中等專業学校教学用書

初等几何学教程

П. П. 安特列也夫著

高等教育出版社

中等專業学校教学用書

初等几何学教程

П. П. 安特列也夫著
东北工学院数学教研組譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的安特列也夫(П. П. Андреев)著"初等几何学教程"(Курс элементарной геометрии) 1954 年版譯出。原書为苏联中等技術学校的教科書。内容包括平面几何学及立体几何学兩部分。

初等几何学教程

П. П. 安特列也夫著

东北工学院数学教研組譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海集成印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·105 開本 850×1168 1/32 印張 7 8/16 字數 177,000

一九五六年九月上海第一版

一九五六年九月上海第一次印刷

印數 1—60,000 定價(8) ¥ 0.85

目　　錄

立体几何学

譯者的几点声明

1．本書出版后，得到許多讀者的改正意見，这对本書的修訂得到了很大的帮助，在此謹致以謝意。

2．为了滿足讀者要求，此次对於原著，有些更动。在辞句上，在敍事順序上，力求能適合我們的習慣。原來用語言講述的一些証明过程，此次大部都改用符号。我們这些工作还作得很不夠，还有待於使用此書的老师及同学的帮助。

3．使用的符号是一般慣用的，因此就不在此另作說明了。

序　言

这本初等几何学教本是依照 1949 年苏联高等教育部的中等技術学校教学大綱寫成的。

在材料的闡述中容許了与教学大綱有若干不大的出入，这些出入或者是由於方法上的考慮，或者是由於現代科学对初等几何学教程中所牽涉的各問題的看法的要求所引起的。

在論述关於線段度量的問題之前，先說明了关於線段長的概念。

教学大綱中第二項的內容——比例線段——在本教程中是緊放在線段比的問題之后，亦卽放在关於相似形的概念之前。

与相似形的正式定义有所不同，相似形是从确定的几何变換（卽位似变換）的观点來論述的。这不僅是符合关於相似这一几何部分的教学的現代看法，而且还簡化了这一部分的論述。

本書作者完全同意格拉哥勒夫教授对这一部分的見解，因之第二章"相似形"的論述也是根据这一种見解的。

第六項的材料——关於極限概念和圓周長的計算——是緊接在关於正多边形的第四項之后論述的。

在論述面積的計算那一項时，特別列出了几何圖形的"全等"，"等容"与"等積"等不同概念以及它們之間的相互关系等問題；关於圖形"等積"的一系列的定理就是由确立它們的等容性來証明的。

为了系統地擴充与加深关於函数的依从关系的概念，在相当的地方，使同学們注意到变量之間的关系，並給出一系列关於与自

变量的变化相联系的函数变化的問題。

有相当数量的計算題必須运用近似計算的方法來解决，因为在所提問題中，含有求出具有事先給定的准确度的結果的要求。在解答这些問題时，同学們非使用適当的参考書、数学表、計算尺等不可，而这正是教学大綱所規定的要求。僅給有少量的証明題，这是由於依照几何学的教学計划中时間的安排，主要是着重於計算題，而同时也可注意，对於大多数計算題在解答时需要具有証明性質的推理的。前五章中給有一定数量的作圖題。

最后，我認为应当向格拉哥勒夫教授对本書工作的安排所提的宝貴意見和指示表示我的感謝。

平面几何学

第一章　線段的度量. 比例線段

I.　線段的度量

§1. 引言　直線上任意兩点間的部分叫做線段，而这兩点叫做線段的端点。

線段可用兩个字母放在它的兩个端点之旁來表示，例如線段 AB（圖 1）；也可用一个小楷字母來表示，例如線段 a（圖 2）。

圖 1.

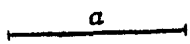

圖 2.

把線段 AB 与 CD 中的一条，放置在另一条上；如果它們的端点重合，則我們認为这兩条線段是相等的。

为了比較 a、b 二線段，可把它們从一已知点起，向着同一边，放在同一直線上。例如圖 3，从点 A 有：$AB=a$；$AC=b$。这时，C 落在 A、B 之間，我們說：$b<a$；如果 B 落在 A 与 C 之間时，則 $a<b$；如果 B 与 C 重合，則如前所說的：$a=b$。

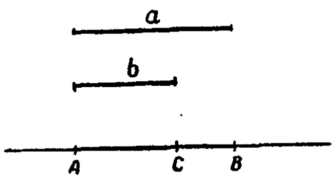

圖 3.

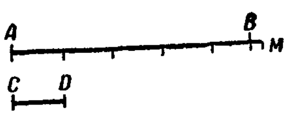

圖 4.

我們有了比較線段大小的方法，但是还不能准确地表达線段的長度，因此需要建立線段度量的理論。下一公理是这个理論的基礎：

阿基米德公理① 假設 AB 与 CD 为二已知線段，且 $AB>$ $>CD$，則必有一个整数 n 存在，使得⊖

$$n\cdot CD\leqslant AB \quad 及 \quad (n+1)CD>AB。$$

§2. 二線段的公度及其求法 如果一線段分别含於二已知線段中恰为整数次而無剩余，則这条線段叫做二已知線段的公度。

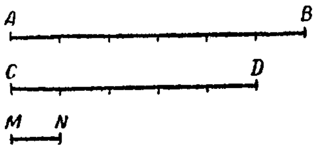

圖 5.

例如圖 5，線段 MN 含於線段 AB 中恰为 6 次，而含於線段 CD 中恰为 5 次。在这种情形，我們說：$AB=6MN$，$CD=5MN$。也可以說：$MN=\frac{AB}{6}$，$MN=\frac{CD}{5}$。顯然，任意等分線段 MN，其每一分也必是这二線段的公度。因此，如果二線段有公度，也就有無窮多个公度。

有公度的兩条線段，叫做可公度的。

可公度的二線段的所有公度之中，必有最大公度。我們可以这样來証实这一論断。假如 a、b 二線段是可公度的，且 s 是它們的一个公度。如果在其所有公度中沒有比 s 还大的，則 s 就是最大公度。如果 s 不是最大的，則应当存在着比 s 还大的公度，設其一为 l。設 s 含於 a 中恰为 p 次，而 l 含於 a 中恰为 q 次（p、q 都

① 阿基米德是希臘数学家，生於錫拉古，死於紀元前 212 年。

⊖ 阿基米德公理是从实踐中得來的，其意是：AB 与 CD 是任意給定的二線段，不管 CD 怎样短，AB 怎样長，在 AB 上从 A 点起，接連地截取線段 CD 时，其結果只有这样的兩种情形：（1）線段 CD 含於 AB 中恰为整数 n 次而無剩余，即 $n\cdot CD=AB$，$(n+1)CD>AB$；（2）線段 CD 含於線段 AB 中整数 n 次，还有小於 CD 的剩余線段，即 $n\cdot CD<AB$，$(n+1)CD>AB$（如圖 4）——譯者註。

是自然数)。由於 $l>s$，所以 $q<p$。这就得出，所有比 s 大的公度，含於 a 中的次数都比 p 小。由此可知，大於 s 的公度不能超过 p 个。顯然，在这有限个公度中必定有一个最大的。

定理 1. **如果二線段中，短的一条含於長的一条之中恰为整数次而無剩余，则短的線段就是二線段的最大公度。**

如圖 6，線段 CD 含於 AB 中恰为整数次而無剩余。顯然，線段 CD 含於其自身之中也正好整数次(一次)。但因線段 CD 不可能是比 CD 还大的線段的倍数，所以这个公度是最大的。

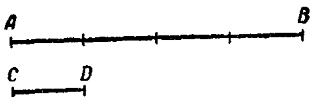

圖 6.

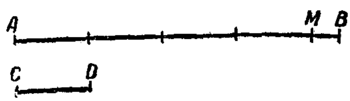

圖 7.

定理 2. **如果二線段中，短的一条(CD)含於長的線段(AB)中整数次而有剩余(MB)，则这兩条線段(AB 及 CD)的最大公度(如果存在的話)也將是短線段(CD)与剩余 ($MB=r$) 的最大公度(圖 7)。**

設在線段 AB 上截取線段 CD 的 n 次之后，得一剩余 $MB=r$，则

$$AB=n\cdot CD+r。$$

由此等式可知，如果某一線段 q 含於二線段 CD 及 r 中整数次而無剩余，则它也含於 AB 中整数次而無剩余。也就是，如果 q 是二線段 CD 及 r 的公度，则它也將是二線段 CD 及 AB 的公度。換句話說，如果某一線段 q 含於線段 AB 及 CD 中整数次而無剩余，则它含於線段 r 中也正好为整数次。

这样，線段 AB 及 CD 的公度，与線段 CD 及 r 的公度是相同的，因此，它們二者之間的最大公度也是相同的。

由上面的兩个定理，我們得出如下的求二線段的最大公度的方法。

設二線段为 a、b，且假定 $a>b$。則在線段 a 上截取線段 b 时，可能有兩种情形：（1）b 含於 a 中恰为整数次而無剩余，或（2）b 含於 a 中整数次而有一剩余 $r_1<b$。

在第一种情形，由本節定理 1 得知：線段 b 就是 a 及 b 二線段的最大公度。

在第二种情形，由本節定理 2 得知：求所給二線段的最大公度可以化为求 b 及 r_1 兩線段的最大公度。为了求这个公度，当我們在 b 上截取 r_1 时，仍然可能有这样的兩种情形：如果 r_1 含於線段 b 中恰为整数次而無剩余，則由定理 1 得知，它將是 r_1 及 b 的最大公度，由定理 2，它也就是 a 及 b 的最大公度。如果線段 r_1 含於 b 中整数次而有一剩余 r_2，則对於 r_2 來說，仍用前法，又可能有兩种情形，等等。

在前一剩余上，截取下一个所得的剩餘，这样輾轉相截的結果，可表成如下的一列等式：

$$a=n_1b+r_1,\quad \text{其中}\ r_1<b,$$
$$b=n_2r_1+r_2,\quad \text{其中}\ r_2<r_1,$$
$$r_1=n_3r_2+r_3,\quad \text{其中}\ r_3<r_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$r_{m-2}=n_mr_{m-1}+r_m,\quad \text{其中}\ r_m<r_{m-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

由这些等式可知，如果剩余中的任意一个含於其前一个中恰好整数次，則这个剩余就是 a 及 b 二線段的最大公度。例如，如果 r_m 含於 r_{m-1} 中整数次而無剩余，則依定理 1 及定理 2 可知，線段 r_m 等於 r_{m-1} 及 r_m 的最大公度，也就是，等於 r_{m-2} 及 r_{m-1} 的最大公度，等等。最后，它等於 r_1 及 b 的最大公度，也就是等於 a 及 b 兩線段的最大公度。

如果 a 及 b 二線段是可公度的，則輾轉相截的过程不可能無

止境地繼續下去。因此，必定得出：某一剩余 r_m 含於前一个剩余 r_{m-1} 中整数次而無剩余，也就是，得出 a 及 b 二線段的最大公度。

实际上，如果二線段有某一線段 s 为其最大公度，則不能再截出小於 s 的剩余，否則就与定理 2 相違背。

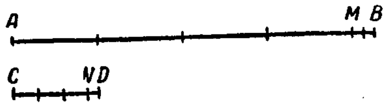

圖 8.

例 如圖 8，設已知二線段 AB 及 CD。線段 CD 含於線段 AB 中四次而有一剩余 MB。線段 MB 含於線段 CD 中三次而有一剩余 ND。最后，線段 ND 含於線段 MB 中恰为二次。於是，

$$AB=4CD+MB,$$
$$CD=3MB+ND,$$
$$MB=2ND$$

或

$$AB=4(3MB+ND)+2ND=4(6ND+ND)+2ND=30ND,$$
$$CD=3\cdot 2ND+ND=7ND。$$

可見線段 ND 是 AB 及 CD 二線段的最大公度。

§3. 不可公度的線段 由前節我們已經知道二線段的公度可用剩余輾轉相截求得。但实际上，有时繼續輾轉相截，永远能得到一个小的剩余。这就得不出二線段的公度。

沒有公度的兩条線段叫做不可公度的。下一定理就指出了不可公度線段的存在。

定理 **正方形的对角線与它的边是不可公度的。**

已知 如圖 9，正方形的边 $AB=a$，而它的对角線 $AC=d$。

求証 a、d 二線段是不可公度的。

証明 我們用輾轉相截法來求 a、d 二線段的公度。以 A 为中心，AB 为半徑作弧，在对角線 AC 上截得 M 点，顯然 $AM=AB$。

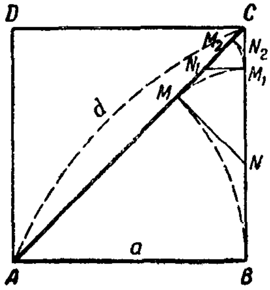

圖 9.

因为 $AB<AC$（同一三角形的直角边小於斜边），且 $2AB>AC$（三角形二边的和大於第三边），於是，$AM=AB$ 可在 AC 上截得一次，並得剩余 $r_1=$ $=MC<AB$。卽得 $d=a+r_1$，而 $r_1<$ $<a$。

由求二線段的公度的規則（§ 2）应当在 AB 边上截取剩余 r_1。但 $AB=$ $=BC$，因此剩余 $r_1=MC$ 可以在 BC 上截取。由 M 点作直線 AC 的垂線 MN，得 $MN=MC$（因为它們是等腰直角三角形的直角边），和 $MN=NB$（因为它們是由圓外一点到圓的切線）。三角形 MNC 是正方形的一半，这个正方形的边是剩余 $MC=r_1$ 而对角線是 NC。如所見，我們又要去求正方形的边及它的对角線的最大公度。剩余 $r_1=MC$ 含於原正方形的 a 边中兩次之后並有剩余 $r_2<r_1$。因此，$a=2r_1+r_2$。在斜边 NC 上由 N 点起截取直角边 MN；它在 NC 上截得一次，並得剩余 $M_1C=r_2$。現在应当在前一个剩余 $MC=r_1$ 上截取剩余 $M_1C=r_2$。为此，在 M_1 点作直線 BC 的垂線 M_1N_1。三角形 M_1N_1C 是正方形的一半，这个正方形的边为剩余 $M_1C=r_2$ 而对角線为 N_1C。

由此可知，M_1C 含於 MC 線段中兩次之后有一剩余 $M_2C=$ $=r_3<r_2$。因此，$MC=r_1=2r_2+r_3$。以后也照这样去推断，我們遂得：每一个剩余含於其前一个剩余中兩次之后还有剩余，也就是，我們永远得不出任何一个剩余含於其前一个剩余中恰为整数次而無剩余。於是，a 和 d 兩个線段沒有公度，卽它們是不可公度的。

§ 4. 关於線段度量的概念 为了度量一個線段，例如 AB，我們取任意一个線段 CD 做为度量單位，並在被度量的線段 AB

上尽可能地截取它。如在前兩節所解释过的，兩个線段可能是可公度的，也可能是不可公度的。因此，被度量的線段 AB 及度量單位 CD 可能是可公度的，也可能是不可公度的。我們就这兩种情形來討論。

第一种情形　設線段 AB 及 CD 是可公度的。我們要去求 CD 及 AB 兩線段的最大公度。如果 CD 含於 AB 中正好若干次，例如恰为八次，於是就說線段 AB 的長等於 8 个單位。这样，在这种情形，線段 AB 的長表成一个整数。

如果 AB 及 CD 兩線段的最大公度小於 CD。則这个最大公度含於这兩个線段中都恰为整数次。例如，設最大公度含於線段 CD 中恰为六次，而在線段 AB 中恰为三十一次。於是就說，線段 AB 的長等於分数 $\frac{31}{6}=5\frac{1}{6}$。

这样，当線段 AB 及度量單位 CD 是可以公度的时候，線段的長卽表成一个整数或分数，也就是**有理数**。通常，線段的長都表成十進小数。为了把線段 AB 的長表成十進小数，將度量單位 CD 分成 10、100、1000、等等个等分，並且求出在線段 AB（如果它小於 CD）中包含多少个这样的等分；或是当 CD 在 AB 上截取一次或几次以后，求出在所得的剩余中包含多少个这样的等分，而这个所得的剩余是小於 CD 的。

由於可公度的線段有公度，所以如果 AB 及 CD 兩線段的公度是 CD 的 0.1，或 0.01，或 0.001 等等部分的話，其結果可能是有尽十進小数或者是循环小数。

事实上，設線段 AB 含線段 CD 兩次，而在所得的剩余中含有兩个 CD 的十分之一及五个 CD 的百分之一部分（沒有剩余）。在这种情形，CD 線段的 0.01 就可做为 AB 及 CD 兩線段的公度，並且 AB 的長可表成数目 2.25，也就是，$AB=2.25\,CD$。化 2.25

为最簡分式，得 $AB=\frac{9}{4}CD$。因此，AB 及 CD 兩線段的最大公度就是 $\frac{1}{4}CD$，而 $0.01\,CD$ 是这兩个線段的全体公度中的一个。如果 AB 線段度量的結果得出循环小数，則由於任何循环小数可化为最簡分数，所以 AB 線段的長也可以表成最簡分数。

例如，假定我們去度量線段 AB 时，对於取做單位的 CD，得出小数 $5.1666\cdots$，將这个小数化成最簡分数，求得：$AB=5\frac{1}{6}CD$。在这种情形，線段 AB 及度量單位 CD 的最大公度是 $\frac{1}{6}CD$。

今考慮在 AB 及度量單位 CD 是不可公度的情形，关於將線段 AB 的長表为十進小数的問題。

第二种情形　設線段 AB 及度量單位 CD 是不可公度的。在線段 AB 上截取線段 CD（圖 10）。由阿基米德公理（§ 1）可以求得这样一个数目 n，使 $n\cdot CD<AB$，$(n+1)\,CD>AB$。例如，假設 $n=2$，就是 $2CD<AB$ 且 $3CD>AB$。設 $2CD=AM_1$ 且 $3CD==AN_1$（圖 10），並分線段 $M_1N_1=CD$ 为 10 等分。仍然由这个公

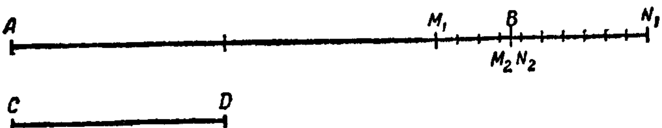

圖　10.

理可以求得这样一个数，例如 3，使得 $\frac{3}{10}CD<M_1B$ 且 $\frac{4}{10}CD>>M_1B$。令 $\frac{3}{10}CD=M_1M_2$ 且 $\frac{4}{10}CD=M_1N_2$。分線段 $M_2N_2==\frac{1}{10}CD$ 为 10 等分，並且設所得的線段 M_2N_2 的 $\frac{1}{10}$ 分，也就是 CD 的 $\frac{1}{100}$ 分，含於線段 M_2B 中六次之后卽有一个小於線段 CD 的 $\frac{1}{100}$ 分的剩余。由於 AB 及 CD 是不可公度的，所以当使用單