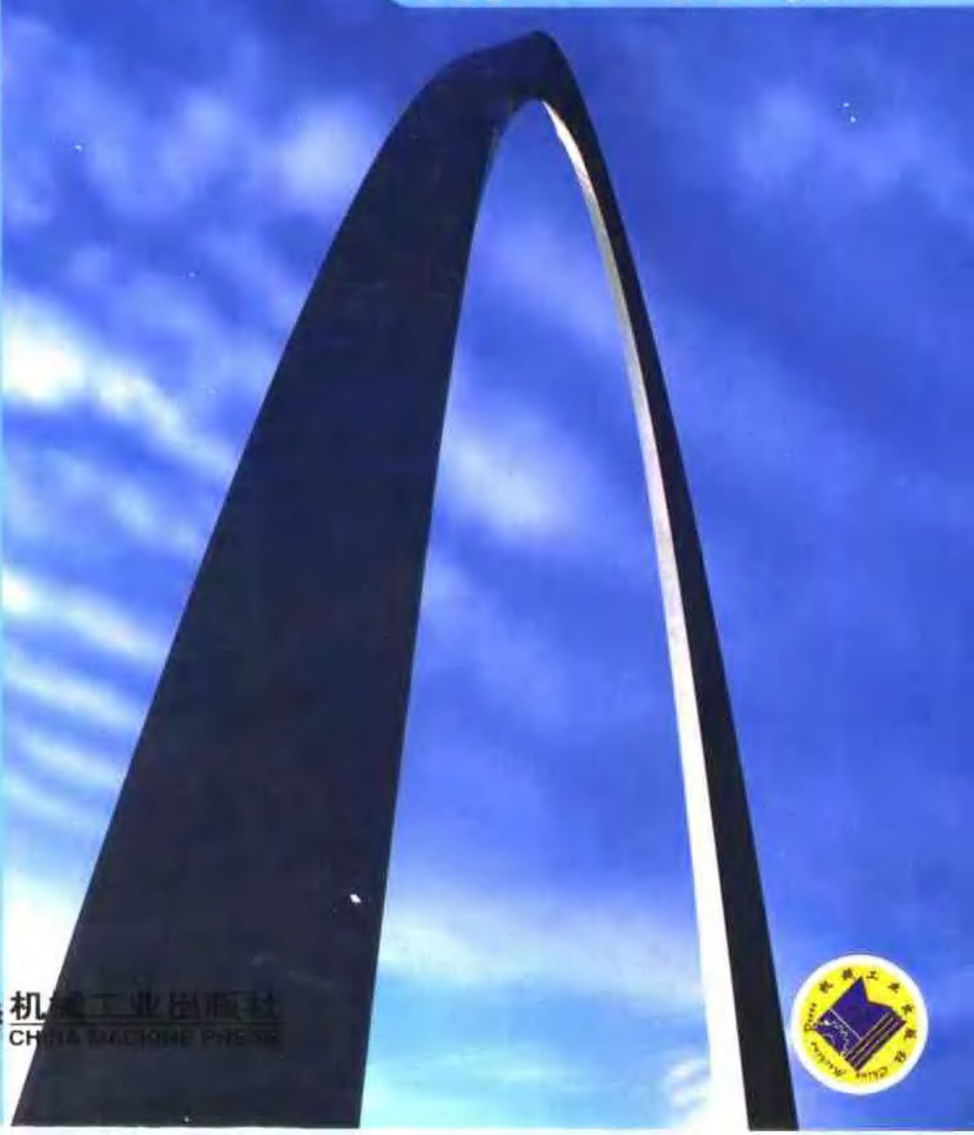
国振喜 主编

工程微分方程

解法与实例



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

工程微分方程解法与实例

国振喜　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书共分二篇七章，通俗系统地讲述工程实践和各科技领域中的常微分方程和偏微分方程的建立、基本知识、各种解法和实例。

主要内容包括：微分方程基本概念，一阶微分方程，高阶微分方程，微分方程组；偏微分方程的定义、建立方法、一阶偏微分方程，高阶偏微分方程等。

书中的数学理论部分简明扼要，条理系统，着重解法和应用，并通过大量实例阐述科学技术中解决技术问题的数学方法。

本书内容丰富，实例充实，解法巧妙、齐全，便于自学，易于掌握，应用方便，可为工程技术界和高等工科院校师生及自学者提供一本较为全面的微分方程工具书。

图书在版编目（CIP）数据

工程微分方程解法与实例/国振喜主编.—北京：机械工业出版社，2004.1

ISBN 7-111-13341-

Ⅰ.工… Ⅱ.国… Ⅲ.微分方程 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第100645号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：何文军
责任编辑：何文军 版式设计：张世琴 责任校对：程俊巧
封面设计：张 静 责任印制：闫 焱
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年1月第1版·第1次印刷
890mm×1240mm A5·22印张·650千字
0 001—3 000册
定价：48.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

序　言

近半个世纪以来，数学的形象有了很大的变化。数学已不再单纯是数学家、物理学家和力学家等人手中的神秘武器，它越来越深入到各行各业中。目前，我国如何应用数学工具解决实际问题显得过于薄弱，同时也缺乏合适的教材，以至于不少实际工作者缺乏运用数学工具以解决问题的能力，与我国经济发展极不适应。数学作为工程、自然科学、经济和商业活动中常用的理论与方法，微分方程是一个关键。

本书从实际出发，提炼出一系列求解方法，叙述简明易懂，强调应用，适用性强，是一本有利于工科学生和实际工作者掌握的教材和参考书。

王晋茹

前　　言

在许多工程实践和科技领域中，存在着各种各样的实际问题，需要工程师和科学工作者解决。但是，许多工程实际问题虽然它们所代表的实际物理意义各不相同，但却具有完全相同形式的数学规律。

例如，一个如下二阶常微分方程

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=0$$

当系数与变量代表不同意义时，它既可以表示自由振动的规律，也可以表示电路中电流自由振荡的规律。

再如，拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

它既可表示引力势所满足的规律，也可表示解电势、流体力学中的势与弹性理论中的调和势所满足的规律。

因此，微分方程是一个有着广泛应用的数学分支，它在应用科学的许多领域中，往往既是研究的起点，也是基本的工具。本书对有关的定义、定理等叙述清楚外，有的有一些简单的证明，有的则直接引用。但对于本书中的各种实际工程类型的数学表达式的深度和广度的应用，是由将近600个例题来描述的，是作为工程上应用的工具书贯穿本书始终，这对于高等教育工作者和高等院校的学生可能是需要的。

本书第一章讲述常微分方程的基本知识。第二章系统地讲述了一阶一次、一阶高次等的常微分方程的各种工程类型的数学表达式和解法，并有120个例题介绍具体应用。第三章讲述高阶常微分方程的各

种实际工程类型问题的数学表达式、解法和180个计算例题等；线性微分方程，特别是常系数线性微分方程是工程上应用得最广泛的，这里“用常数待定法求特积分”一节推导了“二阶、三阶、四阶微分方程”$\varphi(x)$为某些函数时的特积分的数学表达式，使应用起来极为方便，大大加快计算速度。第四章是讲常微分方程组，并推导获得了一些简型的计算公式，用60个例题介绍各种工程类型问题的具体应用。

第五章、第六章、第七章详细系统地讲述了工程上广泛应用的偏微分方程。并在“用常数待定法求特积分”一节推导了“二阶、三阶、四阶齐性偏微分方程”$\varphi(x,y)$为某些函数时的特积分的数学表达式，应用方便，计算快；而又在“用常系数待定法求二阶方程的特积分”一节推导了$\varphi(x,y)$为某些函数时的非齐性偏微分方程的特积分的数学表达式，同样也是应用方便，计算速度快。

本书由国振喜主编，在编写过程中，国振才、李玉芝、孙惠琴、王学志、刘凤丽、高名游、孙培生、李艳荣、于秀媛、国伟等参加了部分工作，还得到很多同志的支持和帮助，为此，向他们表示衷心感谢。

由于时间、水平所限，书中难免有不妥之处，诚恳欢迎批评指正。

国振喜

目　　录

第一篇　常微分方程

第二篇　偏微分方程

第一篇

常微分方程

第一章　微分方程基本概念

1-1　微分方程的一些实例

我们比较熟悉的是代数方程和三角方程，在这些方程中是求未知量的某几个特定值。但是，在自然科学和工程实践的各个领域中，却要研究另外一类性质完全不同但却极为重要的方程，在这类方程中作为未知量的是求整个函数，这类方程叫做函数方程。而微分方程就是其中重要一类。

下面我们从实际问题出发建立一些微分方程。

【例 1.1】 在真空中，自由落体的速度与下落的时间成正比，试求自由落体的运动规律。

【解】 设$S=S(t)$是自由落体运动的路程随时间 t 变化的函数关系式，现在它是未知函数。我们知道，自由落体的速度为$\frac{dS}{dt}$，即它是未知函数的一阶导数，由题意，它与时间 t 成正比，比例常数记作 g，则得

$$\frac{dS}{dt}=gt \tag{1.1}$$

显然，式(1.1)是出现未知函数 S 及其导数$\frac{dS}{dt}$的方程。再从式(1.1)中解出未知函数 $S(t)$便为可求得的运动规律。

【例 1.2】 放射性元素的质量随时间推移而逐渐减少，这种现象称为衰变。实验告诉我们，每一时刻铀的衰变率与该时刻铀的质量成正比，试求铀的衰变规律。

【解】 设铀在时刻 t 的质量为$m=m(t)$，则此时刻铀的衰变率为$\frac{dm}{dt}$，因此，得

$$\frac{dm}{dt}=-\lambda m \tag{1.2}$$

式中,λ 为比例常数,由实验确定;取负号是因为衰变率总是小于零的。再从式(1.2)中解出 $m(t)$就是所求得的铀的衰变规律。

【例 1.3】 已知质量为 m 的物体在力 F 作用下作直线运动,试求其运动规律。

【解】 设该物体运动的规律为 $S=S(t)$,根据牛顿第二定律,得

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=F \tag{1.3}$$

若已知作用力 F,便可从式(1.3)中求得物体的运动规律。

作用力 F 的不同可得出各种不同的运动规律 $S=S(t)$,它们可分别满足下列方程式:

当 F 为重力时,即 $F=mg$,则 $S(t)$满足如下方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=mg$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=g \tag{1.4}$$

当 F 为阻力时,设阻力与速度成正比,即 $F=-Kv=-K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$,其中 K 为比例常数,则 $S(t)$满足如下方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}+K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1.5}$$

当 F 为弹性恢复力时,通常弹性恢复力是与位移成正比,即 $F=-KS$,此时 $S(t)$满足方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}+KS=0 \tag{1.6}$$

当 F 为周期性外力时,即 $F=A\sin\omega t$,此时 $S(t)$满足方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=A\sin\omega t \tag{1.7}$$

当 F 为周期性外力及阻力的合力时,即 $F=-K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}+A\sin\omega t$,则运动规律 $S(t)$满足下面方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}+K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A\sin\omega t \tag{1.8}$$

【例 1.4】 设有一门大炮位于离地面 100m 高处,以初速度 v_0 向

水平方向发射一炮弹。若不计空气阻力,试求炮弹的弹道方程式。

【解】 选用坐标系如图 1.1 所示,弹道的参数方程式为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

并将炮弹受力情形分解为水平方向和垂直方向的分力,由牛顿第二定律,得

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg \end{cases} \tag{1.10}$$

或从式(1.10)中消去 m,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \end{cases} \tag{1.11}$$

显然,作为运动规律的参数方程式(1.9)必满足式(1.10)或式(1.11)。

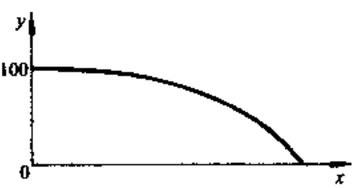


图 1.1

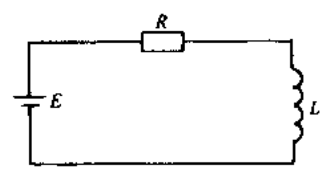


图 1.2

【例 1.5】 如图 1.2 所示为一带有自感 L 与电阻 R 的闭合电路。其中电动势 E 为常数,如果开始时回路电流为 I_0,试求时刻 t 的电流。

【解】 由克希霍夫第二定律可知:回路总电压降等于接入回路中电动势的代数和。

由电学知识可知:设时刻 t 的回路电流为 $I = I(t)$,则在电阻 R 上的电压降为 RI,在自感 L 上的电压降为 $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$,于是,得

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI=E \tag{1.12}$$

则式(1.12)即为所求 $I(t)$ 应满足的方程式。

【例 1.6】 如图 1.3 所示的闭合电路，其中 C 为电容，$E=E_0\sin\omega t$，L 为自感，R 为电阻，试求回路中电流 $I(t)$。

【解】 由电学知识可知：电容 C 上的电压降为 $\frac{q}{C}$（q 为电容 C 极板间的电荷量），则时刻 t 的电流 $I=I(t)$ 应满足方程式为

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{q}{C}=E_0\sin\omega t \tag{1.13}$$

如将式(1.13)对 t 求导数，并利用 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I(t)$，得

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=E_0\omega\cos\omega t \tag{1.14}$$

为所求电流 $I(t)$ 应满足的方程式。

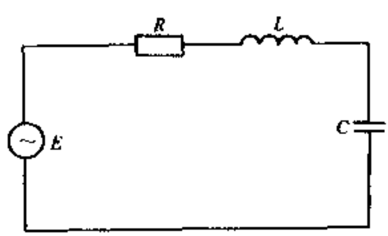


图 1.3

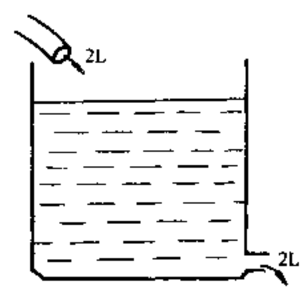


图 1.4

【例 1.7】 一容器内盛有盐水 100L，其中含盐 10kg，今用每分钟 2L 的均匀速度把净水注入容器，并以同样速度使盐水流出，如图 1.4 所示。在容器内有一搅拌器在不停地搅拌着，因此可以认为溶液的浓度在每一时刻都是均匀的，试求容器内盐量随时间变化的规律。

【解】 设任意时刻 t 的含盐量为 $Q=Q(t)$。

我们知道，在任一段时间内，容器内容盐的改变量 = 流进的盐量 − 流出的盐量

在溶液的浓度不变条件下，又有

流出的盐量 = 浓度 × 流出的溶液量

由于任意时刻 t 的含盐量为 $Q(t)$，当时间从 t 变到 $t+\mathrm{d}t$ 时，容器内的含盐量由 Q 变到 $Q+\mathrm{d}Q$，因而容器内含盐改变量为 $[Q-(Q+\mathrm{d}Q)]=-\mathrm{d}Q$；这时，从容器内流走的溶液量为 $2\mathrm{d}t$，由于 $\mathrm{d}t$ 很小，因而，在 $\mathrm{d}t$ 时间内盐水的浓度可以近似地看作不变，故 t 时刻盐水的浓度为 $\frac{Q}{100}$，所以流出的盐量为 $\frac{Q}{100}\cdot 2\mathrm{d}t$，于是有

$$-\mathrm{d}Q=\frac{Q}{100}\cdot 2\mathrm{d}t$$

或

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\frac{\mathrm{d}t}{50} \tag{1.15}$$

则式(1.15)即为所求含盐量随时间变化规律 $Q(t)$ 应满足的方程式。

【例 1.8】 求曲线族 $y=Cx^2$ 的正交轨线族方程式。

【解】 设所求的正交轨线族方程为式 $y=f(x)$。

因为 $y=f(x)$ 的切线斜率应是 $y=Cx^2$ 的切线斜率的负倒数(在相交点处)，而 $y=Cx^2$ 的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x}$$

所以所求正交轨线族中曲线的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{2y} \tag{1.16}$$

也即为所求轨线族应满足的方程式。

从上面的一些实例所列出的方程式可看出，未知量均为函数，根据物理规律(如[例 1.1]到[例 1.6])、几何关系(如[例 1.8])或单元分析法(如[例 1.7])均可得到未知函数及其导数所应满足的函数方程式，再解这类函数方程式就可得到所求的函数规律。在工程实践中，这类方程式(即称微分方程)被广泛应用，因而有专门研究的必要。

1－2 微分方程的一般概念

为了便于统一研究，我们给出微分方程的一般概念。

1. 微分方程的概念

定义 1 凡在一方程中，含有未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程。而未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程。