



中國算術故事

許 蕓 舫 著

中國青年出版社





中國算術故事

許 蘊 舫 著

中國青年出版社

一九五三年·北京

中國算術故事

內容提要 中國古代算書流傳不廣，一般青年往往沒有機會讀到，即使讀到，也因為古今術語的不同，不容易理解。本書用現代的術語來說明中國古代的各種算制，以及由勞動生產的需要而創造的各種算術應用題的古解法等，使青年讀著了解中華民族在數學上自古就有很大的成就，因而加強對祖國的熱愛。

書號877 數理化42 32開本 53千字 110定價頁

著 者 許 嘉 紡

青年·朔明聯合組織

出版者 中國青年出版社
北京東四12條老君堂11號

總經售 中國圖書發行公司

印刷者 文新印刷廠

印數11,001-26,000 一九五二年一月第一版
每冊定價3,000元 一九五三年十一月第三次印刷

作 者 的 話

不論學習哪一門學問，如果能夠知道那門學問在本國發展的歷史背景，就非但可以增加我們學習的興趣，而且可以加深我們對這門學問的認識。

過去，一般青年在舊社會的教育制度之下，養成了死讀書的習慣，對於數學這一門功課，只知道死記公式，不會靈活運用。因此，他們學習數學，大都感覺得枯燥乏味，甚至把它看成與現實無關的學問，看成神祕的東西。

現在，新中國已經誕生，青年們受了新民主主義教育的薰陶，在學習上不但充分表現出主動性和積極性，而且知道拿學習和愛國主義結合起來。例如，許多同學在學習數學的時候，就常常提出如下的疑問：‘數學是怎樣產生的呢？’‘我們中華民族對數學有哪些成就呢？’

爲了幫助青年同學解決這些問題，作者特就中國在算術、代數和幾何三方面的成就作較有系統的介紹。

本書是關於算術的一冊，內容主要是介紹：(1)數學從勞動中創造出來的歷史。(2)從結繩、壘瓦發展而成的籌算、珠算和策算等古代算制。(3)由於勞動生產的需要而創造的各種算術應用題的古解法。(4)能增加學習興趣的中國遊戲算術。

在這本小冊子裏，讀者可以看出我們中華民族在數學上是有很高的成就的，這種成就也可說是我們祖國的文化寶藏。怎樣來發掘這些寶藏使之發揚光大，為祖國爭光，還需要我們來共同努力。

本書取材雖主要是直接採自古書，但也參考近人的著作，像中算史論叢、中國算學史（以上李儼著）、古算考源（錢寶琮著）、中國算學之特色（日本三上義夫著）、數學發達史（張鵬飛著）、數學辭典（趙綽編）等。他山之石，攻錯，得到的幫助很多。特附誌於此，以表謝忱。

許莚舫 一九五一年一月

目 次

用十個手指計數.....	1
古代的籌算.....	11
近世流行的珠算.....	22
改良的策算.....	36
從洛書推衍到縱橫圖.....	45
實用算術的發達.....	64
盈虧算法及其妙用.....	80

用十個手指計數

我們人類最初的祖先——類人猿，在勞動的影響下，從樹上生活變為能在地面直立行走，跟着手的發展和靈活運用，產生了有節奏的語言和發達的腦髓；於是就變成了人。在這長期的勞動中，積累着許多經驗，由於客觀存在或物質條件的反映，就產生了思想。所以人類的思想是從勞動產生的，是從具體問題上出發的。‘數’是一個抽象的概念，在人類最初的思想上決不會很容易就形成，必須經過悠久的遞變，纔能逐漸完成這一個概念的內容。

人類歷史的有記載，比較上時間是很短的，不能夠據以確定數的概念的由來。我們現在所能考察的，不過是高等動物的行為、原始民族的情況和文字的起源等類。就這些間接材料，可以見到初民對於數的認識的一斑。

動物學家研究某種鳥類和黃蜂的生活情況，曾在一些小組的物體中暗地裏移去或加上一物時，發覺牠們會察覺其間已發生變化的一種能力。這種覺察變化的能力就是數的感覺；多數動物如犬、馬等都沒有，但猿和人類是天然具有牠的。因此數的概念的起源大概是以這少量物體的認識為其萌芽；但這件事必遠在有史時代以前，它的實況已無從查考了。

中國文字中的一個‘數’字，兼有‘數目’和‘計數’兩種意義。可見‘數目’和‘計數’兩者之間的關係是很密切的。一部分動物雖和人類一樣，能夠區別一大一小的兩個數目，但是人類除這範圍狹小的數的感覺外，又有一種效力極大的區別大數小數的方法，為動物所不及；這方法就是計數。

近代研究人類學的專家，從現存的落後民族的生活習慣，知道他們是用手指來計數的。據克爾(Curr)氏調查澳洲各民族，認為土人能夠知道‘四’的已經很少，知道‘七’的竟絕無其人。有些落後民族用的數目名稱，和手指的名稱一樣。超過‘十’的數目，落後民族通常都不能計算，所以他們常說這是‘多數’，或其他類似的名稱。

根據語言學家的研究，在世界上各進化民族的語言，和多數原始民族的語言中，在計數方面有一個普遍的現象，就是都用‘十’做記數法的基礎，他們不謀而合地都採用了十進位制。由於上述的許多資料，以及人類的天生十指，足以證明原始人最初的計數方法，都借助於十個手指，這是毫無疑義的。

原始民族對於數的多寡的認識，最初是粗陋而且散漫的，等到達於用手指計數的一個階段，這纔開始得到了整理。以後逐漸加以充實，慢慢地就成一整齊而抽象的數的概念；於是數學的基礎就奠定了。

人類的手是勞動的產物，由於十個手指的可以自由伸屈，作計數的補助，結果產生出數學來，所以我們也可以說‘勞動

創造了數學’。

二

原始社會進化到稍有經濟組織雛形的時候，人們日常生活中需要計數的地方逐漸增多，例如計馴養的牲畜數目等，用手指計數已感覺到不夠，於是就有用別種東西來代替的必要。

中國歷史上關於史前的計數方法，記載得實在有限，僅有‘爨瓦’‘結繩’‘畫卦’的幾種傳說。其中大概除畫卦與計數的關係較少外，其他兩種都是用來代替手指計數的。爨瓦和結繩的具體事實，無法詳細查考，但約略推測，前者大概與西洋原始民族的‘堆石子’類似；後者是在繩上挽結，由連續所挽結的個數以計數，現今北美土人和琉球的落後民族還在應用着。

從古書上面考查下來，中華民族用結繩以計數，必遠在伏羲氏以前。根據易繫辭上面的話，上古結繩的制度，經過相當時期後演變而為‘書契’。所謂‘書契’，就是文字的原始形態，把記號雕刻在竹、木的上面，最初是專用於計數，以後纔用來表達其他的意思的。

在西洋的語言學上，考得英語的 tally 和 calculate 兩字都是計數的意義，前一字本於拉丁語 talea，意義是刻劃；後一字本於拉丁語 calculus，意義是石子。可見西洋原始民族的計數，同中國古代的書契和爨瓦有着相類的形態，是在樹上刻劃或堆聚石子以表數的多寡的。

用堆石子代替手指計數，在西洋數學史中認為是思想上發生的一個重要進步。這裏不妨先來介紹一下西洋堆石子的原始計數方法及其演變，然後再談中國的比較進步而又完備的方法。

西洋數學史中談到古代用石子代替手指計數的方法，說是先把石子依照手指的個數分成許多小組，就是每組有‘十’個石子，各組分別列成一排，就可以計算超過‘十’的數目。因為用到兩組以上的石子，就發生了一個‘單位’的新觀念。後來又因計算大數的機會增多，石子堆聚得太多就感覺不便，於是再把這個方法改良。他們把第二組的每一個石子來代表第一組的全體，譬如第二組的一個石子和第一組的五個石子排成的就代表十五。這樣一來，用兩組石子就能計算到滿‘百’的數目。依此類推，後來又用第三組的每一個石子代表第二組的全體，於是就能用三組石子計算到滿‘千’的數目。這樣由於手指的自然影響，形成了以‘十’為‘進率’的新觀念，這纔有了比較完備的數學基礎。

後來文化較高的民族改良堆石子的方法，結果就造出‘算盤’來。這裏所說的算盤是西洋式的，在木盤裏面橫列着許多銅條，每條上貫串着十個木珠，最下列的十個木珠，每珠表一；上一列的每珠表十；更上一列的每珠表百……。這種算盤所用的單位比中國式的來得單純，同堆石子的方法完全一樣，不過在使用上比堆石子來得便利罷了。

三

西洋民族的算盤，好算是計數上所用的最原始的工具。但在中國的計數工具，古書上記載的種類很多，起源似乎比西洋要來得早。下面敘述一個大概：

在現今留存的古書中，自漢代以下，如司馬遷史記和班固漢書等，都稱中國在黃帝（約公元前2700年）時已成立算數。漢徐岳數術記遺（約公元168年至189年）中說：黃帝的臣子隸首定計數的方術多種，除掉遺忘的以外，還記得有‘積算’‘太乙’‘兩儀’‘三才’‘五行’‘八卦’‘九宮’‘運算’‘了知’‘成數’‘把頭’‘龜算’‘珠算’‘計算’共十四種。從北周甄鸞在該書中的註解，可以知道這些方術的大概情形。

其中最後一種名叫計算的是全靠心算，不用工具。八卦算每位用一針，最後一位從針鋒所指的八個方向以表自一至八的八個數，又針鋒豎而指天則表九，前面一位用同法表數，但所表的是後一位的十倍，再前一位是百倍，其餘類推。了知算與八卦算類似，每位用一‘了’字，這了字有三曲，每一曲及尾尖的內外各指定表除五外的一個數，首端則表五，用任何較小的物件，例如石子等分別放置於各位上了字的首尾或彎曲處，以表各位的數。龜算每位用一木製的龜，在其四面分子、丑、寅、卯……的十二個部分，除子、丑不表數外，龜頭指向自寅至亥的各部分，依次表自一至十的十個數。除掉上舉不用工具

或工具極為別致的四種計數法以外，其餘十種所用的工具，不外‘算籌’和‘算珠’兩種。下面分別把它們說明一下。

運算和把頭算都用竹製的算籌，上面有刻紋或齒，利用紋的地位或齒的個數，挾在四個手指的三個夾縫間移來移去地計數。五行算用五種顏色的算籌，或用一籌表一數，或用顏色不同的二籌合成一數，依次排列以計數。成數算也用顏色的籌，但排列時須分別東西南北四個方向。以上四種方法，有的使用不很方便，有的工具不夠完備，在古時大概應用得很少。惟有積算——又稱籌算的制度是比較最完善的，曾沿用過很久的時期。後漢書中言隸首用策、陳平用籌，策和籌是類似的東西，普通多用竹製，像筷子的形狀，備數十枚或數百枚以作計數的用途。北周甄鸞在數術記遺中曾說積算是現今通用的算法，又唐時官吏佩有算袋，宋時則有算子筒，都是盛放算籌用的，可見這種算法流傳得很久。至於用籌排列成數的方法，根據孫子算經和夏侯陽算經的話，知道五以下的數每一籌各當一，五以上的以一籌當五，餘籌各當一。又分縱式和橫式兩種，個位、百位、萬位……用縱式，十位、千位……用橫式，各位依次縱橫相間，可免混淆。其籌式如下：

		一	二	三	四	五	六	七	八	九
縱	式						⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
橫	式	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

例如有數七千九百四十六，排成 上三下三 。數中有零位的留一空檔，例如五千八百零三排成 上三下三 。至於怎樣用來作各種計算，非三言兩語可以說得明白，當在後篇詳細記敘。

太乙、兩儀、三才的三種算法，都是刻板橫分幾道，前者每道用一顆算珠，次者每道用青黃兩顆算珠，後者每道用青黃白三顆算珠。九宮算刻板成九格，如右圖依部位定數，用各色的算珠放入，依顏色分個、十、百等位。珠算與後世盛行的算盤不同，刻板為三分，上下二分停游珠，中間一分定算位，每位有五顆珠，上面的一顆當五，下面的四顆每顆當一。以上的各種算法，除珠算雖不及後世的算盤靈便，但已較進步外，其餘都覺過於簡陋，所以不為一般人所樂用。

四	九	二
三	五	七
八	一	六

近今所用的算盤，也稱珠算，因為把算珠穿在檔上，使用非常靈便，所以比前述的珠算進步得多。這種靈便的算盤，經各方面考據，知道頂早要到宋、元兩代纔有，在明代開始盛行，一直流傳到現在。

上面所講的中國古代算制，種類雖然很多，實際比較完善的僅有籌算（為求明顯計，通常都改稱積算為籌算）和珠算兩種。這兩種算制所用的工具，比起西洋式的算盤來，都是在十進位裏面多了一個以五為進率的中間單位，算法雖比較繁複，但因籌數或珠數減少一半，計算起來可以迅速而且便利，顯然是一種比較進步的算器。

四

關於代替手指計數的工具，已經講得很多，後面再談一些關於數的語言和文字方面的史料。

表數的語言的產生，必遠在用手指計數的行爲發生以後，至於在何時開始，已無從查考。在這方面我們所知道的極少，僅有數的語言多從具有各數的常見實物而來，這是可以稽考的。例如中國語的‘二’與‘耳’同音，就是爲了耳有兩隻，是人們所常見的緣故。關於這一個例子，也許有人以爲是很牽強的，然而考察西藏文的‘二’有‘翼’的意義，佛教語的‘五’是 *pantcha*，與波斯語的‘手’是 *pentoha* 相近，可見前說不能算是沒有理由了。

人們懂得了計數，自然會想法來記載計算出來的結果，留着以備後來考查。前述的書契，一方面可賴以計數，一方面就是用來記載的文字。中國表數的古代書契，在文字學上可考的，僅有如下所舉殷的甲骨文，周、秦的金文和漢的小篆（據說文解字）：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
<u>殷</u> <u>甲骨文</u>	—	=	≡	≡	Ⅹ	∧或∩	+	)	(	丂
<u>周</u> <u>秦</u> <u>金文</u>	—	=	≡	≡	≡或Ⅹ	介	+	)	(	九
<u>漢</u> <u>小篆</u>	—	=	≡	⊕	Ⅹ	𠂇	𠂇	)	(	九

說文又舉古文的一、二、三爲弌、弌、弌。唐、宋以後，以壹、貳、

叁、肆、伍、陸、柒或漆、捌、玖、拾、佰、仟爲自一至千的商業用數字。

中國古代算書中多不錄算式，至唐開元間開始在書中依照算籌的排列式樣摹寫下來以代文字，叫做象形數碼。但因數中有空位的筆繕時易於錯誤，乃改用○號以代空位，宋秦九韶數書九章裏面爲求便於書寫，把四、五、九三種數碼變通，叫做宋代簡易數碼。明、清兩代，籌制已廢，演算都用算盤，通常商業上記數，除用文字外，又習用一種暗碼，與宋代數碼大同小異。現在除象形數碼僅比前舉籌式多一個○號，不再舉示外，把其他兩種數碼記在下面：

		一	二	三	四	五	六	七	八	九	零
宋代簡易數碼	縱式				X	o	丁	π	Ⅲ	X	○
	橫式	—	=	≡	X	o	⊥	⊥	≡	×	○
明清商用數碼(暗碼)											
		—	=	≡	X	o	⊥	⊥	≡	×	○

五

我們談到了計數的工具和數碼，應該注意到它們同世界各民族的數學發展有着極重大的關係。中國很早就有了比較完善的計數工具，所以在周代已經有了算數的教育制度。漢鄭玄解釋周官所教的‘九數’，內中除算術的整數及分數四則、開方、求積和比例外，還有代數的聯立方程等，它的發達是遠早於其他各民族的。在西洋方面，埃及是一個有名的數學發

源地，但是他們的貢獻多數是幾何學的知識。至於在算術方面，爲了沒有工具和數碼，計算方法非常幼稚。相傳在十五世紀時，歐洲還鬧着下述的一個笑話：‘德國某商人要想叫他的兒子受高等商業教育，請教一位名教授，希望指示他求學的地方，這位教授說：假使你只要兒子懂得加減的算法，在德國大學裏也許可以學得到；若要懂得乘除，除掉到意大利去留學，在別的地方是無法獲得這種知識的。’當時歐洲數學的簡陋情形，真是可笑得很！其實在十二三世紀時阿拉伯數碼已經傳入歐洲，在閉塞的德國，因爲不很重視，所以還沒有把古舊的算法改進。講到阿拉伯數碼的來源，現在很難確定，一般認爲發源於印度，在十世紀傳到阿拉伯，到十二三世紀纔慢慢地傳到西班牙和歐洲的其他各地。用這種數碼來作筆算，便利而又不受絲毫拘束，把過去一切計算和記數上的困難完全克服，於是就造成了歐洲各民族在短短數百年中的飛躍進步，結果突過了世界各先進民族。我們中國的數碼還不能簡化，且始終使用算器而不用筆算，無形中受着不少的拘束；進步得所以特別遲慢，這就是一個很大的原因。

古代的籌算

在前一篇裏曾經提到中國古代的籌算制度，本篇再來詳細談一談籌算的淵源和使用的方法。

籌算有種種不同的名稱，大概最先叫做‘策’，以後纔有‘算’‘籌’‘籌策’‘算子’等的別名。古書解釋這幾個名詞的辭句很多，這裏不去一一記敘，單把許慎說文裏的幾句話提一提。說文竹部裏面有一段話：‘筭（同算）長六寸，是計曆數用的，這一個字的上半是竹，下半是弄，意思是用竹做成，時常去搬弄，就能熟而不誤。’可見中國文字的‘算’，最初是一個名詞，用作籌的別名，後來纔改成動詞，意義變成了‘計算’。

考查到籌的大小和形式，各書所載的很不一致。漢代的書中說長三寸或六寸，直徑一分，這是像筷子一樣成圓形的。在南北朝時變成了長四寸每邊三分的方形，隋書則稱長三寸闊二分，表正數的籌是三角柱狀的，表負數的籌是正方柱狀的。

籌的分別正數和負數，除上述隋代的制度外，三國時魏劉徽（約公元263年）在九章算術的註裏說：‘正籌赤色，負籌黑色，有時用一色的籌，正排表正數，斜排表負數。’宋秦九韶數書九章（1247）也用正赤、負黑來分別，但楊輝詳解九章算法（1261）裏面摹寫下來的籌式數碼，凡負數的末位都加一