水力模型原理

M.S.Yalin 著

孙振东 译

西南交通大学

一九八〇年八月

水力模型原理

M.S.Yalin 著

孙振东 译

西南交通大学

一九八〇年八月

简　　介

本书是 M.S.Yalin: Theory of Hydraulic Models 的译本。正文后还附有作者1973年所著《河流动床模型》一文。本书对河道、河口、海港、渗流等问题的模型原理，有系统而明确的论述，具体而且实用，充分反映了模型原理的最新水平。本书的译者是铁道部科学研究院孙振东同志。为因应教学及科研需要，西南交通大学桥梁研究室于1980年初建议印行。在刊印工作中，铁道部科学研究院西南研究所沈存长同志、西南交大钱冬生同志对原译稿进行了校订；西南交大尚久驷、胡梅枝同志承担了不少具体工作；另本书原版有照片八幅，因复制不清略去，谨此说明。

序

这本书是讲水力模型设计的。理论总不能将实践所包含的复杂性全部概括，所以，在水利工程界，几乎每一个重大项目都得经受“模型试验”的检验。在这里，对应于各种方案的水流及其后果都可以从一个不大的模型上观察得到，并可将它们量测出来。根据这些观察和测量的结果，即可选择最有效和最合理的设计方案。

水力模型只是在它的比尺按照一定的规则决定，也就是说，只是在它的设计做得正确时，才可以成为对一水力现象进行试验研究的精确设施，并从中取得可靠的信息。假使设计不正确，那么，模型在原理上就是错误的。在这种情况下，应用最精致的仪器设备和测量方法也只能够使错误的预报提高精度。只是在模型上可测量的一组特征值，按照满足于一定数学条件的常值比例，和原型中的对应值联系起来以后，一个小比尺的物理现象的重演才能算是一个在科学上有效的模型。这些常值比例叫做比尺，而比尺所必须满足的数学条件则叫相似准则。从而可知，一种现象的真正可靠的模型的设计及其试验完成，只是在其相似准则为已知时才能成功。这些现象的准则，可以从描述该现象的物理性质的数学关系式（一般是运动的微分方程）中揭露出来。于是，由这一方法所决定的成果的精度和可靠性就完全和所用的数学关系式的可靠性有关；假使现象还未曾用数学关系式表达出来，则其相似准则简直是无法决定。这实在是一场讽刺剧，因为，正是在物理现象不能用理论表述的时候，模型方才最是有用。

决定相似准则的另一个，而且更有效的途径，是因次方法，在这里，相似准则是由特征参量自身的因次分析取得的，而不是从那些包含特征参量在内的数学关系式。换言之，相似准则可以从因次方法得到，而无须承担错误解释现象的物理本质的风险（这种风险有可能是先天地存在于数学关系式中）。因次方法曾经是一个颇多争论的题目，只是在经历长期争论之后，方才肯定：因次方法不是“一个时常提供错误结果的危险工具”，而是如同其他每一个数学工具一样，假使应用得正确，就永远提供正确的结果；假使错误地应用它，它就会提供错误的结果。在布瑞吉曼（Bridgeman）、拜尔克豪福（Birkhoff）、朗哈尔（Langhaer）、科莫利特（Comolet）、西杜夫（Sedov）等人的著述问世以后，在过去的三十年中，一般地已经接受下述意见：因次原理并不是一些在决定幂函数乘积的指数外再没有其他用处的琐碎的规则；而是可以称为“试验研究的原理”的。

应用相似准则于水力模型设计，在实践中时常因为物理的或技术的严重困难而受到阻碍，原型和模型处于同一行星，这一事实就意味着它们所受到的重力相同，或者说，两者由重力所引起的加速 g 的比值必须等于一。同样，若将原型流体（水）用于模型，则两者所用的流体的比重和粘滞性的比尺也当等于一。在让特征参量采用这样一些“不能调整”的数值之后，要满足相似准则时常非常困难，甚至是不可能。在这种情况下，模型将不能够按照严格的模型原理来设计；这时，为了设计一个可靠的模型，那就要用试验者的知识，经验，乃

至直觉，借以决定“仅次于最好”的抉择。可是，这些缺陷的存在也并不等于说，精确相似准则的推导只是一个学院式的练习题，不懂得它也能够设计出所需的模型（参阅第二章）。对于一个特定的相似问题讲，假使你不知道相似准则，你就不会知道实际采用的解在多大程度上接近于正确解。所以，不管它能否应用，精确解总应该先行决定；此后，假使它实际上办不到，就将它用作参考性的架式，借以判断所采用的解的正确程度。

我感谢本丛书的编辑 E.M·威尔逊（Wilson）教授，他的意见使本书内容改进很多。我也感谢 Wallingford 水力研究试验站主任 C.H.拉塞尔（Russell）先生，他校核了本书文稿并提出一些有价值的建议。我必须感谢我的同事们，A.W.彼得逊（Peterson）教授、J.W.康菲斯（Kamphuis）博士，在本书的书写过程中给了很大的帮助。最后，我还得感谢我的妻子彻丽琳（Cherrilyn），这份困难的文稿是她打字的。

M.S.雅林（Yalin）

1970年5月

目　　录

第六章 输沙相似

第七章 波 浪

符号表

附录 河流动床模型

第一章　因次原理的原则*

第一节　因次量和无因次量

力学领域包含各种不同的概念，例如，能、力、速度、比重等等。在本书中，力学一词指的是古典的或"非相对的"力学。概念的性质和数目是不能限制的；科学的进步意味着新概念的产生；或叫新概念的引入。另一方面，这无限多的概念中的任何一个，又都可由仅仅三个独立的实体——长度、时间和质量——来决定；这三者叫做基本实体。注意到这三个基本实体不能够由自身定义出来，是很有意思的。在物理或外部世界中，没有什么能比近和远、早和迟、轻和重这些概念对于我们更为明显。我们学习这些概念，不用教，仅仅生活在这个世界就行了。一个概念一般只能够用更熟悉的其他概念来定义，但以上所提到的三个术语对我们都是一目了然的。可以测量和用数字表示的实体，就是量（或称数量）。从而得出，各种力学量都可以看作是相同的三个可测量的实体（长度、时间和质量）的组合。今设L、T和M分别表示长度、时间和质量的单元（即单位）。因为一个力学量a可以认为是长度、时间和质量的组合，那么，在a的单元（单位）用〔a〕来表示时，它必须是基本单元的一个函数，即

$$[a]=f(L,\ T,\ M) \tag{1—1}$$

一个量a的两个不同数值之比，不应当随基本单元的选用而变。这个物理条件只有当函数f是幂函数乘积时才能得到满足，而这是可以证明的[1,2,3,4,5]**。因此，任何量a的单元〔a〕可以表示为：

$$[a]=L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma} \tag{1—2}$$

在这里，量a的性质是由指数α、β和γ的数值反映的。举例说明，如a为速度，则$\alpha=1$、$\beta=-1$和$\gamma=0$；如a为力，则$\alpha=1$、$\beta=-2$和$\gamma=1$，等等。量a的单位用基本单元L、T和M的表达式，亦即方程（1—2）右边，叫做因次公式，或简称为量a的因次。假使指数α、β和γ中至少有一个不是零，则量a就被说成为具有因次，或者说，它是一个因次量。任何因次量，只要它不是基本量之一，一般都叫做"导出量"。

在力学中遇到的因次量a，可以分为以下三点：

（1）几何量，如$\alpha\neq0$；$\beta=0$；$\gamma=0$；

（2）运动量，如$\alpha\neq0$；$\beta\neq0$；$\gamma=0$；

（3）动力量，如$\alpha\neq0$；$\beta\neq0$；$\gamma\neq0$。

如方程（1—2）式中所有的指数为零，即

$$\alpha=\beta=\gamma=0 \tag{1—3}$$

---

* 为了使因次原理易于了解，并发挥它的重大作用，请参阅译者所编《因次分析原理》一书。

** 右上角的数字是章末参考文献号码。

那么，量 a 的单元当不随基本单元 L、T 和M 而变。

$$[a]=L^0T^0M^0=1 \qquad (1—4)$$

满足于（1—3）或（1—4）的量 a 就叫做无因次量。

所以，一个因次量的单元及其数值是和基本单元的选择有关的；而一个无因次量的单元及其数值则和基本单元的选择无关。从而，无因次量在所有各个基本单元的体系中始终维持相同的数值。

考虑一幂乘积 X_j是由三个因次量 a_1、a_2、a_3 构成：

$$X_j=a_1^{x_j}a_2^{y_j}a_3^{z_j} \qquad (1—5)$$

假使指数 x_j、y_j 和 z_j 的值能按使幂乘积和 X_j 变为无因次的来决定，那么，a_1、a_2 和 a_3的因次就不是互相独立的；如不可能使 X_j 变为无因次的，则 a_1、a_2 和 a_3 的因次是互相独立的。很清楚，若量 a_1、a_2 和 a_3 的因次为：

$$[a_1]=L^{\alpha_1}T^{\beta_1}M^{\gamma_1}$$

$$[a_2]=L^{\alpha_2}T^{\beta_2}M^{\gamma_2}$$

$$[a_3]=L^{\alpha_3}T^{\beta_3}M^{\gamma_3}$$

由量 a_1、a_2 和 a_3 构成的幂乘积 X_j 能不能变成无因次的，要看行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} \qquad (1—6)$$

是不是等于零。假使 $\Delta=0$，无因次幂乘积的构成就是可能的。这时，a_1、a_2 和a_3 的因次就不是互相独立的。的确，只有当线性齐次方程组

$$\alpha_1x_j+\alpha_2y_j+\alpha_3z_j=0$$

$$\beta_1x_j+\beta_2y_j+\beta_3z_j=0$$

$$\gamma_1x_j+\gamma_2y_j+\gamma_3z_j=0$$

对 x_j、y_j 和 z_j 有解时，亦即当系数行列式 Δ为零时，才可使幂乘积变为无因次的。反之，如$\neq0$，那么，a_1、a_2 和 a_3 的因次是独立的。举例说，如 a_1、a_2 和 a_3 为长度、时间和质量，那么（根据定义），它们的因次必须是独立的。的确

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq0$$

譬如说，若 a_1、a_2 和 a_3 为长度、速度和加速度，那么，

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

于是，长度、速度和加速度的因次就不是互相独立的。另一方面，若 a_1、a_2 和 a_3 代表长度，速度和力，则其因次是独立的，这是因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

现在，让我们考虑三个量 a_1、a_2 和 a_3，它们各自具有独立的因次。在这一场合，由三个方程

$$\left.\begin{aligned} [a_1] &= L^{\alpha_1}T^{\beta_1}M^{\gamma_1} \\ [a_2] &= L^{\alpha_2}T^{\beta_2}M^{\gamma_2} \\ [a_3] &= L^{\alpha_3}T^{\beta_3}M^{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \qquad (1—7)$$

三个"未知数" L、T 和M，可以根据$[a_1]$、$[a_2]$和$[a_3]$得出如下的解：

$$\left.\begin{aligned} L &= [a_1]^{k_1}[a_2]^{l_1}[a_3]^{m_1} \\ T &= [a_1]^{k_2}[a_2]^{l_2}[a_3]^{m_2} \\ M &= [a_1]^{k_3}[a_2]^{l_3}[a_3]^{m_3} \end{aligned}\right\} \qquad (1—8)$$

（1—7）式两边取对数，我们得到以下的线性方程组

$$\left.\begin{aligned} ln[a_1] &= \alpha_1(lnL) + \beta_1(lnT) + \gamma_1(lnM) \\ ln[a_2] &= \alpha_2(lnL) + \beta_2(lnT) + \gamma_2(lnM) \\ ln[a_3] &= \alpha_3(lnL) + \beta_3(lnT) + \gamma_3(lnM) \end{aligned}\right\} \qquad (1—9)$$

它清楚地指明（1—8）式解的可能性。这是因为量 a_1、a_2 和 a_3 具有独立的因次，因而行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

不是零。

根据（1—2），任何量 a 的因次都是 L、T 和M的幂乘积。另一方面，从（1—8）可以看出，基本单元 L、T 和 M自身也可以表示成任何三个具有独立因次的量 a_1、a_2 和 a_3 的单元的幂乘积。既然如此，任何量 a 的因次也可以同样地用其他三个在因次上独立的量的单元$[a_1]$、$[a_2]$和$[a_3]$来表示。换言之，幂乘积（1—2）不是表示因次的唯一途径。一个量 a 的因次可以同样好地表示为：

$$[a] = [a_1]^{\bar{\alpha}}[a_2]^{\bar{\beta}}[a_3]^{\bar{\gamma}} \qquad (1—10)$$

式中 $\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 和 $\bar{\gamma}$ 和下列的 α、β 和 γ 具有线性关系：

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} &= k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma \\ \bar{\beta} &= l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma \\ \bar{\gamma} &= m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (1—11)$$

译者注　把(1—8)代入(1—2)即得(1—11)

所以，力学领域内的任何量 a，事实上都可以用任何三个独立的实体 a_1、a_2 和 a_3 来定义。将长度、时间和质量作为力学的“三根台柱”的习惯想法，似乎是来自人的本能，而不是由于逻辑推理。甚至于选作基本量的数目，也不一定必需是三个。基本量的数目（k），同在物理学的其他分科中一样，在力学中可以随意选取[1]。可是，为了维持一个统一的方法并避免生疏的说法，我们将始终按照现行惯例，亦即以L、T和 M 来表示任何一个量的因次。经常用于流体力学及水力学中的一些量的因次，今将它们列在表 1—1 中。

表 1—1

因次量	α (L)	β (T)	γ (M)	因次量	α (L)	β (T)	γ (M)
长度 L	1	0	0	应力(压力) $\frac{M}{LT^2}$	−1	−2	1
时间 T	0	1	0	密度 $\rho=\frac{M}{L^3}$	−3	0	1
质量 M	0	0	1	比重 $\gamma=\frac{力}{体积}=\frac{M}{T^2L^2}$	−2	−2	1
速度 L/T	1	−1	0	粘滞力 $\mu=\frac{M}{TL}$	−1	−1	1
加速度 L/T^2	1	−2	0	运动粘滞力 $\nu=\frac{\mu}{\rho}=\frac{L^2}{T}$	2	−1	0
流量 L^3/T	3	−1	0	功(能) $E=\left(\frac{L^2}{T^2}\right)\cdot M$	2	−2	1
力(重量) $(L/T^2)M$	1	−2	1	功率 $\left(\frac{L^2}{T^3}\right)\cdot M$	2	−3	1

第二节 特征参量

控制一般物理现象、特别是力学现象的定律，往往是用若干个量的数学关系式来表达的。所以，物理现象的定义必须适合于数学关系式的建立。一个物理现象的“定量”定义，是以说明那一现象的必要和充分的一组 n 个独立量

$$a_1、a_2、a_3\cdots\cdots a_n \qquad (1—12)$$

为基础的*。如定义一个现象所需要的这 n 个独立量 a_i 就叫做（该现象的）特征参量；它们可以有因次，或者无因次，是常数，或者是变数。通常，特征参量都认为是因次量。可是，对于这样一个限制，并不存在逻辑上的必要性（参阅例题1—4）。

一个现象能够具有（或我们能够赋予它）无限个定量属性，这些属性可以用：

$$A_1、A_2、A_3、\cdots\cdots A_j\cdots\cdots$$

* n个量 a_i 是独立的，假使它們之中沒有一个是其他量的函数。在这种习用的意义上的独立，和具有独立的因次(意义为 $\Delta\neq0$)是完全不同的，是彼此无关的。

或者，简单地用A来表示。我们认识这一现象，只是由于我们认识它的属性。这样，当我们说某一现象已由n个特征参量a_i所定义、或者所决定时，我们真正的意思是它的属性已由特征参量a_i决定了。所以，一个现象的某一属性A必须和n个特征参量按照函数

$$A = f_A(a_1、a_2、a_3\cdots\cdots a_n) \tag{1—13}$$

联系起来。在这里，f_A中的角标A表示以上函数关系式是和研究中的属性A的本质有关。从而可以得出，一个现象的不同属性能够当作是同一组n个特征参量的不同函数。

当我们说，如完全定义一个现象，特征参量a_i是充要时，我们指的是：为了保证我们对这一现象想象得到的任何属性A都可以定义出来，它们是充要的。当然，这并不意味着在每一个属性A的表达式中，所有n个特征参量a_i都必须出现。对于一个单一属性A的定义讲，n个特征参量a_i仅仅应当当作充分来理解。关系式(1—13)由所有n个特征参数a_i来表示，并且假定这一关系式对任何A都是有效的这一事实，并不和这一陈述相矛盾，这是因为函数f_A的形式并不受任何限制。假使从理论或试验得知，某一属性A不可能和一个或某几个参量a_i有关，从该属性的函数关系式f_A中将这个或几个参量排除出去，自属当然的事。另一方面，假使做不出这种预报，那就没有第二条路可走，也就只好假定所研究的属性A是所有n个特征参量的一个函数（直到以后的研究揭示它不是这样为止）。又：关系式（1—13）好象是n个“变数”的函数，但我们不能因此而得到特征参量必须是变数的结论。在这里，我们并不是在研究变数，而是在研究那一些描述或决定一现象的各种量，例如，当研究一个颗粒在液体中沉降的末速时或者当决定堰流公式时，我们必须记住，这些现象是由于、并从而也决定于地球引力。这样，由重力引起的加速g必须包含在这些现象的（1—12）符号之中，而不必考虑这样的事实：就我们所在的行星（地球）说，g可以认为是一个常量。同样，假使我们要决定一个只适用于一特定流体（例如是水）发生于一特定温度范围（对于这些情况说，这流体的密度ρ和它的粘滞力μ可以认为是常量）的流动的关系式，则ρ和μ两个量仍然必须包含在其特征参量之内，因为所考虑的流体运动肯定是和它们两者有关的。不熟悉因次原理的读者可能觉得奇怪，为什么一些常值参量应该作为函数f_A的变数。这个问题的答案扎根于这样的事实之中：表达式（1—13）并不是决定属性A的最终函数关系；尽管这些（有因次的）特征参量不是这现象实际的“变数”，它们却是为建立所需要的实际变数的一些“组成部分”。在下节中将要证明，一个物理现象的实际变数是由特征参量a_i所构成的一些无因次变量。如若特征参量的选择是错误的，无因次变量也一定是错误的。举例说，假使一个特征参量被忽略了（例如，因为它是常量），那么，无因次变量就有一个会被遗漏掉，而这一无因次变量确实可能是由那一个被忽略的常值参量和某些其他变化参量所构成的。

在第一节中曾指出，一个力学量的因次由L、T和M单元表示，或者由另外三个具有独立因次的量的单元来表示，都是可以的。重要的只是所选择的单元数目（三个）及其独立性。对于特征参量，也可以作出一个完全类似的陈述（对于无因次变量，这一同样的陈述将会在后文中看到）。看来，大自然并不关心构成它的定律的“元素”究竟是什么；它所关心的全部事实似乎是这些元素的数目和它们是不是独立的。即使自然规律表达式中的元素组合依其意义的不同而变，但上述定律的性质似乎是和下述哲学观点一致的，即：物质（或物理的）世界的基础，其数学性多于物理性*。

重要的不是特征参数的性质，而是它们的数目（n）和独立性，这一事实可以由以下推理来说明。考察任何n个独立的属性A_1，A_2，A_3，……A_n。

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= f_1(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n) \\ A_2 &= f_2(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n) \\ &\vdots \\ A_n &= f_n(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n) \end{aligned}\right\} \tag{1—14}$$

从以上n个独立方程，可以解出（在理论上）n个量a_i如下：

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \bar{f}_1(A_1, A_2, \cdots\cdots A_n) \\ a_2 &= \bar{f}_2(A_1, A_2, \cdots\cdots A_n) \\ &\vdots \\ a_n &= \bar{f}_n(A_1, A_2, \cdots\cdots A_n) \end{aligned}\right\} \tag{1—15}$$

现在考察另一个属性A，它不是在上述n个选择出来的$A_1A_2\cdots\cdots A_n$之中的。我们有

$$A = f_A(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n) \tag{1—16}$$

把（1—15）式中a_1，a_2，……a_n之值代入（1—16）式，我们得到

$$A = f_A(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots\cdots \bar{f}_n) \tag{1—17}$$

此地，每一个$\bar{f}_i$只包含A_1，A_2，……A_n，这样，（1—17）式的右边实际上是仅仅由A_1，A_2，……A_n构成的函数

$$A = \bar{f}_A(A_1, A_2, \cdots\cdots A_n) \tag{1—18}$$

关系式（1—18）指出，任何由（1—16）用n个参量a_1，a_2，……a_n所决定的属性A，可以同样恰当地由n个独立属性A_1、A_2，……A_n来决定。这也就等于说，和一个现象有关的任意n个独立量都可以选作它的特征参量。

第三节　自然定律的无因次表达式

象（1—13）式这样的一个函数关系式，亦即

$$A = f_A(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$$

是被假定为控制一天然现象的定律的一种表达；亦即，它是一不依人的意志而独立存在的物质世界的一条规律。从而，一正确表达自然定律的数值也不能依人们的主观想法而变化。另一方面，以上表达式中的属性A是一个因次量，那么，它的数值（亦即函数f_A的数值）显然要和我们随意选择的基本单元（单位）有关。所以，上述函数关系的因次表达式就不是一个表示自然定律的正确途径。从第一节可知，只有无因次量才具有那种不依基本单位的随

* 譯者注　这是抛开了物質存在談定律，抛开了物質属性談定律，所以才有这样的結論，尽管由此得到的数学表达式（定律）是可取的，而这个哲学观点却不正确。

意选择而变的数值。这样，一个自然定律的正确表达只能是无因次的。从相对论的原理，人们得到同一结论，它把长度、时间和质量都作为相对实体来对待，而不具有绝对的尺度。但若果真那样做，则视作绝对（普遍）有效的表达自然定律的式子就没有法子用这三个相对实体（它们之中的一个，或它们三者的组合）来表示出来了。

上述因次关系式的无因次当式（换算式），可以由叫做 π 定理的方法来得出。现在说明如下[1,2,3]。在 n 个特征参量

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots a_n$$

中选出任意三个参量，它们具有独立因次（参阅第一节）。这三个选出的参量，今后就称之为基本量。为了简单起见，我们可以假定，上边那一组特征参量的基本量就是其前三个参量 a_1、a_2 和 a_3。在以下的 $N = n - 3$ 个独立的幂乘积中，这三个基本量和其余的 $n - 3$ 个参量相结合，

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1^{x_1} a_2^{y_1} a_3^{z_1} a_4^{m_1} \\ X_2 &= a_1^{x_2} a_2^{y_2} a_3^{z_2} a_5^{m_2} \\ &\vdots \\ X^N &= a_1^{x_N} a_2^{y_N} a_3^{z_N} a_n^{m_N} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{—}19)$$

式中，$N = n - 3$*。（1—19）就是由 n 个特征参量 a_1，$a_2 \cdots\cdots a_n$ 决定的现象的无因次变量。在以上的表达式中，指数 m_1，m_2，$\cdots\cdots m_n$ 可以随意选择，依 m_1，m_2，$\cdots\cdots m_N$ 选择数值的大小，指数 x_j、y_j 和 z_j）$j = 1$、2，3，$\cdots\cdots N$）必须决定得使每一个幂乘积 X_j 变为无因次的。为了决定一幂乘积 X_j 的指数 x_j、y_j 和 z_j，我们有以下三个方程（它们构成一方程组）：

$$\alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j = -\alpha_{j+3} m_j$$

$$\beta_1 x_j + \beta_2 y_j + \beta^3 z_j = -\beta_{j+3} m_j$$

$$\gamma_1 x_j + \gamma_2 y_j + \gamma_3 z_j = -\gamma_{j+3} m_j$$

式中，α_i、β_i 和 γ_i 从参量 a_i 的因次公式

$$[a_i] = L^{\alpha_i} T^{\beta_i} M^{\gamma_i}$$

是已知的。由于其系数行列式 Δ 不是零（根据基本量 a_1、a_2 和 a_3 具有独立的因次这一事实），各 x_j、y_j 和 z_j 的成组的三线性方程肯定可以解得出来。

所研究的属性 A 的无因次表达式可以类似地由幂乘积

$$\Pi_A = a_1^{x_A} a_2^{y_A} a_3^{z_A} A \qquad (1\text{—}20)$$

来表示。此地，指数 x_A、y_A 和 z_A 也必须（依属性 A 的因次）决定得使幂乘积 Π_A 变为无因次的。现在，对应于属性 A 的无因次组合 Π_A 是 $N = n - 3$ 个无因次变数 X_j（$j = 1$，2，$\cdots\cdots N$）的某一函数，亦即

* $N = n - 3$ 个幂乘积 X_1，$X_2 \cdots\cdots X_N$ 是独立的，亦即：它們之中沒有一个可以由其余的 $N - 1$ 个乘积来表示；因为，它們之中每一个都包含一个独立的特征参量（a_4，a_5，$a_6 \cdots\cdots a_n$）而这一个独立的特征参量不出現在其余 $N - 1$ 个幂乘积中的任何其他一个当中。

$$\Pi_A = \varphi_A(X_1, X_2, \cdots\cdots X_N) \qquad (1-21)$$

它就是函数关系式（1—13）的无因次的当式（或叫“换算式”）。

φ_A中的角标A说明，函数φ_A的形式与属性A的本质有关。和它的有因次的对方（1—13）式相比，无因次关系式（1—21）具有以下的优点：

（1）它是表达自然定律的一种正确形式；

（2）它是变数业已减少了三个的一种函数，这意味着：和f_A的形式相比，决定φ_A的形式时所遇困难要少一些；

（3）它的数值和所用的单位制无关；

（4）从下一章可以看出，它的变数X_i也就是由特征变量a_i所决定的现象的相似准则。

从（1—19）可以看出，参量a_4只出现于变数X_1的表达式中，参量a_5只出现于X_2中，等等。所以说，参量a_4的影响由变数X_1加以考虑，a_5的影响由变数X_2加以考虑等等。参量a_1、a_2和a_3（它们是选作基本量的）的影响不曾被变数X_i中任何一个所考虑。假使一个参量a_i的影响想要被一个特别变数所考虑，那么，这个参量一定不要选作基本量。

在无因次变数的场合中，重要的又是无因次变数X_i的数目$N = n - 3$和它们的独立性，而不是它们的本质。按照完全类似于推导方程（1—18）式的论证，这一事实很容易证明〔把（1—14）的A_K用Π_{AK}代替，a_i用X_i代替，f_K用φ_K代替，并按照相同的推导方式〕。任何三个具有独立因次的参量可以选作基本量，因此，无因次变数X_i可以按各种途径形成。这一事实是一个有利条件，可以利用它解决实际问题。举例说，如函数φ_A的形式要由试验测出数据来决定，人们总是希望在无因次变数之中，仅一个在变，而其余的都保持不变。只要不选择在试验过程中要变的参量为基本量，就可以很简单地达到这一目的（因为，基本量将在每一个无因次变数中都出现，而其余参量的每一个只是在一个变数中出现）。

应该指出，假使现象包含某些不规则的形状，人们一般地并不企图用特别参量来描写这种不规则的几何形态。确实，有限的几个参量并不能够充分地描写一个随意的曲线或曲面（的形状）。例如，我们考虑图1—1a所示的水流横断面，让我们引进一些特别的几何参量来描写这个不规则横断面的形状。我们可能会想，假使我们给出水面宽度B，最大深度h，岸坡角α_1和α_2，距离l和l_2（它们是和诸如水深h的一半那一个量相应），以及断面最低点的距离l_3，那么，一组七个“形状参数”：

$$B, h, \alpha_1, \alpha_2, l_1, l_2, l_3$$

至少可以近似地描写水流横断面的形状。为了说明这样的假设未免过于乐观，只要观察一下图1—1b的横断面（它的以七个参量的数值是和图1—1a者完全相同）的形状，就可以知道它可以和图1—1a迥然不同。图1—1a和图1—1b中的水流属性当完全不同：而这又完全是由于横断面几何形状不同。所以，引人多至七个特别的“形状参量”，实际上并不解决问题。

另一方面，如形状参量略去不提，那就意味着函数f_A和φ_A的一个特别形式只能相应于所研究的现象中的特定形状（或几个特定形状）。举例说，如若函数φ_A的形式是由一圆断面管道之具有砂粒糙率的水流数据所决定，那么，我们就不要希望对于“方形”或“三角形”断面管道，或糙率在几何形态上不同于密排砂粒的情况，函数φ_A会保持其形式不变。在很多场合，几何形态是不能用圆形、方形、抛物线型等等来描写的。在这种情况下，我们

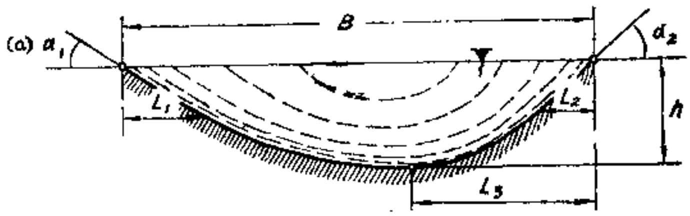
只是把和现象有关的形状画出来，并假定某一个函数 φ_A 对于它有效。举例说，我们说

$$\Pi_A = \overline{\varphi}(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)$$

这样一个特殊形式对图 1—1a 中所示的断面有效；而

$$\Pi_A = \overline{\varphi}_1(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)$$

这样一个形式，则对于图 1—1b的断面有效。



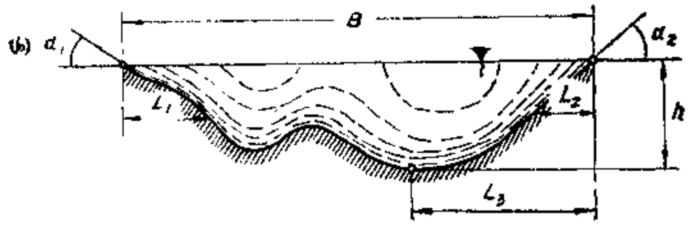


图 1—1

时常发现，一个概念最好是通过特例的描述来介绍。在本书，例题将不仅用于说明已讲过的原理如何应用，还将作为一个适合的工具来介绍新的概念。所以，读者应该把例题看作本教材的一部分。

例题 1—1　堰流

今考察一个特定几何形状的堰流，举例说，堰口可能是对称三角形，角 α 有一个给定值，图 1—2 。堰流将完全决定于

（1）流体的本质；

（2）堰上水头高 H；

（3）重力加速 g（它使水流发生）。

在力学研究的范围内，流体的本质可以完全由它的粘滞动力系数 μ 和密度 ρ 的数值所决定。如 μ 和 ρ 的数值为已知，那么，在力学的考虑上说，流体是已知的，所以，所研究的堰流的一组特征参量当由以下四个独立量构成：

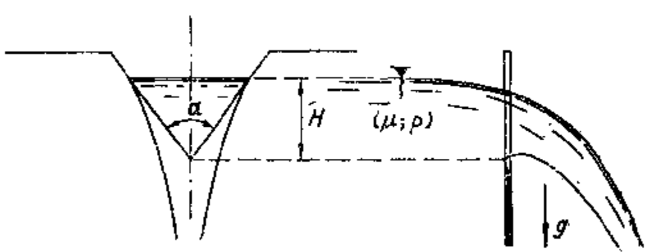


图 1-2

$$\mu, \ \rho, \ H, \ g \tag{1—22}$$

联系到这个水流现象的任何力学量A，必然是以上 $n=4$ 个特征参量的某一函数，亦即

$$A=f_A(\mu,\ \rho,\ H,\ g) \tag{1—23}$$

让我们假定属性A为流量Q。根据（1—23），Q之值必须由

$$Q=f_Q(\mu,\ \rho,\ H,\ g) \tag{1—24}$$

提供。属性Q的无因次表达式 Π_Q 必须是 $N=4-3=1$ 个无因次变数 X_1 的函数，亦即

$$\Pi_Q=\varphi_Q(X_1) \tag{1—25}$$

参量 ρ，H和g具有独立因次（参阅表1—1），它们因而可以选作基本量。按照这个做法，并考虑（1—19）和（1—20），我们得到

$$X_1=\rho^1H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}\mu^{-1}=\frac{\rho\cdot H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}{\mu} \tag{1—26}$$

和

$$\Pi_Q=\rho^0H^{-\frac{5}{2}}g^{-\frac{1}{2}}Q=\frac{Q}{H^{\frac{5}{2}}g^{\frac{1}{2}}}$$

这样

$$\frac{Q}{H^{\frac{5}{2}}g^{\frac{1}{2}}}=\varphi_Q\left(\frac{\rho H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right) \tag{1—27}$$

或者

$$Q=m\sqrt{2\cdot g}\ H^{\frac{5}{2}} \tag{1—28}$$

它就是水力学中一个常见的公式，式中的因次堰流系数m是组合变数 X_1 的某一函数，它反映粘滞力的影响

$$m=\bar{\varphi}_Q\left(\frac{\rho H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right),\ 而\ \left(\bar{\varphi}_Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_Q\right) \tag{1—29}$$

无因次变数 X_1 的函数 φ_Q 的形式与堰口的几何形状有关，并且只有通过试验才能决定。当用同一的流体（$\mu=$常数，$\rho=$常数）和同一的堰口时，可以看出

$$X_1=\frac{\rho H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

的变化只和H的变化有关。假使对于不同的H值（亦即不同的 X_1 值），把相应的Q值都量出来，并把无因次比数 $Q/(\sqrt{2g}\,H^{\frac{5}{2}})$，亦即m，计算出来，可以得到和（组合数）$X_1$ 的值相应的各个m值，点绘成图，连起来，就构成 $m=\bar{\varphi}_Q(X_1)$ 曲线〔参阅方程（1—29）〕。即使是在用相同的流体（就说水吧）和相同的堰口情况下进行试验和量测，所得到的试验曲线 $m=\bar{\varphi}_Q(X_1)$ 对于各种流体在通过几何相似的堰口的情况，也都是有效的。

可以写作

$$X_1=\frac{\rho H\sqrt{gH}}{\mu} \tag{1—30}$$