同解方程

赵易林编著

新知識出版社

同　解　方　程

赵易林編著

新知識出版社

一九五八年·上海

同　解　方　程

赵易林編著

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版业营业許可証出015号
大东集成联合厂印刷　新华書店上海发行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：1 1/4　字数：27,000
1958年6月第1版　1958年6月第1次印刷
印数：1—48,000本

統一書号：13076·99
定　价：(7) 0.13元

前　　言

同解方程的理論是解方程的根据，在中学代数課本中也曾提到，本書在这方面作了进一步的闡釋，以供同志們参考．

本書联系教材的地方較多．关于同解性証明中的一个錯誤例子，也是在中学教学实踐中发現的，現在放在附注里；一些結論，对于教学也有用处，字句与課本上大多数相一致；例子也环繞着課本提出．本書的对象，主要是中学数学教师同志，但也兼顧到青年学生．內容方面过深的极少，即使有，也是教师或进修同志所必須掌握的．

熊武揚同志热情地为我搜集材料，决不能忘記他的帮助．

最后，万望讀者們多多提出严正的、宝貴的意見．

赵易林于1958.3.8．

目　　录

一　从代数式到方程……………………………………………… 1
　　§1．关于代数式……………………………………………… 1
　　§2．关于方程………………………………………………… 5
二　同解方程的初步概念……………………………………………10
　　§1．同解方程的定义…………………………………………10
　　§2．一元方程的一般形式……………………………………12
三　方程变换及其性质………………………………………………16
　　§1．加减移项…………………………………………………16
　　§2．乘除移项…………………………………………………20
四　同解方程的应用…………………………………………………31
　　§1．怎样解方程………………………………………………31
　　§2．增根与减根………………………………………………35

一　从代数式到方程

§1. 关于代数式

代数式　誰都知道，在代数里，字母必定表示数；一般地說，可以表示任意的数．但我們要給字母所表示的数以两种限制：第一种限制是数的范圍，第二种限制則决定于对象．

关于数的范圍，在我們这本小册子里只到有理数为止，① 因此本書里所用的字母，只表示有理数．算术里所討論的数都是正整数、正分数和数零，由于需要，在代数里引进了負整数和負分数，就构成了有理数的全体(称为有理数集)．零既不是正数也不是負数，因此它既不属于正整数(即自然数)、正分数，也不属于負整数、負分数．

字母可以表示对象的数量部分．例如：某学校有 n 个学生；产量增加了 k 件；这本書的价值是 a 元等等．在这些例子中，字母 n、k 和 a 都要受到对象的限制：n 表示学生数，只能是自然数；k 表示增加的件数，由于增加和減少在意义上是相对的，所以 k 可以是正整数，可以是負整数，也可以是零；a 表示有理数，書的价値如果是 2 角 5 分，以元为单位，那末 $a=0.25$．

【定义】用有限个运算符号② 把字母或数字所表示的数联結起来所得到的，叫做**代数式**；单个的字母或数字，也叫做代数式．

代数式的例子有：n, 0.2, $3+2-4$, vt, $mx+n$, $a-(b+c)$, $(x+y+z)^2$, $a\times p\%$, x^2+3x+2, $\dfrac{1+t+t^2}{1+t-t^2}$等等．此外象$\sqrt{a+b}$

也是代数式，但是不在本書的討論范圍之內.

本書主要討論仅含有一种字母的代数式.

$\underbrace{a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{个}}$ 和 $1+q+q^2+\cdots\cdots+q^{n-1}$ 也是代数式，因为"＋"号是有限个的，这里 n 表示字母的个数，因此是自然数.

$1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots$ 不管 q 的絕对值的大小怎样都不能算是代数式，因为在这里的运算符号并不是为数有限的. 用无限个运算符号把字母或数字联結起来，与代数式的定义不相符合.

要注意 $S=\frac{1}{2}bh$ 不是一个代数式，同样的，$3+2-4=1$ 也不是. 它們是用等号联結起来的两个代数式所組成的，是表示两个代数式間的关系.

【定义】如果一个代数式只含有加、减、乘（包括乘方）、除这四种运算符号，这个代数式就叫做**有理式**.

例如：n，0.2，$-3x^2y$，$\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$，$a(b+c)$，$3p:2q$，$\frac{a}{x}$，$\frac{x+\frac{y}{z}}{2}$，$\frac{1}{r}$，$\frac{1-x-y-z}{x^2+y^2+z^2}$ 等等都是有理式.

【定义】把不含有字母的式子做除数的有理式，叫做有理整式，簡称**整式**；把含有字母的式子做除式的有理式，叫做有理分式，簡称**分式**.

剛才所举的十个有理式的例子中，前面五个是整式，后面五个是分式.（n 可以理解成 $\frac{n}{1}$，就是把不含字母的式子做除数的有理式，所以算是整式.）

2^x 是不是有理式呢？不是. 在一个有理式里，数字与字母必須通过加、减、乘、除以及以自然数为指数的乘方等运算来联

系的。

現在根据上面所提到的，把代数式初步地分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\\text{非整式}\end{cases}\\\text{非有理式}\end{cases}$$

練习： 在下列代数式中哪些是有理整式？为什么？

(1) $k^2+\sqrt{k^2}+1$； (2) $\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+a-1$；

(3) $\frac{m}{0.01}$； (4) $\frac{p}{3}+\frac{3}{p}$；

(5) 2； (6) $1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots$.

允許值集 在实际应用中，往往有需要把数值代替代数式里的各个字母，再进行运算。

【定义】**代数式的值**，就是把数值③代替代数式里的字母，并且按照指定的順序进行指定的运算的結果.

代数式的值应該由代数式里字母所取的数值来确定. 代数式里的同一个字母，不能同时取几个不同的数值，而且所取的数值要避免使代数式无意义. 例如，在正数的范圍里，代数式 $x-5$ 当 $x\leqslant 5$ 的时候，就沒有值；在自然数的范圍里，如果 a 不能被 4 整除，代数式 $\frac{3a}{4}$ 也是沒有值的.

在算术里，我們早已知道数零不能作为除数. 这个規定，在代数里也是同样适用的.

当有理数 $a\neq 0$ 的时候，a 除以零的商不存在. 說明如下：假定存在着 b，使 $a\div 0=b$，并且 b 也是一个有理数. 根据除法定义得 $b\cdot 0=a$；又因 $b\cdot 0=0$，那末 $a=0$. 但原設 $a\neq 0$，发生了矛盾，可知 b 不存在.

又当$a=0$的时候，a除以零的商不是唯一的.假定$0\div 0=x$，得 $x\cdot 0=0$. 但任何有理数乘以零的积为零，所以 x 的值（也就是 $0\div 0$ 的值)不是唯一的.

总的看来，用零作除数，所得的商不符合存在唯一性.因此零当做除数是无意义的.

这样，在代数式$\frac{1}{m-3}$里，m不能是 3，就因为用零当做除数的除法是没有意义的.

【定义】能使代数式的值有意义的数值，被代数式里的字母所取，叫做字母的**允許值**.这样的允許值的全体，就叫做該代数式中字母的**允許值集**(有的書里称为定义域).

所以，允許值集，或者說，允許值的集合，便是代数式里字母的允許值的全体.

下面举些仅含一种字母的代数式的例子.

在有理数集内④，經过檢驗以后，可以断定代数式$\frac{1}{x-3}$里 x 的允許值集是除去 3 以外的有理数全体；代数式$\frac{4}{x}$里 x 的允許值集是除去零以外的有理数全体；代数式$\frac{2}{x^2+1}$里 x 的允許值集就是有理数集；代数式$\frac{2}{x^2-1}$里 x 的允許值集又是除去 1 和 -1 以外的有理数全体；至于代数式$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}+\cdots\cdots+\frac{n}{x+n}$中字母 x 的允許值集，就应該是除去-1、-2、-3、……以至 $-n$ 以外的有理数全体.

关于含有两个以上字母的代数式，它所含字母的允許値集是由一群两个以上的“数值組”所构成的．本書只討論关于仅含有一种字母代数式的字母的允許値集．

値得特别注意的是：在有理数的范圍内，仅含有一种字母的整式中，字母的允許値都是有理数集．

練习： 在有理数集内，指出下列各式中字母的允許値集（經过檢驗以后可以断定）：

(1) x^2+x+2； (2) $\dfrac{3x}{x}$； (3) $\dfrac{1}{x^2-x-2}$；

(4) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$； (5) $\dfrac{2x}{x^2-2}$； (6) $x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$．

§2. 关 于 方 程

等式和恒等式 有时两个代数式具有这样的关系，需要用等号联結起来才能表示的，象前面看到过的$S=\dfrac{1}{2}bh$ 和 $3+2-4=1$．

【定义】用等号联結两个代数式所成的式子叫做代数等式，簡称**等式**．

例如，$S=\dfrac{1}{2}bh$，$a+5=5a$，$x^2+2x+1=(x+1)^2$，$6=5$，⑤ $2+3-4=1$，$z+1=z+2$ 等都是等式．

連等式、近似等式以及算术里带余数的等式，都不能算是等式．連等式可看作等式的扩展，它是好几个等式合起来而成的．

代数式里面含有字母或数字，因此等式里面也含有字母或数字．在等式 $5+x=5x$ 中，字母 x 的値是需要我們去确定的．

【定义】在等式里，字母的値是需要我們去确定的，这样的

字母所表示的数叫做**未知数**.

字母有时可作为未知数，因此我們把等式分类，应該有下面的几种：

$$
\text{等式}\left\{\begin{array}{l}
\text{Ⅰ.含有字母的}\left\{\begin{array}{l}
\text{(一)字母作为未知数的}\left\{\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right.\\[2ex]
\text{(二)字母不作为未知数的}\left\{\begin{array}{l}(1')\\(2')\\(3')\end{array}\right.
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{Ⅱ.不含字母的}\left\{\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

〔注〕上表中（1）表示时时成立的；（2）表示有时成立的；（3）表示不成立的.（1′）、（2′）、（3′）同此.

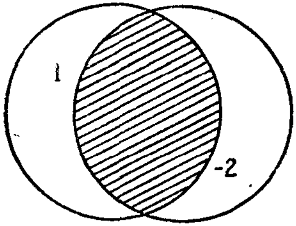
第Ⅰ类的例子很多，也很容易举出；第Ⅱ类（1）、（3）的例子前面也有过；惟有Ⅱ（2）的例子較难找出，象“4·13=100在6进位时成立”也許可以算是一个.

下面我們要着重叙述較有用的等式Ⅰ（一）（1）、（二）（1′）和Ⅱ（1）.（其他等式本書較少用到.）

【定义】对字母所有允許值都是成立的等式，以及不含字母的正确的等式，都叫做**恒等式**.⑥

这样，上表中的Ⅰ（一）（1）、（二）（1′）和Ⅱ（1）就都該是恒等式了.象以字母 x 不作为未知数的等式 $x^2+2x+1=(x+1)^2$ 便是属于（二）（1′）这一类的.

关于允許值的問題，我們采取等式两边的字母都允許取的允許值.例如：$\dfrac{a^2+a-2}{a^2+3a+2}=\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$ 这个等式中，左边 a 的允許值是除去 -1 和 -2 以外的所有有理数；右边 a 的允許值是除去 ±1 以外的所有有理数（图1）.我們就采取除去 ±1 和 -2



（图 1）

以外的所有有理数，对这些数，等式都可以成立．因此，它是一个恒等式．

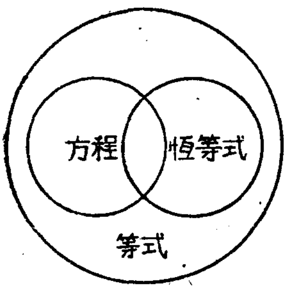
换句話說，等式两边代数式里字母的允許值集，采取每边独立时的允許值集的公共部分．对于代数式$\dfrac{a^2+a-2}{a^2+3a+2}$中字母的允許值集，是除去$-1$和$-2$以外的所有有理数所成的集合；而对于代数式$\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$中字母的允許值集，又是除去$\pm1$以外的所有有理数所成的集合．由此看来，关于該等式的允許值集，应該是除去±1和-2以外的有理数全体．

在恒等式的定义里，沒有指明字母必須作为未知数或不作为未知数，这一点是要加以注意的．

方程　接着下方程的定义．

【定义】含有未知数的等式，叫做**方程**．

这是一个最概括的定义，比早期的定义⑦要优越得多．



（图 2）

由于我們下恒等式的定义没有指明字母作为未知数或不作为未知数，所以Ⅰ(二)(1′)是方程同时又是恒等式．方程和恒等式的关系如图 2 所示．

含有一个（即一种）未知数的方程，叫做一元方程；含有两个未知数的方程，叫做二元方程；……．一般地，含有 n 个未知数的方程，叫做 **n 元方程**；含有三个以上的未知数的方程，統称

为多元方程。本書主要討論一元方程.

【定义】使方程左右两边的値相等的未知数的値，叫做方程的解.一元方程的一个解，也叫做它的一个根。

例如，方程 $x+2=5$ 有一个根，就是3；方程 $x^2+2x+1=(x+1)^2$ 有无穷个根，因为不論用什么数代替其中的 x，它的左右两边的値都相等；方程 $x+3=x+5$ 沒有根，因为不論用什么数代替其中的 x，它的左右两边的値都不相等.方程 $x^2+10x=29$ 是否有根，要看在怎样的数集內.在有理数集內，它是沒有根的（在实数集內，它有两个根）.

前面的表內(一)(1)是指有无穷个根的方程；(一)(2)是指有有限个根的方程；而(一)(3)是指沒有根的方程.

求方程的根，或者确定方程有沒有根的过程，叫做解方程.說方程有解、有无穷个解或无解的意思，和說方程有根、有无穷个根或无根的意思是一样的.

至于求根的过程是怎样的，解方程是根据什么原理来进行的，正是本書所要探究的問題.

練习：（1）方程 $x^2-4x+4=(x-2)^2$ 是恒等式嗎？

（2）$\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{x}{x^2-3x}$，关于这个等式中字母 x 的允許値集是怎样的？为什么？

*　　　*　　　*

① 在高中代数里还把数的范圍扩展到实数，后来又扩展到复数.自然数形成后，数的范圍一共扩大了五次：第一次引进零（零不是自然数），成为“扩大自然数列的数”；第二次引进分数（限于正分数，包括正的小数，因为小数就是分母为10的方冪的分数）；第三次在原有基础上引进負整数和負分数，便成为有理数；第四次和第五次就是成为上面所提到的实数和复数，这是引进了无理数和虛数以后才形成的.（見伯拉基斯“代数教学法”，更詳.）

② 初中代数里的代数式定义，不明确地指出运算符号的个数必須有限，只提到运算的种类和順序是已被指明了的．这当然是由于教学上的可接受性原則，因为对初中学生无法引入超越式等等概念．

③ 不一定把数值代入，也可以把字母代入．例如代数式$\frac{x-y}{2}$，x 用 $a+b$ 代入，y 用 $a-b$ 代入，得到代数式的值是 b．

④ 在复数的范圍內，代数式$\frac{2}{x^2+1}$ 中字母的允許值集是除去 i 和 $-i$ 以外的复数全体所构成的；在整数范圍內，代数式$\frac{4}{x}$ 中字母的允許值集是 ±1、±2、±4 这六个数的全体．

⑤ 我們对于 $6=5$ 这样的等式，完全用不到奇怪．虽然它是不能成立的，却完全符合于等式的定义，因为 6 和 5 都是代数式．为了全面，我們不得不把它列入在內．这样的例子在初中代数課本里已經有过，象不等式 $4<3$ 可在下册附录里面見到，附录是作为补充教材附在書末的．不过这一类例子，我們相信以后在課本里会取消的，因为在教学法里說来，我們不应該把完全不成立的东西教給初中同学們．但对我們来說，却有必要．

⑥ 过去教学文献中关于恒等式的定义曾忽略了不含字母、正确的等式而使恒等式与算术里的正确等式对立起来，是不妥当的．較近的教学文献中也有把“未知数所有值都适合的方程”叫作恒等式的，也已遭到异議，关于这一点，在下一个注釋里可以看到．較严格的定义应該考慮到式中字母的允許值集．对表达式 $f(x,y,\cdots\cdots)$和 $g(x,y,\cdots\cdots)$ 中字母的允許值集的公共部分中的变数所有数值組都成立的等式 $f(x,y,\cdots\cdots)=g(x,y,\cdots\cdots)$叫做恒等式；完全不含变数的正确的等式，是 $f(x,y,\cdots\cdots)=g(x,y,\cdots\cdots)$的特例，也叫做恒等式．

⑦ 早期对于方程的定义一般認为：“一个等式，倘对其两边所含字母，不是所有值，只是某些值才成立的，叫做方程．”这样的認識应該受到批評．首先，它排除了有无穷多个解和无解的方程；其次，定义缺乏方便性——指判定过程；再次，将来对于参数方程会产生混淆的地方．把“未知数所有值都适合的方程”叫做恒等式，排除了Ⅰ(一)(1)以及Ⅱ(1)，因此不全面．同时，解方程的变换也不同于恒等变换．

二　同解方程的初步概念

§1. 同解方程的定义

根的比較　經过試驗，知道两个方程 $x^2+6=5x$ 与 $\frac{x}{2}(5-x)=3$ 有相同的根：2 与 3．

我們必須注意到“經过試驗”这四个字．解方程在目前只得暫时用古老的試驗方法来进行，因为我們还不曾建立起整个解方程的理論．这个試驗方法在紀元前 18 到 19 世紀埃及的紙草卷里早已有了記載：例如，为了解决“求与它的七分之一一起組成十九的一个数”的問題．以今天的方程表示，是 $x+\frac{x}{7}=19$．那时推荐用 $x=7$ 来試驗，代入以后，得到 $7+1=8$，想要得到 19，还須把試驗的数 7 扩大 $\frac{19}{8}$ 倍，便得到 $x=7\cdot\frac{19}{8}=16\frac{5}{8}$．

任何根是有理数的方程都可以通过試驗方法即屢試的方法求得它的根，不过这种方法实在是很費时而又很費力的，等我們建立了解方程的全部理論以后，就可以摒絕不用了．

方程 $x^2+6=5x$ 与方程 $\frac{x}{2}(5-x)=3$ 有相同的根；方程 $x^2+3x+2=0$ 与方程 $x^2-3x+2=0$ 的根却完全两样：前者的根是 -1 与 -2，后者的根是 1 与 2．可見两个方程的根可以相互比較．比較两个方程的根，得到下面的几种情形：

(1) 所有甲方程的根就是乙方程的根，所有乙方程的根也是甲方程的根；

(2) 所有甲方程的根就是乙方程的根，但并非所有乙方程

的根是甲方程的根；

（3）其他情形。

所有乙方程的根就是甲方程的根，但并非所有甲方程的根是乙方程的根，这种情形当然也应当归入第(2)种，因为我們可以把两个方程中的任一个当做甲方程，把另一个当做乙方程。举例如下：

甲方程所有的根	乙方程所有的根	甲、乙两方程的关系
3，3，3，2，2	2，2，3，3，3	属于第(1)种
3，2，1，1，—1，—1	2，1，—1，—1	属于第(2)种
½，—1，—1，—1	½，—1，2，3	属于第(2)种
3，3，3，2，2	2，2，3，3	属于第(1)种
2，0，—1	2，0，—2	属于第(3)种
4，1，—1	0，3	属于第(3)种
3，—1，2	2，3，—1	属于第(1)种
2	2，2，2，2	属于第(1)种
无根	无根	属于第(1)种①
无根	—3	属于第(2)种
0，1	无根	属于第(2)种

定义 根据根的比較，我們来下同解方程(或等效方程)的定义。

【定义】甲乙两方程的根互相比較，而合乎上述第(1)种情形的，那末这两个方程就互为**同解方程**；也可以說，甲乙两方程同解；又可以說，甲方程与乙方程同解，或者乙方程与甲方程同解。

可見同解方程一語至少是对两个方程而言的。

例如，方程 $x^2+6=5x$ 与方程 $\frac{x}{2}(5-x)=3$ 互为同解方程，因为前者所有的根（2与3）就是后者的根；后者所有的根（2与

3）也是前者的根．

【定义】甲乙两方程的根互相比較，而合乎上述第(2)种情形的，那末我們就称甲方程**蘊含于**乙方程，或称乙方程**蘊含**甲方程．(課本里称为一个方程是另一个方程的結果，但为了后面推証起来方便起見，我們采用“蘊含”两字．)

例如，方程 $x^2+6=5x$ 的根是 2 与 3，方程 $x-1=2x-3$ 的根經过試驗可知是 2，那末前一个方程蘊含后一个方程，后一个蘊含于前一个．

練习： 証明下列命题：

(1) 甲方程与乙方程同解，乙方程又与丙方程同解，則甲方程与丙方程同解．

(2) 甲方程蘊含乙方程，乙方程又蘊含丙方程，則甲、乙方程蘊含丙方程．

§2．一元方程的一般形式

代数式的記号 关于代数式，还有代数式的次数和代数式的記号沒有提到．

在前一章里曾声明：整式还可以分类．从整式又可以分出单項式、多項式及其他．

【定义】沒有加、减法运算的整式叫做**单項式**②；若干个单項式的代数和叫做**多項式**(每个单項式叫做該多項式的項)．

多項式包括二項式、三項式、……等等．

例如，$-3x^2y$，$\frac{3}{4}x$ 等都是单項式；单独一个数字或者一个字母象 n，5 等也都是单項式．$4a-3$，ax^2+bx+c，$\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ 等是多項式；第一个是二項式，第二个是三項