最优化技术

ZUIYOUHUA JISHU

邓先礼 编著

重庆大学出版社

最优化技术

邓先礼 编著

重庆大学出版社

内容简介

最优化是一门研究如何科学、合理、迅速地确定可行方案并找到其中最优方案的学科。本书讨论了最优化问题的数学模型的构造方法及特性，介绍了最优化问题的基本理论及主要的常用算法，其内容包含线性规划、整数规划、非线性规划、蒙特卡洛优化方法及动态规划。

本书既有理论深度，又有很强的实用性，可以作为理工科大学生及研究生的教材，也可供科学研究人员、工程技术人员及经营管理人员参考。

最优化技术

邓先礼　编著

责任编辑　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

四川外语学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:12.75 字数:318 千

1998 年 1 月第 1 版　1998 年 1 月第 1 次印刷

印数:1—2000

ISBN 7-5624-1602-8/O・154　定价:16.00 元

前　言

在社会经济、生产建设、科学研究、军事斗争以及日常生活中，无论做什么事，往往有多个方案可供选择，而人们总是力图以最小代价确定并选用可以实现最优目标的可行方案(即最优方案)。如果可行方案的数量不多，可以采用穷举的方法，将所有的可行方案逐一进行比较，从中挑出最优方案。但在实践中，可行方案往往非常多，甚至可能是无穷多，穷举的办法就行不通了。更困难的是，人们常常是只知道所要解决的问题，而不知道有哪些途径和方案可以解决问题。因此，需要有一套科学的合理的方法，以便迅速简捷地确定可行方案并找出其中的最优方案，这就是最优化这门学科的任务及研究内容。

本书系统地介绍了最优化问题的基本理论，讨论了最优化问题的数学模型的特性及建模方法，并提供了行之有效的求解方法。

本书可以作为理工科大学生及研究生的教材，也可供科学研究人员、工程技术人员及经营管理人员学习参考。

本书具有如下几个特点：

1. 既注意了理论的系统性，又注意了算法的实用性，并对算法给出定性评价，以便读者在实际工作中选用。

2. 以较多的篇幅讨论了优化问题的数学模型，有利于增强读者解决实际问题的能力。

3. 在编排体系上，力求遵循认识规律，首先以简明语言尤其是几何语言总括性地介绍各类最优化问题的理论及方法的基本思想，再进一步作深入讨论，以利于读者从全局的高度掌握最优化理论及方法的本质特征。

4. 编选了较多的算例，并针对一些易于混淆的重要概念，构造了许多富有说服力的反例并予以强调说明，以帮助读者加深对基本概念的理解。

本书共分 5 章，第一章介绍线性系统优化问题及线性规划，第二章介绍整数变量优化问题及其算法，第三章介绍非线性系统优化问题及其主要算法，第四章介绍蒙特卡洛优化方法，第五章介绍多阶段决策优化问题及动态规划方法。虽然大多数关于最优化问题的教材都没有介绍蒙特卡洛优化方法，但是作者认为这个方法在本质上是随机抽样及计算机仿真技术在最优化问题中的应用，独具特色，能拓展思路，具有很强的实用性，因此在本书中特别予以介绍。

本书的初稿曾以讲义形式作为理工科本科生、研究生及讲习班的教材使用多年。本书是在总结了作者多年从事最优化研究与教学的经验的基础上，广泛听取使用本教材的教师和学生的意见，经过多次修订而完成的。

重庆大学系统工程及应用数学系的段虞荣教授和伊亨云教授认真审阅了本书原稿，提出了不少宝贵的改进意见。在本书的编写及初稿的使用过程中，还得到了杨万年教授的大力支持。在此，作者谨向他们及所有关心支持本书编写出版的人们致以衷心感谢！

鉴于作者的水平及经验有限，书中错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

作者

1997 年 7 月

目　录

第一章　线性系统的优化

在现实生活中，有许多问题是可以用线性方程、线性不等式或线性函数来描述的。例如经济活动中的单价、销售量与销售收入之间的关系，匀速直线运动中的速度、时间与位移的关系等等，这样的系统称之为线性系统。解决线性系统的最优化问题有多种方法，其中最为成熟、应用最为广泛的理论和方法是线性规划。本章介绍如何应用线性规划的理论和方法来解决线性系统的最优化问题。

第一节　线性规划模型

一、模型实例

例 1.1　生产计划问题

某厂需安排 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 共 5 种产品的生产，所需原材料为 3 种：B_1, B_2, B_3，且已知：

(1)每单位产品 A_j 需耗用材料 B_i 共 a_{ij}。

(2)每单位产品 A_j 可获利 c_j。

(3)按上级要求，A_1, A_2 两种产品的和不多于产品 A_3 的 2 倍，且产品 A_4 不多于 d 个单位。

(4)原料 B_i 的总量不超过 b_i。

(5)所有产品均供不应求，可全部销售出去。

试问该厂应如何安排生产，总利润最大？

设产品 A_j 的产量为 x_j 单位，那么产品 A_j 可获利 c_jx_j，则总的利润为 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_5x_5$，该厂追求的目标是利润最大。

设总利润为 Z，则有

$$\max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_5x_5$$

但是，产量 $x_1, \cdots, x_5$ 必须满足以下限制(约束条件)：

(1)原材料总量的约束：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i5}x_5 \leqslant b_i, i = 1,2,3$$

(2)产品间比例及数量约束：

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 0$$
$$x_4 \leqslant d$$

(3)产品数量不能是负数：

$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,5$$

这样，就得到如下一个在若干个线性等式及不等式约束之下的求极大值问题模型：

$$\max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_5x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i5}x_5 \leqslant b_i, i = 1,2,3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 0 \\ x_4 \leqslant d \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

其中，max 即“maximize”，极大化；

s.t. 即“subject to”的缩写，中文为“满足于，受约束于”的意思。

当采用适当的方法求出 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 后，就得到该厂的最优生产计划。

例 1.2 合理下料问题

某建筑工地需制作一批直径相同的钢筋套件，其规格及数量为：长度 3m 的共 90 根，长度 4m 的共 60 根。已知用于下料的螺纹钢原料每根长 10m。问应该如何下料才合理？试建立数学模型。

根据原料长度及所需钢筋的长度要求，每根原料可以按如下 3 种方法之一下料：

方法一：截成 3 根 3m 的钢筋，剩下残料 1m。

方法二：截成 2 根 3m，1 根 4m 的钢筋，无残料。

方法三：截成 2 根 4m 的钢筋，剩下残料 2m。

其余的方法明显不合理，可不予考虑。

为满足各种钢筋的数量要求，可取 x_i 根原料螺纹钢按方式 $i(i=1,2,3)$ 下料，于是，可获得

$$3\text{m 钢筋根数}: 3x_1 + 2x_2$$

$$4\text{m 钢筋根数}: x_2 + 2x_3$$

$$\text{残料总长度(m)}: x_1 + 2x_2$$

一般来说，显然在满足配套成 90 根 3m 钢筋，60 根 4m 钢筋后，总会剩下部分长度为 3m 和 4m 的短钢筋，现分别设为 s_1 根和 s_2 根，即

$$s_1 = 3x_1 + 2x_2 - 90$$

$$s_2 = x_2 + 2x_3 - 60$$

最后，需要讨论的是，合理下料的评判标准是什么。选取的标准为：使残料及配套后剩下的短钢筋的总长度最小。设此总长度为 Z，则合理下料问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
\min \quad & Z = x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3s_1 + 4s_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \qquad - s_1 \quad = 90 \\
& \qquad x_2 + 2x_3 - s_2 = 60 \\
& \qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, s_1, s_2 \geqslant 0 \\
& \qquad \text{且 } x_1, s_j \text{ 均为整数}
\end{aligned}$$

在本例中，讨论的是关于线材的合理下料问题。但其处理原则也适用于板材的合理下料问题。对于后者，在建模时，根据设计图中各种零件的形状尺寸，找出用一块原料板材下料时可以采用的所有不同方式，计算出残料面积，再按一定的追求目标（例如使残料面积及配套后剩下的零件面积的总和最小）建立起相应的目标函数即可。

上述两例中所建立的数学模型称之为线性规划模型。

二、线性规划的特征及标准形式

1. 特征

从前述两例可以看出，线性规划问题在本质上是一种特殊的约束条件下的最大（小）值问题，其数学模型由两大部分组成，其一是需要优化的追求目标或评判标准，其二是寻求优化的范围。通常，可以用适当的一组变量（称之为决策变量）代表可供选择的决策方案，而需要优化

的目标及评判标准则可以量化为这组变量的线性函数，称之为目标函数。于是，求最优的决策方案就转化为目标函数在某个集合（即寻优的范围）内的极大化（maxmize）或极小化（minimize），而寻优的范围则可用决策变量的一组线性等式或不等式的解集来表示。这样，需要解决的问题就可以化为如下的数学模型：

$$
\begin{aligned}
&\max(\text{或}\ \min)\quad Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s.t.}\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\qquad\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m
\end{aligned}
$$

其基本特征是：

(1)目标函数是线性函数；

(2)约束条件用线性等式或不等式表示。

2. 标准形式

为了便于讨论并寻找有效的解法，需要约定线性规划的标准形式，在本书中，约定线性规划的标准形式是

$$
\begin{aligned}
&\max\quad Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s.t.}\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\qquad\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\
&\qquad\ x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

其中，$b_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m$，且不存在多余约束。为讨论和叙述方便，常记

$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，称为决策向量；

$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，称为价格向量；

$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$，称为资源向量；

$A=(a_{ij})_{m\times n}$，即约束方程组系数矩阵。

于是标准形式的线性规划可表示为

$$
\max\quad Z=CX
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}
$$

其中，A 是行满秩的，$b\geqslant 0$。

也可记为

$$
\begin{aligned}
&\max\quad Z=CX\\
&\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}x_jP_j=b\\
&X\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中，$P_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$

$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

3. 标准化的方法

直接根据实际问题所建立的线性规划模型常常不是标准形式的，其追求目标，资源约束条件和变量往往部分地或全部地不符合标准形式的要求，但是，总可以采用如下的办法将它化成

标准形式。

(1)若原问题是极小化问题，即

$$\min \quad Z = CX$$
$$\text{s.t.} \quad X \in D$$

考虑新问题：

$$\max \quad Z' = -CX$$
$$\text{s.t.} \quad X \in D$$

容易证明，这两个问题具有完全相同的最优点(当然，最优值相差一个符号)，因此，只需求出 Z' 在同一约束下的极大点，就得到了原问题的极小点。

(2)若原问题的资源约束条件是不等式，即

1)存在某个 i，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$$

则可引入一个非负的变量(称为松弛变量)x'_i，用下面两式替换原不等式约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x'_i = b_i \\ x'_i \geqslant 0 \end{cases}$$

2)存在某个 i，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_j$$

则可引入一个非负变量(称为剩余变量)x'_i，将不等式化为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x'_i = b_i \\ x'_i \geqslant 0 \end{cases}$$

(3)若某个变量不是非负要求，即有

1)x_j 是自由变量，没有符号限制，则可用两个非负变量之差替换 x_j：

$$\begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j \geqslant 0, x''_j \geqslant 0 \end{cases}$$

2)若 x_j 要求是非正变量，则可令

$$x_j = -x'_j$$
$$x'_j \geqslant 0$$

例 1.3　试将下列线性规划标准化

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -5x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 3 \\ & -x_1 - x_2 + 4x_3 \geqslant 7 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 - x_2 - 7x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$3x_1-x_2+x_3\leqslant 4$$

$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 自由}$$

解 *a*) 原问题的标准形式为

$$\begin{aligned}\max\quad & Z'=-3x_1+4x_2-5x_3\\ \text{s.t.}\quad & 5x_1-x_2-x_3=2\\ & 2x_1-x_2+3x_3+x_4=3\\ & -x_1-x_2+4x_3-x_5=7\\ & x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,5\end{aligned}$$

b) 令 $x_3=x_4-x_5$，原问题标准化为

$$\begin{aligned}\max\quad & Z=4x_1-x_2-7x_4+7x_5\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2-x_4+x_5=5\\ & 3x_1-x_2+x_4-x_5+x_6=4\\ & x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{aligned}$$

三、线性规划问题的解

设有标准形式的线性规划

$$\max\quad Z=CX \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\quad AX=b \tag{1-2}$$

$$X\geqslant 0 \tag{1-3}$$

设集合

$$D=\{X\,|\,AX=b,X\geqslant 0\}$$

即 D 是满足该线性规划的所有约束条件的点的集合，称之为该线性规划的可行域，而可行域中的点称之为可行点(或可行解)。

定义 1.1 设 X^* 是线性规划的一个可行点，如果对任一个可行点 $X\in D$，都有

$$CX^*\geqslant CX$$

则称 X^* 是线性规划问题的一个最优解(简称解)，而相应的目标函数值 CX^* 则称之为最优值。

如果可行域 D 有界，可以证明，必有最优解；如果可行域 D 无界，则既可能存在最优解，也有可能不存在最优解。也就是说，虽然存在可行解，但对于任何一个可行解，总存在目标函数值比它更大的可行点，没有一个可行点满足最优解的定义。

显然，对于一个给定的线性规划问题，尤其是为解决实际问题而提出的线性规划问题，最重要的是要得到最优解，也就是找出最优决策方案。最优解确定之后，自然就可顺带算出最优值来。

由于已约定(1-2)式中的矩阵 A 是行满秩的 m 行 n 行的矩阵，因此 A 中至少存在一个 m 阶的非奇异子矩阵。

定义 1.2 设矩阵 B 是(1-2)式中矩阵 A 的一个 m 阶非奇异子矩阵，则称 B 是线性规划问题(1-1)～(1-3)的一个基，基的列向量称之为(这个基对应的)基向量，而基向量对应的变量称之为基变量。

显然，对任一个基 B，与之对应地有 m 个基向量和 m 个基变量，相应地，又有 $n-m$ 个非基向量和 $n-m$ 个非基变量。

不同的基由不同的基向量(基变量)构成。

定义 1.3　设 B 是线性规划(1-1)～(1-3)的一个基，点 $\overline{X}$ 满足约束方程组 $AX=b$，而且，由基 B 所确定的非基变量在 $\overline{X}$ 中的值全为零，则称 $\overline{X}$ 是该线性规划的一个(由基 B 确定的)基本解。

例 1.4　设

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 3\\1 & 3 & 1 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$$

那么，$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & 3\\6 & 0\end{bmatrix}$等都是基，而$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$不可逆，因而不是基。

现取基 $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}=(P_3,P_5)$，容易验证，向量 $\overline{X}=(0,0,3,0,2)$是基本解。

显然，基本解不一定是可行解，可行解也不一定是基本解。

如果点 $\overline{X}$ 既是基本解，又是可行解，则称 $\overline{X}$ 是基本可行解(简称基可行解)，而与基可行解对应的基则称为可行基。

如果一个基可行解同时又是最优解，则称其对应的基是最优基。

以后将会看到，基可行解在线性规划的理论与算法中占有极重要的地位。由基本可行解的定义可知，欲求基可行解，可以先求出基本解，再判断它是否满足非负的条件。下面介绍求基本解的一个办法。

设 B 是基，将系数矩阵 A 的列作适当的调整，可以得

$$A=(B,N)$$

其中矩阵 N 是由非基向量构成的子矩阵。相应地，记由基变量构成的 m 维向量为 X_B，非基变量构成的 $n-m$ 维向量记为 X_N，则有

$$AX=b$$

$$(B,N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b$$

所以

$$BX_B+NX_N=b$$

令 $X_N=0$，则

$$X_B=B^{-1}b$$

向量$\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$是基 B 所确定的唯一的基本解。

显然，任一个线性规划问题只有有限个基，因而只有有限个基本解。

如果在基本可行解中，其基变量对应的分量中存在零，则称此基本可行解是退化的。

如无特别说明，本书中所提到的基本可行解都是指非退化的。

第二节　二维线性规划问题的图解法

一、二维问题的几何意义

二维线性规划问题有着鲜明的几何意义，可以通过作图来获得最优解。

二维线性规划的目标函数为 $Z=c_1x_1+c_2x_2$，当 Z 为一个给定值时，该目标函数代表一条直线，且该直线上的任一点 (x_1,x_2) 所对应的目标函数值均相同，故称该直线是目标函数的一条等值线。当 Z 连续变动时，就产生出目标函数的等值线族。显然，等值线族内的所有直线都是相互平行的。

二维线性规划问题的可行域 D 是平面上的一个有界或无界的区域，其边界均为直线。

显然，在任一可行点 X 均有且只有一条目标函数等值线经过，如果存在一个可行点 $\overline{X}$，且过 $\overline{X}$ 的等值线的值不小于(对极大化问题)过其余可行点的等值线的值，那么，$\overline{X}$ 必是一个最优点(最大值点)。

二、图解法的要点

(1)在坐标平面 x_1ox_2 上作出由所有的约束条件所确定的可行域 D。

(2)过某个可行点作出目标函数的一条等值线，然后沿目标函数值增大(对极大化问题)的方向将等值线平行移动，直到等值线与可行域 D 的某个顶点相切(如果可能的话)，则该顶点必是最优点。

例 1.5　用图解法求解下列线性规划

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \max\quad Z = x_1 + x_2 \\
& \text{s.t.}\quad 3x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\
& \qquad\quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\
& \qquad\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 \\
b)\quad & \max\quad Z = x_1 + x_2 \\
& \text{s.t.}\quad 3x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\
& \qquad\quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\
& \qquad\quad x_2 \leqslant 2 \\
c)\quad & \max\quad Z = x_1 + x_2 \\
& \text{s.t.}\quad 0 \leqslant x_1 \\
& \qquad\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2
\end{aligned}
$$

解　a)　如图 1-1a 所示，阴影部分是有界的可行域，虚线为目标函数等值线，顶点 $B\left(3,\frac{3}{4}\right)$ 是唯一最优点，最优值为 $3+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$。

b)　如图 1-1b 所示，问题 b 与 a 相比，目标函数相同，约束条件少一个 $x_2>0$，可行域无界，但仍存在与问题 a 相同的最优解，即顶点 $B\left(3,\frac{3}{4}\right)$。

c)　如图 1-1c 所示，与问题 a、b 的目标函数相同，但约束条件更少，可行域是一个右端无

界的带状区域，不存在目标值最大的点。即是说，问题 c 虽然有无穷个可行点，但不存在最优解，事实上，取点 $x_\lambda(\lambda,0)$，则对任意的正数 λ，点 x_λ 都是可行点，但当 $\lambda\to+\infty$时，点 x_λ 对应的目标值趋于无穷大，不存在目标函数值最大的可行点，所以说，该问题不存在最优解。

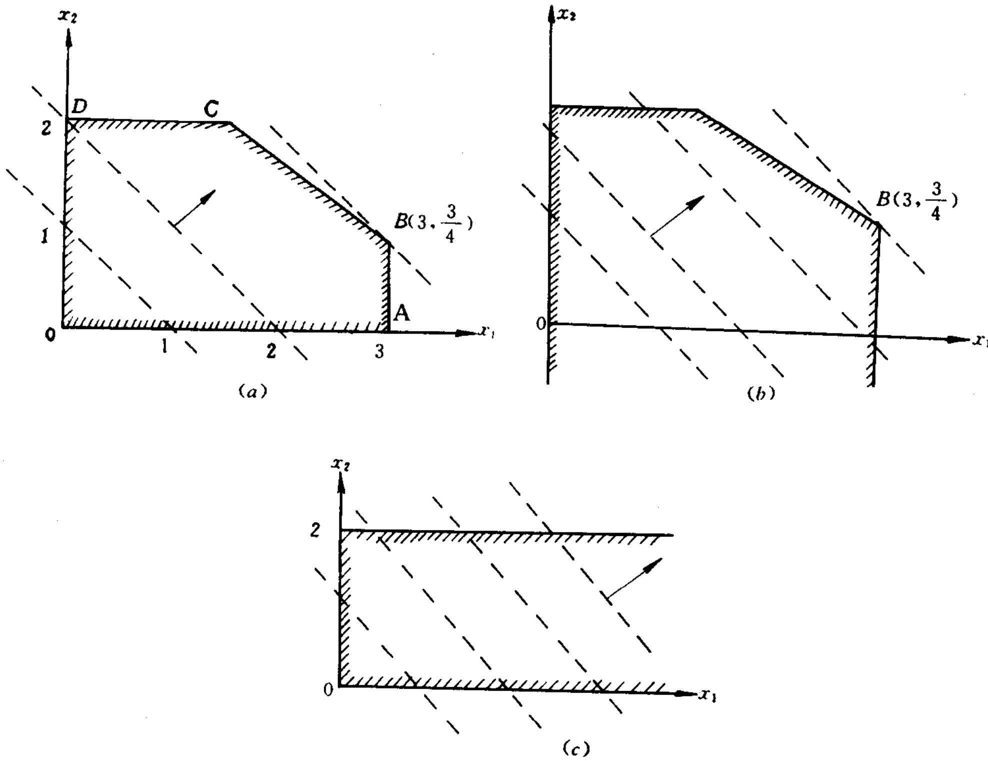

图 1-1

三、图解法意义的推广

我们之所以对图解法感兴趣，不仅仅是因为它可以用来求解二维的线性规划问题，更重要的是，它为线性规划问题提供了直观的鲜明的几何形象，揭示了线性规划的解的一些基本特征。

从例 1.5 中的几个问题，可以看出：

(1)线性规划目标函数等值线是平行的等值线。

(2)线性规划的可行域是凸多边形(有界的或无界的)。

(3)由于特征(1)、(2)，如果线性规划问题存在最优解，则一定可以在线性规划的可行域中的某个顶点找到。

上述特征均可以推广到高维的情形，而且正是由于具有这些特征，才使得人们有可能找到行之有效的一般解法。

第三节　线性规划的基本定理

一、凸集

定义 1.4　设集合 $S \in E_n, S \neq \varnothing$。如果任取 S 中的两个点 X_1, X_2，以及区间[0,1]中任一个数 λ，都有

$$\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S$$

则称集合 S 是凸集。

从几何的角度看，$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 代表以 x_1, x_2 为端点的线段(当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$)，因此，若一个集合是凸集，则表示此集合中的任意两个点为端点的线段都完全落在此集合中。

下面是一些常见的凸集：

(1)平面，直线、线段是凸集，n 维欧氏空间中的超平面是凸集；

(2)$S=\{(x_1,x_2,x_2)^T \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 1\}$；

(3)$S=\{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2 \leqslant 2, 3x_1-x_2 \leqslant 1\}$。

图 1-2 是一些非凸集的例子：

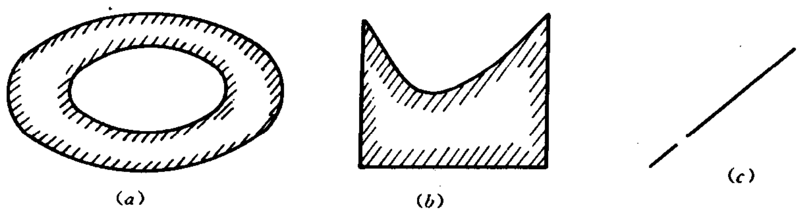

图 1-2

特别，单点集定义为凸集。

定义 1.5　设 $x_1, \cdots, x_m$ 为 E_n 中的 m 个点，若存在 m 个数 λ_j 满足：

$$X = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j X_j, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$$

则称点 X 是点 $X_1, \cdots, X_m$ 的一个凸组合。

容易证明，任取一个集合 S，那么 S 中的点的所有凸组合的集合是一个凸集。

二、极点与极方向

在一个凸集的点中，有些点处于特殊的地位，如线段的两个端点，三角形的三个顶点，这些点，我们称之为极点，下面给出关于极点的一般定义。

定义 1.6　设集合 S 是凸集，点 X 是 S 中的点。如果对 S 中的任意两个相异的点 X_1, X_2，以及开区间(0,1)上的任意数 λ，都不可能有

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$$

则称 X 是凸集 S 的一个极点。

容易理解，设若点 X, X_1, X_2 均属于凸集 $S, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$。那么，点 X 成为 S 的极点的充要条