高等院校适用教材

高等数学学习指导

张润琦　毛京中　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校适用教材

高等数学学习指导

张润琦　毛京中　编

机械工业出版社

本书是成人高等学校《高等数学》的学习指导书，是根据教育部1998年颁布的《全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求》编写的.

本书的主要内容是一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程和无穷级数. 在每一章中，明确了教学基本要求，对重点内容作了系统扼要的叙述，指出了学习中应注意的问题，并对典型例题作了详尽的分析解答.

本书从成人教育的特点和现状出发，根据近年来远程教育的教学经验，特别强调基础知识及相应训练. 在附录中给出6份近年来某远程教育学院实用的高等数学期末试卷.

本书也可以作为专升本复习考试的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/张润琦，毛京中编．—北京：机械工业出版社，2003.5

高等院校适用教材

ISBN 7-111-11966-5

Ⅰ.高. Ⅱ.①张... ②毛... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第028600号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：郑 丹 版式设计：霍永明 责任校对：李秋荣

封面设计：陈 沛 责任印制：路 琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003年5月第1版第1次印刷

1000mm×1400mm B5·10.875印张·423千字

定价：27.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

前 言

本书编写的依据是教育部1998年颁布的《全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求》.

高等数学是成人高等教育各专业必修的重要基础理论课，本书是帮助学生掌握该课程内容的学习辅导书. 在本书的各章中明确了教学基本要求，对重点内容作了系统扼要的叙述，并对典型例题作了详尽的分析解答。这有助于学员整体地理解各章的内容，明了解题的思路和方法，全面深入地理解高等数学的基本概念、理论和方法，更有利于培养分析问题、解决问题的能力.

根据多年来成人高等数学教学的经验，针对当前成人教育的实际状况，本书特别强调对高等数学基本内容的学习和相关训练. 在本书的附录中给出了6份试卷，这是近年来现代远程教育学院的实用试卷. 卷中内容反映了对学员的基本要求. 认真学习试卷，分析思考这些试卷所体现的对于重点内容的要求，对期末复习和学好高等数学会有较大帮助.

编　者

2003年1月于北京理工大学

目　录

第一章 函 数

函数是高等数学的主要研究对象，初等函数是本课程中最常见的函数. 因此，本章内容是基础知识.

一、教学基本要求

1. 理解一元函数的概念及函数的简单性态.
2. 掌握五类基本初等函数及它们的图形.
3. 理解复合函数概念.
4. 了解初等函数，会把初等函数分解为基本初等函数的四则运算与复合.
5. 了解分段函数.
6. 会求函数的反函数.

二、重点内容叙述及应注意的问题

1. 函数概念

设 x 和 y 是两个变量，X 是实数集 R 的子集，如果对任意 $x\in X$，变量 y 按照一定的规则有一个确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 称 X 为该函数的定义域.

函数的两个要素是对应规则和定义域. 只有二者都相同的函数才是相同的函数.

函数是高等数学讨论的对象. 主要讨论初等函数，也涉及非初等函数. 常用分段函数研究一些重要概念. 对中学学习过的五类基本初等函数要十分熟悉，特别要具备由函数图像观察函数某些特性的能力.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性

设函数的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in X$，都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$在 X 上有界. 否则，称函数 $f(x)$在 X 上无界.

要注意函数有界与函数有最大值和最小值之间的区别和联系. 函数在 X 上有

最大值和最小值，则函数在 X 上有界. 反之不一定成立.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义（I 是函数的定义域或者是定义域的一部分）. 如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，皆有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)[f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加（单调减少）.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 是关于原点对称的. 如果对于任意的 $x\in D$，皆有

$$f(-x)=f(x)[f(-x)=-f(x)]$$

则称 $f(x)$为偶函数（奇函数）.

(4) 周期性

对函数 $y=f(x)$，如果存在正常数 T，使得对于定义域内的任何 x 皆有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$为周期函数，称 T 为 $f(x)$的周期.

函数的有界性是中学里未学过的性质，要通过较多的练习才能真正理解. 其他三个性质，要和函数的图像联系在一起，在高等数学的运算中灵活运用.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u\in U$，而 $u=\varphi(x)$，$x\in D$. 若 $\varphi(x)$的值域与 U 的交集非空，则 y 通过 u 的联系而成为 x 的函数 $y=f(\varphi(x))$，称为由 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，称 u 为中间变量.

定义中要求 $\varphi(x)$的值域与 U 的交集非空，即要求 $y=f(\varphi(x))$的定义域非空. 这只要存在 $\varphi(x)$的值属于 $f(u)$的定义域 U.

今后常用的是把初等函数分解为基本初等函数的四则运算、复合.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的函数，统称为初等函数.

分段函数的对应规则不能用一个公式表达. 它一般不是初等函数，只有绝对值函数例外，因为

$$|x|=\sqrt{x^2}$$

可看成幂函数的复合. 分段函数以后常见到.

按实际问题的要求建立函数关系式是个重要问题. 以后用高等数学方法解决实际问题时，第一步就要建立相应的函数关系式. 因此，应通过较多的练习，逐步掌握建立函数关系的基本方法.

本章内容多在中学学过，但这些内容是基础，要熟练掌握，不可忽视.

三、典型例题

例 1　函数 $y=\arcsin\frac{x}{2}$ 的定义域为________；它的值域为________.

解　由 $\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$，得 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 即定义域为 $[-2,2]$.

$y=\arcsin\frac{x}{2}$ 的值域是主值区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

例 2　函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的值域为________.

解　反三角函数的值域为主值区间. 所以 $y=\operatorname{arccot}x$ 的值域为 $(0,\pi)$.

填空题

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 4 & 3<x\leqslant 6\end{cases}$

则 $f(2x+1)$ 的定义域为________.

解　由 $f(2x+1)=\begin{cases}2 & 0\leqslant 2x+1\leqslant 3\\ 4 & 3<2x+1\leqslant 6\end{cases}$

$$=\begin{cases}2 & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ 4 & 1<x\leqslant\frac{5}{2}\end{cases}$$

知定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$.

若仅求定义域可以直接解不等式.

由　$0\leqslant 2x+1\leqslant 6$

得　$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$.

例 4　函数 $f(x)=\cos 2x+\tan\frac{x}{3}$ 的周期为________.

解　由 $\cos 2x$ 的周期为 π，$\tan\frac{x}{3}$ 的周期为 3π 知 $f(x)$ 的周期为 3π.

例 5　函数 $f(x)=\sin\frac{x}{5}+\cot\frac{x}{3}$ 的周期为________.

解　由 $\sin\frac{x}{5}$ 的周期为 10π，$\cot\frac{x}{3}$ 的周期为 3π 知 $f(x)$ 的周期为 30π（即 10π 和 3π 的最小公倍数）.

例 6　设　$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2 & x\geqslant 0\end{cases}$

求　$f(x+1)-f(x)$

解　$f(x+1)=\begin{cases}1 & x+1<0\\ 2 & x+1\geqslant 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}1 & x<-1\\ 2 & x\geqslant -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & x<-1\\ 2 & -1\leqslant x<0\\ 2 & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<-1\\ 1 & -1\leqslant x<0\\ 2 & x\geqslant 0\end{cases}$$

得　$f(x+1)-f(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & x\geqslant 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0 & x<-1 \text{ 或 } x\geqslant 0\\ 1 & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

例 7　函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg(x-1)$的定义域是________.

解　$f(x)$由两项构成，先求每项的定义域，再求其交集.

$$D_1=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}\quad D_2=\{x\mid x>1\}$$

则 $f(x)$的定义域为 $D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$.

也可以记为区间的形式$(1,2]$.

填空题大多是较简单的计算题，但是计算时要十分认真仔细，才能保证计算结果准确.

选择题

例 8　函数 $f(x)=2x^2+\mathrm{e}^{x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 2$，是　　(　　)

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 单调增函数　　(D) 非单调函数

解　函数虽然满足 $f(-x)=f(x)$，但是区间$[-1,2]$关于原点不对称，因此(A)和(B)都不正确.

又当 $x_1<x_2<0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x)$单调减.

而当 $0<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x)$单调增.

由上知(C)不正确，只有(D)正确. 故选(D).

解此例的方法称为排除法. 先用所学知识容易地排除错误选项，把三个选项都排除了，剩下的一个就是要选的项. 解此题时，实际上只要说明当$-1\leqslant x<0$ 时，

$f(x)$单调减，就排除了选项(C).

解选择题时，还可以用直接法、验证法和图像法．一般是根据具体情况选用相应的解法，或是几种解法结合使用.

例 9　函数的定义域关于原点对称是函数成为奇函数的（　　）

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

解　可用奇函数定义直接判断（即“直接法”）应选（B）.

解答题

例 10　证明 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$在$(-\infty,+\infty)$是奇函数.

证　$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

由奇函数定义，知 $f(x)$为奇函数.

此例为简单证明题，作此题时只要对函数概念真正理解了，按奇函数定义，运用代数式变形，就易于证得结论．关于偶函数、周期函数的证明题与此类似.

例 11　函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，是有界函数吗？说明理由.

解　$y=\dfrac{x}{1+x^2}$是有界函数.

由$(1-|x|)^2\geqslant 0$，知 $1+x^2\geqslant 2|x|$，故$\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$

得$\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$

用函数有界的定义，取 $M=\dfrac{1}{2}$，则$|y|\leqslant M$

即函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$有界.

函数的有界性是个新概念，真正理解它要通过较多的练习和深入的思考．函数 $f(x)$的有界性与要讨论的区间 I 有关．例如 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty]$ 是无界的，而它在 $(0,1)$ 内是有界的，可取 $M=1$．函数的有界性与函数有最大值和最小值是不同的．例如 $y=x^2$ 在 $(0,1)$ 内有界，但它在 $(0,1)$ 内没有最大值，也没有最小值．函数的最大值或最小值是惟一的，而函数的界不惟一．例如 $y=x^2$ 在 $(0,1)$ 内的界可取 $M_1=1$，也可取 $M_2=2$．其实，所有大于 1 的实数都可以是 $y=x^2$ 在 $(0,1)$ 内的界.

一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的单调函数也可以有界．例如函数 $y=\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$，是有界的，因为

$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $M=\frac{\pi}{2}$是它的界.

例 12 把函数 $y=\sqrt{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}$分解为基本初等函数的四则运算和复合.

解 令 $y=\sqrt{u}$，为幂函数.

$u=\lg v$，为对数函数.

$v=1+\frac{1}{x}$，为幂函数与常数的和. 此三个函数复合成

$y=\sqrt{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}$，其中 v，u 为中间变量.

把一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算及复合，是今后经常遇到的问题，十分重要，要反复练习. 特别是函数的复合，尤其重要. 这也是今后学习中的难点之一.

例 13 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，求 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$.

解 $f(u)=u^2$，令 $u=\varphi(x)$，则 $f(\varphi(x))=[\varphi(x)]^2=(\lg x)^2=\lg^2 x$

$\varphi(v)=\lg v$，令 $v=f(x)$

则 $\varphi(f(x))=\lg[f(x)]=\lg(x^2)$

例 14 设 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x<10\\ 5 & x>10\end{cases}$

证明 $g(x)=2f(x-10)+3$.

证 把右端写成分段函数的形式.

由 $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

得 $f(x-10)=\begin{cases}1 & x>10\\ -1 & x<10\end{cases}$

故 $2f(x-10)+3=\begin{cases}5 & x>10\\ 1 & x<10\end{cases}=g(x)$

公式得证.

例 15 函数 $y=\begin{cases}2-x & x\leqslant 1\\ x & x>1\end{cases}$能用一个解析式表示吗？说明理由.

解 能用一个解析式表示，即函数为一个初等函数. 若一个分段函数是初等函数，它一定是与一个绝对值函数相关联，因此应设法把它和绝对值函数联系起来.

由 $y-1=\begin{cases}1-x & x\leqslant 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$

$=|x-1|=\sqrt{(x-1)^2}$

得　$y=1+\sqrt{(x-1)^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

例 16　把半径为 R 的圆形铁片自中心处剪去一扇形后，卷成一无底圆锥. 试将这圆锥的容积 V 表示为未剪去部分中心角 α 的函数，并指出其定义区间.

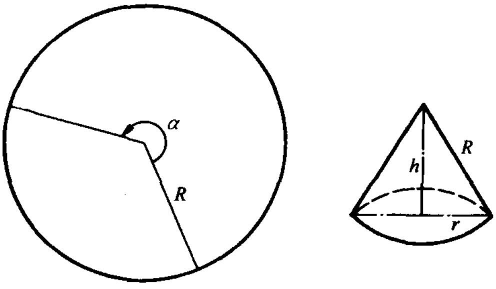

图　1-1

解　如图 1-1 所示，圆锥底面半径记为 r，其高记为 h，圆锥底面周长等于中心角 α 所对的弧长. 圆锥的母线长等于圆片的半径 R，由此得

$$2\pi r=R\alpha,\ h=\sqrt{R^2-r^2}$$

$$故容积\ V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-r^2}$$

$$=\frac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2},\ 其中\quad 0<\alpha<2\pi$$

习　题　一

一、填空题

1. 函数 $y=\ln(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})$ 的定义域是________.

2. 函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是__________.

3. 设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，则 $f(x)=$__________.

二、选择题

4. 下列函数中不是周期函数的是(　　).

(A) $|\sin x|$　　(B) $x\tan x$　　(C) $2\cos(\pi x+1)$　　(D) $\cos^2 x$

5. 设 $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$，下列各式中正确的是(　　).

(A) $f(x)=-f(-x)$　　(B) $f(x)=f(-x)$

(C) $f(x+1)=-f(x-1)$　　(D) $f(x)=f(x+1)$

三、计算题

6. 设 $\varphi(x)=\sqrt[n]{1-x^n}$，$x>0$，求 $\varphi[\varphi(x)]$，并联 $\varphi(x)$ 的反函数.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f[f(x)]$.

四、证明题

8. 若函数 $y=f(x)$ 以 T 为周期，试证函数 $y=f(ax)(a>0)$ 以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期.

9. 设 $\varphi(t)=\lg\dfrac{1-t}{1+t}$，证明 $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

五、应用题

10. 设有一圆锥形容器，其底半径为 R（单位为 cm），高为 H（单位为 cm），现在向容器内注水. 试把容器中的水的体积 V 表示成水面高 h 的函数（见图 1-2）.

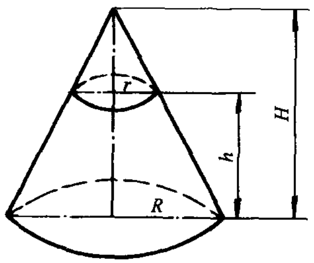

图 1-2

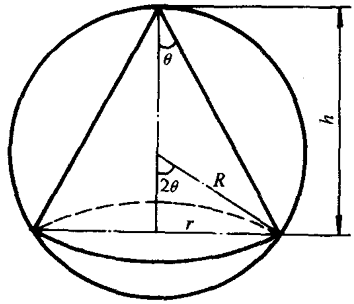

图 1-3

11. 一个顶角为 2θ 的正圆锥内接于半径为 R 的球，如图 1-3 所示，试把圆锥的体积表示为 θ 的函数.

第二章　极限与连续

高等数学的研究对象是函数，所用的基本方法是极限方法．微积分的重要概念都是通过极限定义的，重要的运算公式也是用极限导出的．因此极限概念和理论成为高等数学的基石．连续函数是微积分的主要研究对象．它也是用极限定义的，它是一个重要概念．

一、教学基本要求

1）了解极限概念及其基本性质．

2）掌握极限的四则运算法则．

3）了解两个极限存在准则（单调有界准则和夹逼准则），掌握两个重要极限．

4）了解无穷小、无穷大的概念及性质，会用等价无穷小代换求极限．

5）理解函数的连续性概念，会判断间断点的类型．

6）了解闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），会用介值定理证明方程的根的存在性．

二、重点内容叙述

1．函数的极限概念

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

几何解释：要使曲线$y=f(x)$进入带形区域$A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$内，只要$x$落入点$a$的$\delta$去心邻域中．

类似定义$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$. 极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等．

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

几何解释：要使曲线$y=f(x)$进入带形区域$A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$内，只要$x$落入原点的$X$邻域外．

类似定义$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

2. 极限的性质

(1) 惟一性：若 $\lim f(x)$存在，则极限惟一.

(2) 局部有界性：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $f(x)$在 a 点的某去心邻域内有界.

(3) 局部保号性：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，且 $A>0$，则在点 a 的某邻域内，有 $f(x)>0$.（$A<0$ 时，结论类似）

(4) 夹逼准则：若在 a 点的某去心邻域内，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$

则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

(5) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

3. 极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

自变量 x 的变化趋向可以是 $x\to x_0$，$x\to\infty$等各种情形.

由(1)可推出，若 $f(x)$的极限不存在，$g(x)$的极限存在，则 $f(x)\pm g(x)$的极限一定不存在. 这在求极限时，常被应用.

4. 无穷小及无穷小比较，无穷大

(1) 无穷小

极限为 0 的函数称为无穷小.

无穷小是一个函数，它与自变量的变化趋向有关.

(2) 无穷小比较

设 α、β 为无穷小，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C(C\neq 0)$，则称 α 和 β 为同阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 为 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则 α 和 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

(3) 无穷小重要性质

① 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

② 设无穷小 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

上述性质在求极限时常被应用. 若函数为多个因子的乘积、商，求其极限时，可以把因子（若它为无穷小）用与它等价的无穷小代换. "无穷小代换"是求极限时常用的方法.

(4) 无穷大

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$:对$\forall M>0$,$\exists \delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,恒有

$$|f(x)|>M$$

称函数$f(x)$当$x\to a$时为无穷大量.

和极限的定义类似,可定义多种形式的无穷大量. 如:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$等.

若$f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;

若$f(x)$为无穷小,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大($f(x)\neq 0$).

该性质,对x的任何变化趋向都正确.

5. 函数的连续性

(1) 连续概念

设$f(x)$在点x_0的某邻域有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续.

连续的等价定义:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

其中$\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

如果函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称x_0为函数$f(x)$的间断点. 存在左极限和右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点.

和极限概念类似，可以给出$f(x)$在点x_0处左连续、右连续的概念.

(2) 初等函数的连续性

初等函数在有定义的区间上是连续的.

利用函数的连续性，可以方便地求某些极限.

(3) 闭区间上连续函数的性质

最值定理

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上必取得最大值和最小值.

由此定理可知,闭区间上的连续函数一定有界.

介值定理

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(x)\neq f(b)$,且常数μ介于$f(a)$和$f(b)$

之间，则∃ $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$ 成立.

由此定理可得出推论：

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，则∃ $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

利用上述推论，可以证明方程 $f(x)=0$ 在某区间(a,b)内存在根.

三、应注意的几个问题

1. 极限概念的描述

有两种方法：一种是“朴素”说法，一种是“ε—N”或“ε—δ”说法. 理解极限概念的重要目的是理解后面的微积分基本概念——导数和定积分. 从这一角度看问题，极限的朴素说法是更重要的. 比如数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，它表示数列 a_n 充分靠后时，数列 a_n 的值与常数 A 可以任意接近. 用这样的说法检验各个基本的数列，就可以较好地理解极限，也只有在这个基础上才可能理解极限的“ε—N”说法.

2. 求极限的方法

1）直接用极限法则. 当函数连续时，变为求函数的特定值.

2）不能直接用极限法则时（这是常见问题，称为未定式问题），要先作变形. 常用的变形是分子和分母同除以一个因子、根式的有理化、分解因式后消去“零因子”、三角式恒等变形等.

3）用两个重要极限.

4）用两个极限存在准则.

5）用极限的性质，如无穷小乘有界函数仍为无穷小量，无穷小与无穷大之间的关系等.

6）用等价无穷小代换法.

除上述方法外，还有第四章的罗彼塔法则.

在应用上述方法时，有许多要注意的问题. 这将在后面的例题中详细说明.

3. 需要记住的一些常用极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$