高等学校理工科参考丛书

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONGSHU

概率统计中的反例

高等学校理工科参考丛书

概率统计中的反例

张尚志　刘锦萼编著

湖南科学技术出版社

高等学校理工科参考丛书

概率统计中的反例

张尚志　刘锦萼　编著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1988年3月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：10.25　字数：227,000

印数：1—4,100

ISBN 7—5357—0290—2

O·39　**定价：2.50元**

湘目 87—42

前　言

在数学上，当人们在若干个条件下证明了某一结论时，常希望知道：所证明的结论对所设条件依赖到何种程度. 具体地说，设A是条件之一，当免除条件A时，定理的结论是否仍成立. 或者，人们希望知道：由某些特定的条件出发能否证明某项结论. 考察这个问题的一个方法是设法构造反例. 常见的反例有两种：其一是当从一组条件中免除条件A时，定理的结论不再成立. 另一种是令某些条件满足，但某项特定的断言仍不真. 构造反例不仅是使理论变得更加完整，成为不可缺少的一环，而且对于深入理解正面命题的内容、证明的思想和技巧以及定理条件在证明中的作用都有着极其重要的意义.

概率论与数理统计是研究大量随机现象规律性的学科. 现在高等院校理、工、医、农、财经的许多专业都设置了概率论与数理统计课程，有的学校还设立了数理统计系或统计运筹系. 概率论与数理统计的理论和方法已广泛地应用于工业、农业、国防和科学技术中，成为数学中活跃的分支之一.

近年来，国内已出版了许多内容深浅不一、风格不同的概率统计教材和参考书，但是在国内外出版的许多概率统计教本或专著中，还没见到一本较为全面、系统地论述概率统计中反例的著作. 本书的写作是希望能多少弥补这个缺陷.

本书针对概率论与数理统计的基本概念和正面命题，较为

全面、系统地提供反例并给予证明。全书共收集反例一百三十七条，内容涉及概率空间、随机变量、分布函数、独立性（含鞅论）、数字特征、母函数、特征函数（含无穷可分分布）、极限理论、完全统计量与充分统计量、参数点估计、假设检验、线性模型、抽样理论等。每一条反例，大致由四个部分的内容组成：(1) 需要用到的有关定义和定理；(2) 正面命题；(3) 引用或构造反例并给予证明（太复杂的只提供文献）。这部分是重点；(4) 进一步的讨论（介绍文献和专著中更深入的结果）。对于内容比较深入的反例，我们在该例前面标有(•) 号，而且对阅读这样的反例所需用到的知识，我们均不作详细介绍，因此希望还不具备这方面知识的读者，初次阅读时可以略去，待必要时再参考所列文献或专著补看。

本书概率论部分我们用ξ，η，ξ……或ξ_1，ξ_2，…，ξ_n等等表示随机变量，而在数理统计部分，我们则用X，Y，Z，……或X_1，X_2，…，X_n表示随机变量。每个反例前面的数字，如6—13，表示第六章的第13个反例，余类推。另外定理、定义、例子、注记的编号都按各个反例单独进行。

我们期望本书对于具有一般概率统计知识的读者的进一步提高能有所裨益。

本书在写作过程中，曾得到中国科学技术大学陈希孺教授的热情鼓励和指导。初稿完成后，又承他和安徽大学的陈桂景同志仔细审阅并提出许多宝贵意见，作者谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中存在的问题肯定不少，作者恳切地希望专家和读者提出宝贵的批评意见。

张尚志　刘锦萼

1984.11

目　　录

第一章　与随机事件、概率空间、古典概型有关的反例（1）
1—1　基本事件但不是事件的例子……………………（1）
1—2　同一随机现象可以用不同的样本空间来描述的例子……………………………………………（2）
1—3　两事件互斥但不互逆的例子……………………（4）
1—4　概率为0的事件并非是不可能事件的例子……………………………………………………（5）
1—5　概率为1的事件并非是必然事件的例子……（6）
(*)1—6　集类E上的非负集函数μ具有有限可加性、连续性但不具有可列可加性的例子……………（6）
1—7　上极限事件和下极限事件不相等的例子……（11）
1—8　非古典型随机试验的例子……………………（12）
第二章　与独立性、条件概率有关的反例………………（14）
2—1　两事件不独立的例子…………………………（14）
2—2　两事件不独立，但不一定互斥的例子………（16）
2—3　事件两两独立，但并非相互独立的例子……（17）
2—4　$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，但A，B，C三事件并非两两独立的例子……………………（19）
2—5　说明$P(A)$，$P(A|B)$，$P(AB)$三者不同含义的例子……………………………………………（22）

2—6 非独立试验概型（非Bernoulli 概型）的例子 ……………………………………………………（24）

(*)2—7 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sup E|\xi_n|<\infty$，但 $\xi_n\xrightarrow{L_1}\xi$不成立的例子 ……………………………………………………（25）

(*)2—8 并非任何一个鞅$\{\xi_n\}$均存在一个满足$E|\xi|<\infty$的随机变量ξ和概率空间（Ω，$\mathscr{F}_1$，P）中$\mathscr{F}_1$的子σ代数$\mathscr{D}_n$使得$\xi_n=E\{\xi|\mathscr{D}_n\}$的例子 ……………………………………………………（28）

(*)2—9 ξ与ζ独立，但$E(\xi|\eta,\zeta)\neq E(\xi|\eta)$的例子 ……………………………………………………（29）

第三章 与随机变量，分布函数有关的反例……………（31）

3—1 $\xi(\omega)$是定义在概率空间（Ω,$\mathscr{F}$，P）上的单值实函数，但它不是（Ω，$\mathscr{F}_1$，P）上的随机变量的例子……………………………（31）

(*)3—2 随机变量的勒贝格可测函数不一定是随机变量的例子……………………………………（32）

3—3 既非离散型，又非连续型的分布函数的例子 ……………………………………………………（37）

3—4 设ξ是一个连续型随机变量，g是某个连续函数,$\eta=g(\xi)$不是连续型随机变量的例子……（41）

3—5 不同的随机变量（向量）,具有相同的分布函数的例子……………………………………（43）

3—6 连续型随机变量之密度函数未必是连续的例子……………………………………………（44）

3—7 二元函数$F(x,y)$对每个变元非降，左连续且$F(x,-\infty)=0$，$F(-\infty,y)=0$，$F(+\infty,$

$+\infty)=1$但仍不是分布函数的例子…………（46）
3—8 边际分布是正态分布，但联合分布不是多元正态分布的例子……………………………（48）
3—9 随机变量ξ、η相互独立，而且同分布，但不一定有 $\xi=\eta(\alpha,s)$ 成立的例子……………（53）
3—10 ξ、η 同分布但不独立时，$\xi=\xi-\eta$ 不一定是对称随机变量的例子……………………（54）
(*)3—11 ξ、η服从正态分布，但ξ、η不独立，则$\xi+\eta$不一定服从正态分布的例子…………………（56）
3—12 两个不同的联合分布（函数），它们可以有相同的边际分布的例子……………………（58）
3—13 随机变量ξ_1，ξ_2，ξ_3，两两独立，但不相互独立的例子…………………………………（62）
3—14 ξ、η不独立，但ξ^2和η^2独立的例子…………（66）
3—15 相同的随机向量构造的不同的 Borel 可测函数（不恒等于常数）之间也可能是独立的例子。……………………………………………（69）
3—16 从随机向量$\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$和$\eta=(\eta_1, \eta_2,\cdots,\eta_n)$之间的独立性推不出$\xi$的分量$\xi_1, \xi_2,\cdots,\xi_m$或者$\eta$的分量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$之间的独立性的例子………………………………（72）
3—17 ξ和η_1独立，ξ和η_2独立，但ξ和随机向量(η_1, η_2)不独立的例子…………………………（74）
(*)3—18 非独立随机变量序列的例子…………………（76）
(*)3—19 分布函数F_1和F_2的卷积绝对连续，但F_1和F_2不绝对连续的例子……………………………（77）
(*)3—20 随机变量ξ、η的各阶矩不全存在，即使ξ、η

已经存在的各阶矩相等，亦不能推出ξ，η的分布相同的例子……………………………………(78)

(*)3—21 ξ与$\frac{1}{\xi}$有相同的分布，而ξ并非服从哥西分布的例子……………………………………(79)

(*)3—22 ξ与$1-\xi$有相同的分布，而ξ并非服从$B(\alpha,\alpha)$分布的例子……………………………………(81)

(*)3—23 ξ与η独立同分布，$\xi=\frac{\xi}{\eta}\sim\mathscr{C}(1,0)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，但$\zeta$，$\eta$并非服从正态分布的例子……………………………………(83)

(*)3—24 ξ与η独立，分别服从$B(\alpha_1,\beta_1)$及$B(\alpha_2,\beta_2)$分布，又$\xi\eta\sim B(\alpha,\beta)$，则$\beta=\beta_1+\beta_2$，但只有$\alpha=\alpha_1$或$\alpha=\alpha_2$的例子……………………(85)

(*)3—25 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{k!}S^k$ ($m_k=E\xi^k$) 对S不绝对收敛，$\{m_k\}$仍唯一决定ξ之分布函数的例子……………(85)

第四章 与数字特征有关的反例……………………………(87)

4—1 随机变量的数学期望不存在（从而方差也不存在）的例子……………………………………(87)

4—2 随机变量的数学期望存在，但方差不存在的例子……………………………………(89)

4—3 任何阶矩都不存在的随机变量的例子………(92)

4—4 随机变量ξ的一阶矩存在，但没有更高整数阶矩的例子……………………………………(95)

4—5 随机变量ξ在$0<r<1$时，$E\xi^r$存在；但在$r\geq1$时，$E\xi^r$不存在的例子……………………………(96)

4—6 随机变量ξ_1和ξ_2，它们的一切整数阶矩都相同（即$E\xi_1^k=E\xi_2^k$，$k=1,2,3\cdots$），但它们的分布函数不相等的例子……(97)
4—7 随机变量ξ_1和ξ_2不相关，但也不独立的例子……(101)
4—8 相关系数$\rho(\xi_1,\xi_2)>0$，$\rho(\xi_2,\xi_3)>0$，但$\rho(\zeta_1,\zeta_3)<0$的例子……(105)
4—9 ξ_1和ξ_2不独立，但$E(\xi_1\cdot\xi_2)=E\xi_1\cdot E\xi_2$的例子……(106)
4—10 ξ_1,ξ_2独立，但$E(\xi_1+\xi_2)^k\neq E\xi_1^k+E\xi_2^k$的例子（正整数$k\neq1$）……(108)
4—11 $E[E(\eta|\xi)]$存在，但$E\eta$不存在，因而$E\eta=E[E(\eta|\zeta)]$不成立的例子……(109)
4—12 中位数不唯一的例子……(111)
4—13 数学期望不存在，但中位数存在的随机变量的例子……(112)
4—14 随机变量的众数不唯一的例子……(113)
第五章 与特征函数、母函数有关的反例……(114)
5—1 随机变量ξ_1,ξ_2不独立，但$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t)$成立的例子……(114)
5—2 当k为奇数时，随机变量ξ的特征函数$\varphi(t)$在$t=0$处可微分k次，但$E\xi^k$不存在的例子……(122)
5—3 分布函数绝对连续，但其对应的特征函数不绝对可积的例子……(125)
5—4 特征函数$\varphi(t)$在有限区间内的值不足以唯一确定此$\varphi(t)$，从而也不足以唯一决定分布函数$F(x)$的例子……(126)

5—5 特征函数列的极限函数不是特征函数的例子……………………………………………(129)
5—6 分布函数不具有再生性的例子………………(130)
5—7 分布函数$F(x)$不是无穷可分分布的例子……(133)
5—8 无处为0的特征函数不是无穷可分的例子……………………………………………(134)
5—9 无穷可分的特征函数可以分解为不是无穷可分的特征函数的乘积的例子……………………(134)
5—10 随机变量的矩母函数不存在的例子…………(137)
5—11 随机变量ξ的各阶矩都存在,但矩母函数不存在的例子……………………………………(138)
(*)5—12 并非所有的特征函数都是解析的例子………(139)
(*)5—13 消去法对一般特征函数之分解不一定成立的例子……………………………………………(140)
(*)5—14 无穷可分的特征函数存在不可分解因子的例子……………………………………………(140)
第六章 与收敛性有关的反例………………………………(143)
6—1 分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$，但$F(x)$不是分布函数的例子……………………………(143)
6—2 分布函数列$F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$，但$F(x)$不唯一的例子……………………………………………(144)
6—3 即使$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)$对$\forall\omega\in\Omega$都成立，也不能保证$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$对$\forall x\in R_1$成立的例子……………………………………………(145)
6—4 $F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$，但$E\xi_n^k\to E\xi^k$不成立的例子

……………………………………………………(147)

6—5 $F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$，但$F_n(x)\xrightarrow{C}F(x)$ 不成立的例子……………………………………………………(148)

6—6 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 对应的特征函数列为 $\{\varphi_n(t)\}$，若$\{\varphi_n(t)\}$收敛于某函数$\varphi(t)$，但$\varphi(t)$在$t=0$不连续，则推不出$\{F_n(x)\}$弱收敛于某分布函数的例子……………………………(150)

6—7 由$\xi_n\xrightarrow{L}\xi$ 推不出相应的分布密度函数或概率分布的收敛性的例子……………………………(151)

6—8 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{L}\xi(\omega)$，但$\xi_n(\omega)\xrightarrow{P}\xi(\omega)$不成立的例子……………………………………………………(153)

6—9 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{P}\xi(\omega)$但$E\xi_n^k\to E\xi^k(\forall k\geq 1)$ 不成立的例子……………………………………………………(155)

6—10 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ 但$\xi_n\xrightarrow{a,s}\xi$不成立的例子……………………(157)

6—11 波雷尔——康特立引理（1）的逆不成立的例子……………………………………………………(161)

6—12 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$但 $\xi_n\xrightarrow{r}\xi$不成立的例子……………………(162)

6—13 设$0<s<r$，$\xi_n\xrightarrow{S}\xi$但 $\xi_n\xrightarrow{r}\xi$ 不成立的例子……………………………………………………(163)

6—14 有关r一阶收敛与几乎处处收敛之间关系的反例……………………………………………………(165)

(*)6—15 当$F_n\xrightarrow{C}F$ 时，$\int_{-\infty}^{\infty}gdF_n\not\to\int_{-\infty}^{\infty}gdF$的例子……(167)

(*)6—16 ξ_n依分布收敛到ξ（记为$\xi_n\xrightarrow{L}\xi$），但ξ_n之矩母

函数$M_n(s)$不收敛到ξ之矩母函数 $M(s)$的例子……(168)
(*)6—17 矩母函数的极限函数不是矩母函数的例子……(169)
第七章 与大数定律、中心极限定理有关的反例……(170)
7—1 随机变量序列$\{\xi_n\}$不服从于大数定律的例子……(170)
7—2 随机变量序列$\{\xi_k\}$不满足马尔科夫条件，但服从大数定律的例子……(175)
7—3 独立随机变量序列$\{\xi_k\}$不满足车贝谢夫大数定律的条件，但满足马尔科夫大数定律条件的例子……(178)
7—4 独立随机变量序列$\{\xi_k\}$不满足格涅坚科大数定律的充要条件的例子……(179)
7—5 马尔科夫条件满足，但柯尔莫哥洛夫强大数定律条件不满足的例子……(181)
7—6 独立随机变量序列$\{\xi_k\}$不满足强大数定律的例子……(184)
7—7 林德贝格条件不满足，但中心极限定理仍成立的例子……(187)
7—8 费勒条件不满足，但中心极限定理仍成立的例子……(189)
7—9 有关大数定律和中心极限定理之间关系的反例……(191)
7—10 随机变量序列$\{\xi_n\}$独立同分布，但不服从中心极限定理的例子……(196)
*)7—11 $E|\xi|^2=\infty$，Lindeberg-Iévy 中心极限定理

仍成立的例子……………………………………(197)

(*)7—12 $\{\xi_{nk}1\leqslant k\leqslant n,\ n\geqslant 1\}$满足$u,a,n$条件，但$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_{nk}|\overset{P}{\nrightarrow}0$ 的例子……………………………(198)

(*)7—13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2}\ \infty$，$\{\xi_n\}$ 仍服从强大数定律的例子……………………………………………(199)

(*)7—14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\xi_n-E\xi_n)a,s$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}D\xi_n=\infty$ 的例子……………………………………………(200)

第八章　与充分统计量和完全统计量有关的反例………(203)

8—1 并非一切统计量都是充分统计量的例子……(204)

(*)8—2 极小充分统计量不是完全充分统计量的例子……………………………………………(206)

8—3 次序统计量不是完全统计量的例子…………(209)

8—4 有界完全的分布族（或统计量）不是完全的分布族（或统计量）的例子………………(211)

(*)8—5 可测函数 $f(X)$ 与有界充分完全统计量$t(X)$独立，但$f(X)$的分布与θ 有关的例子………(215)

8—6 充分统计量的函数不是充分统计量的例子……………………………………………(216)

8—7 充分完全统计量的函数不是充分完全统计量的例子……………………………………(217)

8—8 指数族分布表达式中的 $T(X)$ 不是充分完全统计量的例子………………………………(217)

(*)8—9 在适当的条件下，当$T_i(X_i)$是 $\theta_i(i=1,2)$的充分统计量时，$(T_1(X_1),\ T_2(X_2))$是 $(\theta_1,$

θ_2）的联合充分统计量的例子……………………(221)

第九章　与点估计有关的反例……………………………………(223)

9—1　参数不存在无偏估计的例子……………………(223)

9—2　无偏估计不是一致最小方差无偏估计的例子
………………………………………………………………(225)

9—3　$X\sim\{f(x;\theta),\ \theta\in\Theta\}, x_1,\cdots,x_n$是其$iid$样本，参数$\theta$的无偏估计是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的对称函数，但不是$\theta$的$UMVUE$的例子………………(229)

(*)9—4　无偏估计存在，而$UMVUE$不存在的例子
………………………………………………………………(231)

9—5　$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，而$g(\hat{\theta})$不是$g(\theta)$的无偏估计的例子（其中$g(X)$是$X=(X_1,\cdots,X_n)$的Borel 可测函数）……………………………………(232)

9—6　在一定的优良性准则下，用$S_{n+1}^2\overset{\Delta}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$去估计$\sigma^2$较之用$S_n^{*2}\overset{\Delta}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\times(X_i-\bar{X})^2$去估计$\sigma^2$更优的例子…………(234)

9—7　无偏估计不是一致（相合）估计的例子……(235)

9—8　无偏估计的方差低于 Rao-Cramér 不等式下界的例子………………………………………………(238)

9—9　UMVUE其方差达不到Rao-Cramér不等式下界的例子………………………………………………(240)

9—10　充分统计量不是有效估计量的例子…………(241)

(*)9—11　参数的UMVUE 不是参数的可容许估计的例子……………………………………………………(244)

9—12　某些条件不满足，但似然方程仍然存在一致

(相合)解并且满足渐近正态性的例子………(250)
(*)9--13 参数θ的一致（相合）渐近正态估计$\hat{\theta}$在θ点的渐近方差$\frac{v(\theta)}{n}$中的$v(\theta)$低于$C—R$下界的例子……………………………………………(254)
9—14 若$T_n(X)$是θ的一致估计，又$|T_n-\theta|\leqslant A_n<\infty$，则$T_n$不是$\theta$的均方一致估计〔即$E(T_n-\theta)^2\nrightarrow 0,(n\rightarrow\infty)$〕的例子…………………(260)
9—15 极大似然估计不是充分统计量的例子………(262)
9—16 极大似然估计不是有效估计的例子…………(266)
9—17 似然方程的解不是极大似然估计的例子……(267)
(*)9—18 极大似然估计不是一致估计的例子…………(271)
第十章 与假设检验有关的反例…………………………(277)
10—1 不是单参数指数族，但具有单调似然比的例子………………………………………………(277)
(*)10—2 单边假设检验不存在一致最优势检验（记为UMP检验）的例子………………………………(279)
(*)10—3 双边假设检验不存在 UMP 检验的例子……(282)
(*)10—4 检验函数 ϕ 对公共边界相似，但 ϕ 没有Neyman 结构的例子 ……………………………(287)
10—5 当正则条件不成立时，Wilks 定理中关于似然比极限分布的结论可以不成立的例子……(288)
10—6 对固定的样本大小而言，似然比检验可以不是无偏的例子…………………………………(291)
10—7 一个很坏的似然比检验的例子………………(294)
第十一章 与线性模型有关的反例……………………(301)
11—1 在非正态的条件下，参数的最小方差线性无

偏估计不再是最小方差无偏估计的例子……(301)
第十二章　与抽样理论有关的反例…………………………(306)
12—1　当检查人员可能犯错误时，全面检查不一定比抽样检查更好的例子…………………(306)
主要参考文献……………………………………………………(312)