(5) 对立事件

由 A 不发生所构成的事件,称为 A 的对立事件。记为 $\bar{A}$。显然有

$$\bar{\bar{A}}=A,\quad A\bar{A}=\varnothing,\quad A\cup\bar{A}=S$$

(6) 事件的差

由 A 发生而 B 不发生所构成的事件 C,称为 A 与 B 的差,记为 $C=A-B=A\bar{B}$。

事件的运算具有以下性质:

(a) 交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(b) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(c) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(d) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

(二) 概率的概念及性质

刻画一个随机事件出现的可能性大小的实数，称为该事件的概率。事件 A 的概率记为 $P(A)$。

1．古典概率

如果随机试验 E 满足条件：

① 样本空间是有限的：$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$——有限性；

② 每一个基本事件发生的可能性相等——等可能性。

则称 E 为古典概型的试验，简称为古典概型。

在古典概型中，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}\triangleq\frac{{}^{\#}A}{{}^{\#}S}$$

2．几何概率

向区域 S 内任投一质点，该质点落在 S 的任一位置是等可能的，即落在 S 的任何子域 A 上(该事件仍记为 A)的可能性只与 A 的度量(如长度、面积、体积、……)成正比，而与 A 的位置和形状无关，则称这个试验为几何概型，并定义质点落在 A 上的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{S\text{ 的度量}}\triangleq\frac{L(A)}{L(S)}$$

3．统计概率

在一组固定条件下，重复做 n 次试验，如果当 n 增大时，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 围绕着某一个常数 p 摆动；而且一般说来，随着 n 的增大，摆动的幅度愈来愈小，则称常数 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$。

4．概率的公理化定义

在近代概率中，人们用概率的基本性质(或固有属性)作为概率的定义，这就是下面的三条公理。

公理 1　设 S 为样本空间，A 为事件(S 的子集)，那么对于每一个事件 A，都有一个满足不等式

$$P(A)\geqslant 0$$

的实数 $P(A)$ 与之对应，称它为事件 A 的概率。

公理 2　$P(S)=1$。

公理 3　如果 $A_1,A_2,\cdots$ 是互不相容的事件，那么

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

公理 1 称为概率的非负性,公理 2 称为规范性,公理 3 称为可列可加性或完全可加性。

5. 概率的性质

由概率的三条基本性质(三条公理)可以推出概率的以下简单性质:

(i) $P(\varnothing)=0$;

(ii) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

该性质称为概率的有限可加性;

(iii) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(iv) $P(A)=1-P(\bar{A})$;

(v) 设 A,B 为任意事件,则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

当 $A\supset B$ 时

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

从而

$$P(A)\geqslant P(B)$$

(vi) 设 A,B,C 为任意事件,则

$$P(A\cup B)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地,对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(三) 条件概率

设 A,B 为两个事件且 $P(B)>0$,则称比值 $\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率,记为 $P(A|B)$,即

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

同样可以定义在事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率:

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\qquad P(A)>0$$

条件概率满足概率的三条公理:

(i) $P(A|B)\geqslant 0$;

(ii) $P(S|B)=1$;

(iii) 设 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容,则

$$P\{(A_1+A_2+\cdots)\mid B\}=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)+\cdots$$

(四) 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

设 A,B 为两个事件,若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A 与 B 相互独立。

事件 A,B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A)=P(A|B),P(B)>0$

或 $P(B)=P(B|A),P(A)>0$

若 A,B 独立,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

2. 三个事件的独立性

设 A,B,C 为三个事件,如果

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C)$$

则称三个事件 A,B,C 两两独立。若还有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 相互独立。

3. n 个事件的独立性

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果从中任意取出 k 个$(2\leqslant k\leqslant n)$事件,它们乘积的概率等于概率的乘积,即对任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

易见,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则它们中的任意 k 个$(2\leqslant k<n)$事件也相互独立,反之未必成立。

若 $P(B)=1$,A 为任一事件,则 $A=A(B+\bar{B})=AB+A\bar{B}$,$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=P(AB)$,于是有 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 A 与 B 独立。就是说概率为 1 的事件与任意事件独立,当然,必然事件与任意事件独立;同样,概率为零的事件与任意事件独立,当然不可能事件与任意事件独立。

事件的独立性与互不相容性有如下关系:

若 $P(A)>0,P(B)>0$,则事件 A 与 B 相互独立与 A 与 B 互不相容不能同时成立,即若 A,B 独立,则 A,B 不是互不相容的;反之,若 A,B 互不相容,则 A,B 不独立。

二、例题分析

(一) 关于事件的关系和运算的例题

例 1 圆柱形产品,只有当高和直径均合格时才是合格品,试分析下列事件的关系:

A_1 =“产品合格”, B_1 =“产品不合格”,

A_2 =“高合格”, B_2 =“高不合格”,

A_3 =“直径合格”, B_3 =“直径不合格”,

A_4 =“高合格直径合格”, B_4 =“高合格直径不合格”。

解 (i) 因为 A_1 发生必然导致 A_2 发生,所以 A_2 包含 A_1,即 $A_2 \supset A_1$。同理 $A_3 \supset A_1, B_1 \supset B_2, B_1 \supset B_3$ 而 $A_1 = A_4$。

(ii) A_2, A_3 同时发生则 A_1 发生,所以 $A_1 = A_2 \cap A_3$。

(iii) B_1 是由 B_2 和 B_3 至少一个发生所构成的事件,所以 $B_1 = B_2 \cup B_3$。

(iv) A_1 与 B_2 不能同时发生,所以 A_1 与 B_2 互不相容,同样 A_1 与 B_3,A_1 与 B_4 互不相容。

(v) B_1 是由 A_1 不发生构成的事件,所以 $B_1 = \bar{A}_1$,同理 $B_2 = \bar{A}_2, B_3 = \bar{A}_3$。

(vi) B_4 是由 B_1 发生而 B_2 不发生构成的事件,所以 $B_4 = B_1 - B_2 = B_1 \bar{B}_2$。

例 2 设 A, B, C 是三个随机事件,试用 A, B, C 表示下列事件:

(1) 仅 A 发生;

(2) A, B, C 都发生;

(3) A, B, C 至少有一个发生;

(4) A, B, C 恰有一个发生;

(5) A, B, C 至少有两个发生;

(6) A, B, C 恰有两个发生;

(7) A, B, C 不多于一个发生;

(8) A, B, C 不多于两个发生;

(9) A, B, C 都发生的对立事件;

(10) A, B, C 都不发生。

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A - B - C$;

(2) ABC 或 $A \cap B \cap C$; (3) $A + B + C$ 或 $A \cup B \cup C$;

(4) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C}$; (5) $AB \cup AC \cup BC$;

(6) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 或 $\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{C}$;

(8) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$ 或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$;

(9) $\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$; (10) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

例 3 指出下列各式成立的条件:

(1) $ABC=A$; (2) $A+B+C=A$;

(3) $A+B=AB$; (4) $(A+B)-A=B$;

(5) $A+B=\bar{A}$; (6) $AB=\bar{A}$。

解 (1) $ABC=A(BC)=A\Rightarrow A\subset BC\Rightarrow A\subset C$ 且 $A\subset B$;

(2) $A+B+C=A+(B+C)=A\Rightarrow A\supset(B+C)\Rightarrow A\supset B$ 且 $A\supset C$;

(3) $A=B$;

(4) $(A+B)-A=(A+B)\bar{A}=B\bar{A}=B\Rightarrow\bar{A}\supset B\Rightarrow A$ 与 B 互不相容;

(5) $A+B=\bar{A}\Rightarrow A(A+B)=A\bar{A}=\varnothing\Rightarrow A+AB=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing\Rightarrow\varnothing+B=\bar{\varnothing}=S\Rightarrow B=S$;

(6) $AB=\bar{A}\Rightarrow A(AB)=A\bar{A}=\varnothing\Rightarrow AB=\varnothing\Rightarrow\bar{A}=\varnothing\Rightarrow A=S$ 且 $B=\varnothing$。

例 4 下列关系式中哪些是正确的?哪些是错误的?哪些关系式成立是有条件的?

(1) $A+B-C=A+(B-C)$; (2) $ABC=AB(C+B)$;

(3) $A+B+C=A+(B-AB)+(C-AC)$;

(4) $AB+BC+CA\supset ABC$; (5) $AB+BC+CA\subset A+B+C$;

(6) $A\bar{B}\bar{C}\subset A+B$; (7) $\overline{(A+B)}C=C-C(A+B)$。

解 (1) 在一般情况下,结合律不适用于事件的差运算,所以在一般情况下(1)式不成立,但$(A+B)-C=(A+B)\bar{C}=A\bar{C}+B\bar{C}$,$A+(B-C)=A+B\bar{C}$,欲使$(A+B)-C=A+(B-C)$,即 $A\bar{C}+B\bar{C}=A+B\bar{C}$,须有 $A=A\bar{C}\Rightarrow\bar{C}\supset A\Rightarrow AC=\varnothing$;

(2) $AB(C+B)=ABC+AB$,欲使 $ABC=AB(C+B)$,即 $ABC+AB=ABC$,须有 $AB\subset ABC$,即 $AB=ABC\Rightarrow C\supset AB$;

(3),(4),(5) 一般情况下都成立;

(6) $A\bar{B}\bar{C}=A-B-C\subset A\subset A+B$,所以此式在一般情况下成立;

(7) $\overline{(A+B)}C=\bar{A}\bar{B}C$,$C-C(A+B)=C\,\overline{C(A+B)}=C[\bar{C}+\bar{A}\bar{B}]=C\bar{A}\bar{B}$,所以此式正确。

例 5 设 A,B 是随机事件,问"A,B 都发生"、"A,B 都不发生"和"A,B 不都发生"诸事件中,哪两个是对立事件?

解 A,B 都发生 $=AB$;

A,B 都不发生 $=\bar{A}\bar{B}$;

A,B 不都发生 $=A,B$ 至少一个不发生 $=\bar{A}\cup\bar{B}$。

由对偶原理知$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$,即"$A,B$ 都发生"和"A,B 不都发生"是对立事件。

由本例可知,欲求事件 A 的对立事件,只须在 A 中的关键词前面加上否定词“不”即可,而与加“不”后的事件等价的事件,都可作为 A 的对立事件。

例 6 袋中有红、绿、蓝三色的球各若干(都超过三个),今从袋中任取三个球,记 $A=$“三个球的颜色全同”,求 A 的对立事件。

解 A 中的关键词是“全同”,在其前面加否定词“不”得“三个球的颜色不全同”,这就是 A 的对立事件,与其等价的事件如“三个球至少有两种颜色”也是 A 的对立事件。

例 7 化简:$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$。

解 $(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$

$=(AB+\bar{A}B+B)(\overline{AB})(A+\bar{B})$

$=(\overline{AB})B(A+\bar{B})$

$=(\overline{AB})(AB)=\varnothing$

(二) 古典概率的计算举例

按照古典概率的定义,求古典概型中事件 A 的概率,首先确定以什么作为基本事件,然后计算基本事件总数 $^{\#}S$ 和 A 中的基本事件数 $^{\#}A$,最后计算比值 $^{\#}A/^{\#}S$,即可求出 A 的概率 $P(A)$。

例 1 将一套 5 卷本的书随机地排到书架上,求 1,2 两卷靠在一起的概率。

解 设 $A=$“1,2 两卷靠在一起”。5 本书排到书架上的一种排法,即 5 个元素的一种全排列是一个基本事件,于是

$$^{\#}S=5!,\qquad ^{\#}A=4!\times 2!$$

故

$$P(A)=\frac{4!\times 2!}{5!}=\frac{2}{5}$$

例 2 电话号码由 0,1,…,9 中的 7 位数字排列而成,任取一个电话号码,求:

(1) 它由不同数字构成的概率;

(2) 它恰有三个 5 的概率。

解 电话号码的每一位上都可以排 0,1,…,9 中的任何一个,即一个电话号码就是十个不同元素取七个元素的一种有重复的排列,这就是一个基本事件。所以基本事件总数为 $^{\#}S=10^7$。

(1) 设 $A=$“它由不同数字构成”,则 A 中的基本事件是没有重复数字的选排列,故 $^{\#}A=P_{10}^7$,所以 $P(A)=\dfrac{P_{10}^7}{10^7}$。

(2) 设 $B=$“恰有三个 5”。B 中的基本事件可如下构成:从七个位置中任取三个位置放“5”,不同的取法有 C_7^3 种,余下的四个位置放“5”以外的 9 个数中的任

何一个,故$^{\#}B=C_7^3 9^4$,所以$P(B)=\dfrac{C_7^3\cdot 9^4}{10^7}$。

例 3 一箱产品中有 a 件正品和 b 件次品,若随机地将产品一个接一个地摸出来,求第 k 次摸到正品的概率。

解 1 假定产品是可辨的(比如,设想它们都编了号)。我们把 $a+b$ 个产品的一种全排列作为一个基本事件,于是基本事件总数为$^{\#}S=(a+b)!$。

设 $A=$“第 k 次取到正品”,则 A 中的基本事件数为$^{\#}A=C_a^1(a+b-1)!$。所以

$$P(A)=\frac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解 2 假定产品除正品和次品之分外是不可辨的,即正品之间没有区别,次品之间也没有区别。因为是不放回抽取,一件产品占一个位置,我们把 $a+b$ 个位置正品占 a 个位置的一种占位法作为一个基本事件,基本事件总数为

$$^{\#}S=C_{a+b}^{a}=\frac{(a+b)!}{a!b!}$$

事件 A 中的基本事件为第 k 个位置上放正品,其余 $a+b-1$ 个位置正品占 $a-1$ 个的占位法,故

$$^{\#}A=C_{a+b-1}^{a-1}=\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!}$$

故
$$P(A)=\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!}\Big/\frac{(a+b)!}{a!b!}=\frac{a}{a+b}$$

两种解法结果是一样的,这说明对于同一个实际问题,样本空间是可以不同的,这取决于基本事件的选择。

值得注意的是,计算结果与 k 值无关,就是说不论第几次抽取,取到正品(次品)的概率都是一样的。这从理论上说明了平常人们采用的“抓阄儿”的办法是公平的,买彩票的公平性也在于此。

例 4 将 n 个人随机地分配到 M 个房间里,求下列事件的概率:

$A=$“某指定的 n 个房间中各有一人”;

$B=$“恰有 n 个房间中各有一人”;

$C=$“某指定的一个房间中恰有 k 个人”。

解 我们把 n 个人分到 M 个房间的一种分法作为一个基本事件,于是$^{\#}S=M^n$。而

$$^{\#}A=n!,\qquad 故\quad P(A)=\frac{n!}{M^n}$$

$$^{\#}B=C_M^n n!,\qquad 故\quad P(B)=\frac{C_M^n n!}{M^n}$$

$^{\#}C = C_n^k(M-1)^{n-k}$,故 $P(C)=\dfrac{C_n^k(M-1)^{n-k}}{M^n}$。

这个例子很具典型性,许多问题都可化为这一模型,例如一群人的生日问题。

例 5 一批产品共 200 个,其中有 6 个废品,今任取 3 件产品,求其中恰有 k 件次品的概率。

解 200 个产品任取 3 个的一种取法是一个基本事件,于是 $^{\#}S = C_{200}^3$。若设 A =“任取 3 件中恰有 k 件废品”,则

$$^{\#}A = C_6^k C_{194}^{3-k}$$

故

$$P(A)=\frac{C_6^k C_{194}^{3-k}}{C_{200}^3}, \qquad k=0,1,2,3$$

例 6 随机地将 15 名新生平均分到三个班中,其中有 3 名优秀生,求:

(1)每个班分到 1 名优秀生的概率;

(2)3 名优秀生分到一个班的概率。

解 这是一个分组问题,基本事件总数为

$$^{\#}S = C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 = \frac{15!}{5!5!5!}$$

(1) 设 A =“每个班分到 1 名优秀生”,则

$$^{\#}A = C_{12}^4 C_8^4 \cdot 3! = \frac{12!3!}{4!4!4!}$$

故

$$P(A)=\frac{\dfrac{12!\ 3!}{4!\ 4!\ 4!}}{\dfrac{15!}{5!\ 5!\ 5!}}=\frac{25}{91}$$

(2) 设 B =“三名优秀生分到同一个班”,则

$$^{\#}B = C_{12}^2 C_{10}^5 \cdot 3 = \frac{3\times 12!}{2!5!5!}$$

$$P(B) = \frac{6}{91}\text{。}$$

(三) 几何概率的计算

如果试验可化为向某区域内任投一质点,求质点落在其子域内的概率的问题,就可用几何概率进行计算。

例 1 向区间$[0,a]$内任投两个质点,将区间分成三段,求三段可以构成三角形的概率。

解 设 A =“三段可构成三角形”。假定两点的坐标分别为 x,y,则

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < a$$

这两个不等式确定了一个正方形区域 $D=\{(x,y)|0<x<a,0<y<a\}$(见图 1.1)。

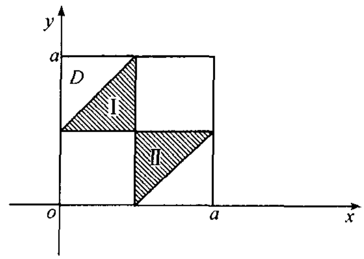

图 1.1

A 发生$\Leftrightarrow$当 $x<y$ 时，

$0<x\leqslant\frac{a}{2},\frac{a}{2}<y<a,0<y-x<\frac{a}{2}$ 这四个不等式确定 D 的子域Ⅰ；当 $x>y$ 时 $0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}\leqslant x<a,0<x-y<\frac{a}{2}$，这四个不等式确定 D 的子域Ⅱ。

问题化为向区域 D 内任投一个质点，求质点落在子域Ⅰ或Ⅱ上的概率，属几何概型。由几何概率的定义有

$$P(A)=\frac{\text{子域 Ⅰ 的面积}+\text{子域 Ⅱ 的面积}}{D\text{ 的面积}}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\frac{1}{4}$$

例 2 甲乙二人约定在下午 1 时至 2 时之间到某汽车站乘公共汽车，在这段时间内有四班公共汽车，它们的开车时间分别为 1:15，1:30，1:45，2:00。假定每个人到达车站的时刻相互独立且是等可能的，在下列两种情况下，求两人乘同一班车的概率：

(1) 见车就乘；

(2) 先到者等后到者一辆车。

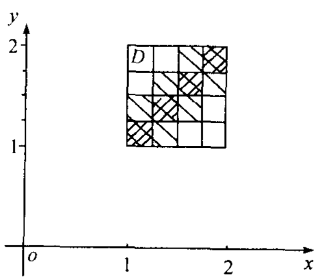

图 1.2

解 设 A＝“两人乘同一辆车”，又两人的到达时间分别为 x,y，则 $1<x<2,1<y<2$，不等式确定平面域 D（见图 1.2）。

(1) A 发生$\Leftrightarrow x,y$ 属于同一个区间，即子域 ，所以

$$P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

(2) A 发生$\Leftrightarrow x,y$ 属于同两个区间，即子域 ，所以

$$P(A)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

（四）利用概率的性质计算概率

例 1 设 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2}$。

(1) 若 A,B 互不相容，求 $P(\bar{A}B),P(\bar{A}\bar{B}),P(\bar{A}\cup B)$；

(2) 若 A,B 独立，求 $P(A\cup B),P(A-B)$；

(3) 若 $A\subset B$,求 $P(A\bar{B})$,$P(B\bar{A})$。

解 (1) 因为 A,B 互不相容,所以 $\bar{A}\supset B$,于是

$$P(\bar{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=\frac{1}{6}$$

$$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{2}{3}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=\frac{1}{6}$$

或
$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\frac{1}{6}$$

(3) 因 $A\subset B$,故

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0$$

或
$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(\varnothing)=0$$

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}$$

例 2 对于任意三个事件 A,B,C,试证

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$$

证 因为 $A\supset A(B\cup C)$,所以

$$\begin{aligned}P(A)&\geqslant P\{A(B\cup C)\}=P(AB\cup AC)\\&=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\\&\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC)\end{aligned}$$

(证毕)

例 3 设 $P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(\overline{AB})$。

解 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$ 知

$$P(AB)=0.4$$

故
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$$

例 4 设事件 A,B,C 两两独立且满足条件

$$ABC=\varnothing,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2} \qquad (*)$$

如果 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,求 $P(A)$。

解 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)$

$$+P(ABC)=\frac{9}{16}$$