极限十大求法

张杰恒 编

华中工学院出版社

封面设计：王立革

统一书号：13255·051
定　　价：1.05　元

极限十大求法

张杰恒　编

华中工学院出版社

极限十大求法
张杰恒 编
责任编辑 傅岚亭
*
华中工学院出版社出版
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所发行
湖南省新华印刷二厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：5 字数：103,000
1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷
印数：1—3,000
统一书号：13255—051 定价：1.05元

前　言

极限理论是高等数学的基础和首要的教学内容，它从方法论的角度表现了高等数学与初等数学的不同。极限理论所研究的是变量在其变化过程中的趋势问题。在高等数学课程内所讨论的极限大体上分为两类，一类是数列的极限，一类是函数的极限，两类极限在本质上是相同的，在形式上前者是后者的特例。求极限是数学的基本运算之一。

求极限固然要以有关的概念、定理和公式为依据，但最关键的是要掌握一些主要的方法与技巧，才能把定理、公式用活。由于这些方法都各有突出的特点，所以它们彼此之间的界线大体上是清楚的，这本书就是用来介绍这些方法的，书中列举了求极限的十大方法。对每一个方法，都以定理和简述开头，继之以例题、注记、习题，分四段来叙述，以求醒目。由于重点在讲方法，故定理一般不予证明，只作为依据使用，但为了满足读者的需要，在附录2中对一部分定理作了补证并且添加了少数极有用处的定理。大部分例题、习题都具有典型性，来源也极为广泛；我们对习题不作逐一解答，以促使读者亲自动手动脑去做，达到眼高手高的目的，但对一部分习题作了提示或略解，以供读者必要时参考，避免苦思不入而耗时过多。注记是做题方法的经验介绍，对前面例题的一些补充，对后面习题的一些预示，以及对其他有关事项的说明。把注记当作重要部分来参考，可使读者对各个方法获一完整的印象。

这本书的内容是高等数学课程中所讲内容的深化，书中分类收集了丰富资料，便于各类工科院校正在上课的低年级同学

课外阅读，以补充课堂上无法深入的不足；更便于投考研究生的高年级同学对极限部分作一系统的深入的复习，以加强高等数学考试的准备；对自学的青年，阅读它亦可获得如师面授之益。请注意的是，当介绍用某法解某题时，并非说此题不能用其他方法求解，在不少场合下，这些方法要相互渗透和交错使用。

本书在湖南大学几届暑期补习班讲授过，获得广大同学的好评与具体帮助，华中工学院汪民生老师对原稿提了很多宝贵的修改意见，谨致谢忱。

编者敬识

1985年

目　　录

一、单调有界法

定理 单调有界数列必有极限。

利用这个定理所构成的方法称为单调有界法。此法有下列步骤：

（1）建立数列$\{x_n\}$的递推关系式；

（2）利用数学归纳法或其他方法证明数列$\{x_n\}$的单调有界性。从而可设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$（$A$为待定常数）；

（3）在递推关系式两边取极限，可得一个含A的方程，然后解此方程，找出适合题意的A值。

例1 设$x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，其中，$a>0$；$n=0$，1，2，…。试证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在并求其值。

解 （1） 已知递推关系式$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$。

（2）由于若干个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值，故有

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a}.$$

又
$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_{n-1}^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a}\right)=1,$$

即$x_n\leqslant x_{n-1}$，因此数列单调下降且有下界，于是极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$存在。

（3）在递推关系式两边取极限，得方程

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)，即\quad A=\pm\sqrt{a},$$

由于数列为正项数列，故得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$。

例2 设$x_0=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$ ($n=0, 1, 2\cdots$)，试证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在并求其值。

解 (1) 已有递推关系式$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$。

(2) 显然有$0<x_n<2$；且有

$$x_1-x_0=x_1-1=\frac{x_0}{1+x_0}>0,$$

即$x_1>x_0$，设$x_n-x_{n-1}>0$，则

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0,$$

即$x_{n+1}>x_n$，因此数列单调上升且有上界，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在。

(3) 在递推关系式两边取极限，得方程

$$A=1+\frac{A}{1+A}，\ 即\ A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

由于数列是正项的，故得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

例3 设$a>0$，试证数列$\{(a+(a+(\cdots+a^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}\}$的极限存在并求其值。

解 (1) 易知递推关系式为$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，且$x_1=\sqrt{a}$。

(2) 因$a>0$，故$a<a+\sqrt{a}$，从而有

$\sqrt{a}<(a+a^{1/2})^{1/2}$，即$x_1<x_2$，

现设$x_{n-2}<x_{n-1}$，于是$\sqrt{a+x_{n-2}}<\sqrt{a+x_{n-1}}$，即$x_{n-1}<x_n$；因此数列单调上升。

将递推关系式两边平方得到

$$x_n^2 = a + x_{n-1}.$$

由于 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} > \sqrt{a}$ 且$x_{n-1} < x_n$，故有

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \sqrt{a} + 1.$$

因此数列有上界，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$存在。

(3) 在递推关系式两边取极限得方程

$$A^2 = A + a,\ 即\quad A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

由于是正项数列，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$。

例4 设$a>0$，试证数列 $\{x_n = (a(a(\cdots a^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}\}$ 的极限存在并求其值。

解 (A) $a=1$的情形：显然$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$。

(B) $a<1$ 的情形：

(1) 此时递推关系式为$x_n = \sqrt{a x_{n-1}}$。

(2) 因为 $0<a<1$，故$x_1 = \sqrt{a} > a$，从而有

$$x_2 = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} > \sqrt{a \cdot a} = a.$$

设$x_{n-1} > a$，则$x_n = \sqrt{a x_{n-1}} > \sqrt{a \cdot a} = a$，

于是数列有下界a。

由于$x_n^2 = a x_{n-1}$，$x_n^2 - x_n x_{n-1} = a x_{n-1} - x_n x_{n-1}$，

$$x_n(x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}(a - x_n),$$

式中$x_n > 0$，$x_{n-1} > 0$，$a - x_n < 0$，故必有

$x_n - x_{n-1} < 0$。因而数列是单调下降的。于是极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 存在。

(3) 在递推关系式两边取极限得方程

$$A=\sqrt{aA}，即 A=a 或 A=0。$$

由于对任意n，均有 $x_n>a>0$，所以 $A\neq 0$， 从而最后得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

(C) $a>1$ 的情形：

(1) 递推关系式仍为 $x_n=\sqrt{ax_{n-1}}$

(2) $x_1=\sqrt{a}<a$，$x_2=(a\cdot a^{1/2})^{1/2}<\sqrt{a\cdot a}=a$，

设$x_{n-1}<a$，则 $ax_{n-1}<a^2$，即$x_n^2<a^2$，亦即 $x_n<a(n=1,2,\cdots)$，因此数列是有上界的。

类似于(B)，我们有下式：

$$x_n(x_n-x_{n-1})=x_{n-1}(a-x_n),$$

由于 $x_n>0$，$x_{n-1}>0$，$a-x_n>0$， 故必有 $x_n-x_{n-1}>0$ 即 $x_{n-1}<x_n$，所以数列是单调上升的。因此， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在。

(3) 在递推关系式两边取极限，得方程

$$A=\sqrt{aA}，即A=a或A=0（此根舍去），$$

故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

例5 设 $a>1$，$x_1>\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$，试讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 (1) 已给递推关系式$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$。

(2) 显然有 $0<x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}<\dfrac{a+ax_n}{1+x_n}=a$，

又
$$x_{n+1}-x_n=\frac{(1-a)(x_n-x_{n-1})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})},$$

即
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1-a}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}<0,$$

故有

$$(\mathrm{i})\begin{cases}x_{n+1}>x_n,\\x_n<x_{n-1};\end{cases}\quad 或(\mathrm{ii})\begin{cases}x_{n+1}<x_n,\\x_n>x_{n-1};\end{cases}$$

于是$\{x_n\}$不单调。

用迭代法可得下式：

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(1-a)(x_n-x_{n-1})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

$$=\frac{(1-a)^2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})^2(1+x_{n-2})}=\cdots$$

$$=\frac{(1-a)^{n-1}(x_2-x_1)}{(1+x_n)(1+x_{n-1})^2(1+x_{n-2})^2\cdots(1+x_2)^2(1+x_1)}.$$

由不等式$x_2-x_1<0$可知：

当 $n=2k$时，$x_{2k+1}-x_{2k}>0$，$x_{2k}<x_{2k+1}$；

当 $n=2k-1$时，$x_{2k}-x_{2k-1}<0$，$x_{2k}<x_{2k-1}$。于是数列的任一偶序项小于前后相邻二奇序项。

由

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{(1-a)(x_n-x_{n-2})}{(1+x_n)(1+x_{n-2})}$$

得

$$x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{(1-a)(x_{2k-1}-x_{2k-3})}{(1+x_{2k-1})(1+x_{2k-3})}$$

$$=\frac{(1-a)^2(x_{2k-2}-x_{2k-4})}{(1+x_{2k-1})(1+x_{2k-2})(1+x_{2k-3})(1+x_{2k-4})}=\cdots$$

$$=\frac{(1-a)^{2k-3}(x_3-x_1)}{(1+x_{2k-1})(1+x_{2k-2})(1+x_{2k-3})\cdots(1+x_2)(1+x_1)},$$

由于上式右端分母为正，且有$(1-a)^{2k-3}<0$，同时

$$x_3-x_1=\frac{a+x_2}{1+x_2}-x_1=\frac{a+\dfrac{a+x_1}{1+x_1}}{1+\dfrac{a+x_1}{1+x_1}}-x_1$$

$$=\frac{2(a-x_1^2)}{1+a+2x_1}<0,$$

所以有 $$x_{2k}-x_{2k-2}>0.$$
同理可证 $$x_{2k+1}-x_{2k-1}<0.$$
于是数列$\{x_{2k}\}$单调上升，而数列 $\{x_{2k-1}\}$单调下降。再利用有界性得

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k}=l_1 \text{ 和 } \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}=l_2.$$

(3) 对$x_{2k}=\dfrac{a+x_{2k-1}}{1+x_{2k-1}}$ 和$x_{2k+1}=\dfrac{a+x_{2k}}{1+x_{2k}}$

两式的两端取极限即得

$$l_1=\frac{a+l_2}{1+l_2} \quad \text{和} \quad l_2=\frac{a+l_1}{1+l_1},$$

由上列二式得$l_1=l_2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设它是$A$。于是由递推关系式两端取极限得方程

$$A=\frac{a+A}{1+A},\quad A=\pm\sqrt{a}\text{，从而得} \lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}.$$

注　记

1. 从上述各例的求解过程，可以得出下列几条经验：

(1) 在第二步中，有时先证有界性，再利用有界性来证单调性，如例 1 和例 4；有时先证单调性，再利用单调性来证有界性，如例 3；有时互不利用而各自独立证明，如例 2 和例 5．其实其他各题也可按例 2 的方式来处理，如例4的情形(B)中的单调性就可独立证明如下：

因为 $0<a<1$，故 $0<\sqrt{a}<1$，从而 $a>a\sqrt{a}$，$\sqrt{a}>\sqrt{a\sqrt{a}}$，即 $x_1>x_2$，设 $x_{n-2}>x_{n-1}$，则 $ax_{n-2}>ax_{n-1}$，$\sqrt{ax_{n-2}}>\sqrt{ax_{n-1}}$，即$x_{n-1}>x_n$，于是数列$\{x_n\}$单调下降，这里没有利用有界性。

(2) 有界性大体由下列各方法获得证明：(i) 从数列$\{x_n\}$

的递推关系式看出，如例2和例5；（ii）用已知不等式推导出，如例1；（iii）用归纳法证出，如例4；（iv）用单调性推导出，如例3。

（3）单调性大体由下列各方法获得证明：(i) 比值法。对于正数数列，用归纳法、已知不等式或其他方式考虑比式$\frac{x_{n+1}}{x_n}$，若$\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$则单调上升；若$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，则单调下降，例1的单调性就是这样得来的。此外应当注意 x_n 是乘积形式时多用此法。(ii) 差值法。用归纳法、已知不等式、递推法或其他方式考虑差值$x_{n+1}-x_n$，若$x_{n+1}-x_n>0$，则单调上升；若 $x_{n+1}-x_n<0$，则单调下降。例2、例4和例5的偶项数列与奇项数列就是这样处理的。此外应注意当x_n是和数形式时，多用此法。(iii) 用归纳法或其他方式直接比较 x_n和x_{n-1}的大小，例3就是这样处理的。这三种证明单调性的方法，特别是比值法，请读者注意掌握。为此，我们再来考虑著名数列$\left\{x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的单调性，由于

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big/\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n\Big/\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}$$

$$=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\Big/\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\Big/\left(1-\frac{1}{n}\right)\geqslant 1,$$

所以数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是单调上升数列［这里我们对$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$使用了不等式$(1+x)^m\geqslant 1+mx(x>-1,\ m>1)$］。当然利用二项式定理先将$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$展开，再适当放大亦可证得数列单调上

升，但其证法就似乎不如比值法简单．后面的习题表明，在一些场合下，还应当考查比值或差值的极限。

2．关于例5的单调性，显然有：

$$x_2-x_1=\frac{a-x_1^2}{1+x_1}<0;$$

若设$x_n-x_{n-1}<0$，则由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(a-1)(x_{n-1}-x_n)}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$$

可知用归纳法证不出数列的单调性，因此，考虑比值$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$可得知数列不单调，这个连续三项的差值比式，它的用处不小。

3．含有参数的数列，有时要按参数的取值范围而分开讨论．当参数处在这一范围时，数列为单降有界；当参数处于另一范围时，数列为单增有界；当参数处在又一范围时，数列不单调，而应用例5的办法处理；甚至当参数处在某一范围时，数列没有极限．例4就包含了这里的前两种情形．因此含参数的数列实为数列族．习题中的第13题就是这种划分参数取值范围的又一典型例子。

4．数列$\left\{x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}$显然单调减少且$x_n>0$，故存在$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．然而在递推关系式$x_{n+1}=x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$的两边取极限得$A=A$，这不是$A$的方程，故数列$\{x_n\}$的极限不能由此而求出．此外，当数列的偶项数列与奇项数列有相同的极限时，当然数列本身就有极限（见附录2的定理2），但此种极限不能象例5所示那样从递推关系式的极限式中得出，习题中的第11题和第13题就是如此，必须用其他方法

求解。

5. 当我们用某一方法来处理数列$\{x_n\}$的极限问题时，并不是说此数列就不能用其他方法处理，在不少场合下还要有意识地将各种方法互相渗透或交错混合使用，例如上述例4，用后面讲的变形法处理就简单得多。

6. 象例5那样处理的数列会经常见到的。为了熟悉这种处理方式，我们再来讨论数列$\{x_n\}$，其中

$$x_n=\left.\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ddots\,\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}}\right\}n\text{层分数线}$$

容易算得$x_1=\dfrac{1}{1}$，$x_2=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}=\dfrac{1}{2}$，

$$x_3=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}=\frac{2}{3},\qquad x_4=\frac{1}{1+x_3}=\frac{3}{5},$$

$$x_5=\frac{1}{1+x_4}=\frac{5}{8},\qquad x_6=\frac{1}{1+\dfrac{5}{8}}=\frac{8}{13},\ \cdots.$$

前几项的数值表明，数列$\{x_n\}$不是单调的，但这并不是一般证明。为了得到非单调的一般证明，必须对通项进行讨论。通项的递推关系式是

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},$$

显然，$x_2-x_1<0$；若设$x_n-x_{n-1}<0$，则由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}$$
$$=\frac{x_{n-1}-x_n}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$$

可知用差值法得不出单调性，而改由

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1+x_{n-1}}{1+x_n}=\frac{(1+x_n)+(x_{n-1}-x_n)}{1+x_n}$$
$$=1+\frac{x_{n-1}-x_n}{1+x_n}>1$$

亦可知用比值法仍然得不出单调性。因此有必要再考虑连续三项x_{n-1}，x_n和x_{n+1}之差的比，即

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{-1}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}<0.$$

若仿例5的(2)中(i)与(ii)，可知本数列不单调；由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(-1)^1(x_n-x_{n-1})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$
$$=\frac{(-1)^2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(1+x_n)(1+x_{n-1})^2(1+x_{n-2})}=\cdots$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}(x_2-x_1)}{(1+x_n)(1+x_{n-1})^2(1+x_{n-2})^2\cdots(1+x_2)^2(1+x_1)}$$

和$x_2-x_1=\frac{1}{2}-1<0$知；数列的任一偶序项小于前后相邻的二奇序项；

此外，由

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{(-1)(x_n-x_{n-2})}{(1+x_n)(1+x_{n-2})}.$$

得
$$x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{(-1)(x_{2k-1}-x_{2k-3})}{(1+x_{2k-1})(1+x_{2k-3})}$$
$$=\frac{(-1)^2(x_{2k-2}-x_{2k-4})}{(1+x_{2k-1})(1+x_{2k-2})(1+x_{2k-3})(1+x_{2k-4})}$$