教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

实变函数论

主编 许凤

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

实变函数论

主编 许 凤

中央广播电视大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论/许风主编．—北京：中央广播电视大学出版社，2003．1

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材．数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7-304-02353-8

Ⅰ．实… Ⅱ．许… Ⅲ．实变函数论—电视大学—教材 Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 001780 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

实 变 函 数 论

主编 许 风

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京首师大印刷厂

开本/850×1168 1/32 **印张**/12.5 **字数**/300 千字

版本/2002 年 11 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

印数/0001-5000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **（本书如有缺页或倒装，本社负责退换）**

网址/http://www.crtvup.com.cn

书号：ISBN 7-304-02353-8/O·125

定价：17.00 元

内 容 提 要

本书共分五章. 第 1 章和第 2 章讲集合与点集, 介绍了集合的运算与基数的概念, 讨论了 n 维空间中开集、闭集的性质. 第 3 章和第 4 章讲测度理论, 讨论了可测集和可测函数的性质. 第 5 章讲勒贝格积分, 介绍了勒贝格控制收敛定理、富比尼定理、微分与积分的关系. 为便于自学, 每章最后都有学习指导, 书后给出了各节的练习题和各章的习题及自测题的解答或提示.

本书可供师范院校、电大学生和自学者使用.

序　言

21 世纪，中国全面地进入了一个新的发展与竞争的时代. 归根结底，竞争是人才的竞争与知识的竞争. 团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体；个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人. 在这竞争的时代，青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识. 正是在这种环境下，中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求，联合开办了（师范类）本科数学与应用数学专业.

本专业的开办，为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路，而知识的获取，要靠学习者的辛勤劳动. 可以说，学习是一项艰苦的劳动. 这项劳动与其他劳动的一个显著区别是：学习不能由别人代替来完成，甚至也不能合作完成. 特别是数学知识的学习，必须经过学习者一番夜不能寐的（有时甚至是痛苦的）冥思苦想，才能掌握数学的本质，才能体会到数学的真谛，才能达到由此及彼、由表及里的境界.

数学是众多学科中最为抽象的学科. 正是因为它高度的抽象性，决定了它广泛的应用性，同时也造成了数学学习的困难. 毋庸讳言，相对其它学科来说，学习数学需要花费更多的时间与精力. 但是，数学并不是高不可攀的科学. 数学的学习如同攀登高楼一样，只要一步一个台阶（而不是两个台阶，三个台阶……，更不是飞跃）地拾级而上，我们并不觉得太困难即可攀上高楼.

同样，只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识，再去学习下一步的内容，循序渐进，数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国.

作为教师，要充分地考虑到学生在自学过程中遇到的各种困难. 我们在教材的编写中，尽最大可能地使教材通俗易懂，由易到难，深入浅出，便于自学. 适当地做出一些注释，引导学生深入理解知识. 每章开始给出本章学习目标和导学，每章的结尾做出本章的总结，指出本章的重点及难点. 并安排了学习辅导内容，介绍典型例题，同时配备了自测题目.

中央广播电视大学与东北师范大学联合开办的本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段. 我们的教师首次编写这套教材，一切处于探索的过程中. 因此，这套教材难免有这样或那样的不妥之处. 我们热情地欢迎本套教材的读者，提出宝贵的批评意见和改进的建议，使我们的教师及时地改进这套教材，以提高后面学生的学习效果.

史宁中

于长春

2002 年 4 月 25 日

前　言

实变函数论是高等学校数学与应用数学专业的一门重要的基础课，是数学分析中微积分理论的深入和发展，是用点集分析的方法建立 n 维欧氏空间中函数的分析学. 它的主要任务是使读者掌握抽象分析的基本思想和方法，加深对数学分析及中学有关数学内容的理解，同时为进一步学习现代数学打下必要的基础.

实变函数论的主要内容是勒贝格测度和勒贝格积分理论，包括集合与点集、勒贝格测度与勒贝格积分等.

根据电大远距离教育的特点，为适应以业余自学为主的开放办学的教育形式，我们在教材编写中力求做到由浅入深、循序渐进. 实变函数虽然是数学分析内容的深入和继续，但在思想方法上却有着较大的飞跃，它比后者更抽象、更理论化. 为了便于读者自学，每章开头都给出本章的学习目标、学习中的建议和应注意的问题；每章的后面有小结和学习指导. 各章习题的选取尽量做到难易适中，以有助于读者对概念和定理的理解和掌握.

由于实变函数这门课程内容抽象，推理严谨，初学者在做题时常常“无从下手”，这给自学带来一定的困难. 因此，我们在书后给出了各节的练习题和各章的习题及自测题的解答或提示，希望读者在独立思考的基础上参看这些解答.

本书包括了教材和学习指导两部分内容. 教材的第 3，4，5 章及全书的练习题、习题、自测题的解答由许凤执笔，教材的

第1，2章及其学习指导由陈卫宏执笔，第3，4，5章的学习指导由顾静相执笔．全书最终由许凤修改、整理定稿．书中标有*号的内容不作教学要求，供学有余力的读者参考．

在本书编写的过程中，参考、引用了书末所列参考文献中的大量内容，在此一并申明并向各书的作者致谢．中国航空航天大学孙善利教授、北京师范大学丁勇教授、中央广播电视大学孙天正教授对本书原稿进行了仔细的审阅，提出了许多宝贵和详尽的修改意见，对作者修改定稿有很大帮助，我们在此表示感谢．

编　者

2002年8月

目　　录

第1章 集　合

研究集合一般性质的数学分支称为集合论．集合论是19世纪末和20世纪初才发展起来的，德国数学家康托(G. Cantor)是这个理论的奠基人．集合的概念与思想已经渗透到所有的数学分支，并成为近代数学的基础，也是实变函数论的基础．在本章中根据本课程的需要介绍集合论的一些基本知识．

学习目标

1．理解集合的并、交、差、补等概念，熟练掌握集合的各种运算法则，掌握证明两个集合相等的一般方法．

2．了解基数的概念，掌握证明两个集合对等的方法，会用伯恩斯坦(F. Bernstein)定理．

3．掌握常见的可列点集与具有连续基数的点集以及它们的运算的性质．

导　学

本章主要内容与学习时应注意的问题有以下几点：

1．除集合的有关概念和一般运算外，请读者留意笛·摩根(De Morgan)公式以及差集和补集的关系($A \setminus B = A \cap \complement B$)．

2. 集合的基数是有限集合“元素个数”的推广. 伯恩斯坦定理的证明只需作一般了解,主要掌握它在证明两个集合对等中的作用.

3. 可列基数与连续基数的定义以及它们的运算和常见的例子.

思　考

学习本章请读者考虑两个问题:一是有限集与无限集的区别是什么,二是基数的运算有哪些规律.

1.1　集合及其运算

本节主要介绍集合的有关概念及集合的并、交、补运算.

1.1.1　集合的概念

集合的概念是数学中的原始概念之一,就像几何学中的“点”、“线”、“面”一样,只能用一组公理去刻画,但就我们目前的实际应用来说,通过朴素的方法给集合一种比较恰当的描述已是足够的了.

关于集合,我们给予如下描述:

凡具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体就是一个**集合**(或**集**),其中每一个个体事物称为这个集合的**元素**(或**元**).

集合的概念在数学中是到处可见的,如

“自然数的全体”,

“平面上过原点的一切直线”,

“方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根的全体”，

“$[a,b]$上连续实值函数的全体”，

“开区间$(0,1)$中点的全体”，

等等都是集合．在理解集合概念时，应注意以下几点：

(1)关于集合的描述必须是“确定”的．任何事物对于一个集合来说，或者是该集合的事物，或者不是该集合的事物，二者必居其一，但不可兼得．例如，“与 10 接近的实数”是不是集合呢？在这里无法判断一个数，比如 9，究竟是算接近于 10 的数还是不算接近于 10 的数，因此它不是集合．

(2)同一集合中的两个元素必须是“有区别”的，即同一集合中的任意两个元素一定是不同的．例如，方程 $x^3+x^2=0$ 的根的集合为$\{0,-1\}$，而不能写成$\{0,0,-1\}$．

(3)集合中的元素一般无顺序可言，例如，集合$\{1,2,3\}$与$\{2,3,1\}$是同一集合．

通常我们用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合，$\mathbf{N}$ 表示全体正整数集合．

一般地，我们用大写字母 A,B,X,Y 等表示集合，用小写字母 a,b,x,y 等表示元素．

设 A 是一集合，a 是一事物，若 a 是 A 中的一个事物，则称 a 为 A 的元素，或 a 属于 A，记作 $a\in A$．若 a 不是 A 中的一个事物，则称 a 不是 A 的元素，记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a\notin A$．

例如，设 $\mathbf{Q}$ 是有理数集合，则 $1/2\in\mathbf{Q}$，而$\sqrt{2}\overline{\in}\mathbf{Q}$．

不含任何元素的集合称为**空集**．例如，

“方程 $x^2+1=0$ 的实根的全体”

就是空集．我们用$\varnothing$表示空集．

只含有限个元素的集合称为**有限集**．空集也是有限集．不是

有限集的集合称为**无限集**.

要具体地指出一个集合与组成它的元素,常用的表示方法有下列几种.

(1)列举法. 如果集合 A 的元素 $a,b,c,\cdots$ 能够一一列举出来,我们可以把这些元素放在花括号{ }里面,并用逗点把它们彼此分开. 这样,A 可表示为$\{a,b,c,\cdots\}$. 这样的记法叫做列举法. 例如,

正整数集合:$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

方程 $x^2-1=0$ 的根的集合:$\{1,-1\}$.

(2)描述法. 用描述集合元素的共同特征来表示集合的方法叫做描述法. 如以

$$\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}\text{或}\{x : x\text{ 具有性质 }P\}$$

表示具有性质 P 的事物组成的集合. 例如方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示为

$$\{x \mid x^2-3x+2=0\},$$

即集合$\{1,2\}$. 而

$$\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\} \quad (\varepsilon>0)$$

则表示与 x_0 距离小于正数 ε 的所有实数组成的集合,即开区间$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

设 $f(x)$是集合 E 上的实值函数,则对任意实数 c,

$$E[x \mid x\in E,f(x)>c]$$

表示 E 中使函数$f(x)$的函数值大于 c 的所有自变量 x 组成的集合.

(3)图示法. 用一个圆圈、椭圆或矩形来表示一个集合,而把集合的元素写在圈子里面. 有时也直接用圈子周界上的点和内部

的点来表示集合的元素. 例如用图示法表示集合

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<4, x+y>1, x-y>-1\}. \quad (1.1.1)$$

因为满足 $x^2+y^2<4$ 的点在圆 $x^2+y^2=4$ 的内部,满足 $x+y>1$ 的点在直线 $x+y=1$ 的右上方,满足 $x-y>-1$ 的点在直线 $x-y=-1$ 的右下方,所以式(1.1.1)所表示的集合就是图 1.1 的阴影部分(不包括周界).

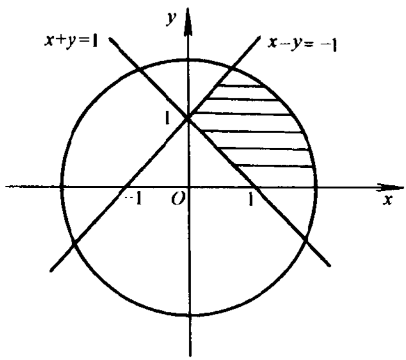

图 1.1

图示法具有直观性,它对于我们直观地掌握集合有关概念和理论是有帮助的.

注意:(1)只有一个元素 a 的集合记作 $\{a\}$. a 与 $\{a\}$ 的含义不同,a 表示元素,而 $\{a\}$ 则表示由一个元素 a 组成的集合,称为单元素集.

(2) $\{a,a,a,b,b\}$ 并不表示有五个元素的集合,它只含有两个元素 a 和 b. 这个集只能表示为 $\{a,b\}$,不能表示为 $\{a,a,a,b,b\}$.

1.1.2 子　　集

定义 1.1.1 (1)设 A,B 是二集合,若属于 A 的元素都属于 B,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

(2)设 A 是 B 的子集,而 B 中又有元素不属于 A 时,称 A 为 B 的**真子集**.

(3)若 A 是 B 的子集,同时 B 又是 A 的子集(即 A 和 B 由相同的元素组成),则称 A 和 B **相等**,记作 $A=B$. 否则称 A 和 B 不相等,记作 $A\neq B$.

例如,正整数集 $\mathbf{N}$ 是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的子集,并且是真子集. 又,若设 $A=\{x\mid x$ 是 $x^2-1=0$ 的根$\}$,$B=\{-1,1\}$,则 A 是 B 的子集,同时 B 又是 A 的子集,所以 $A=B$.

注意:(1)空集是任何集合的子集,即对任意的集合 A,总有 $\varnothing\subset A$.

(2)从属关系"$\in$"与包含关系"$\subset$"是两个不同的概念,不能混淆. 前者指的是集合的元素与集合本身的关系,后者则是表示两个集合之间的关系. 例如,设 $A=\{a,b\}$,a 是 A 的一个元素,$\{a\}$ 是 A 的一个子集,分别记作 $a\in A$,$\{a\}\subset A$. 而写法 $a\subset A$ 和 $\{a\}\in A$ 都是错误的.

关于集合的包含关系有下面的定理.

定理 1.1.1 对任意集合 A,B,C,恒有

(1)自反性 $A\subset A$;

(2)反对称性 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则 $A=B$;

(3)传递性 若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

证 由定义 1.1.1 立刻可得到.

需要指出,上述定理中(2)是证明两个集合相等最常用的方法,要很好地掌握和运用.

1.1.3 集合的运算

定义 1.1.2 设 A,B 是两个集合,则 A 中的元素和 B 中的元素全体所组成的集合称为 A 与 B 的**并集**或 A 与 B 的**并**,记作 $A\cup B$(图 1.2),即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 和 B 的那些元素所组成的集合称为 A 与 B 的**交集**或 A 与 B 的**交**,记作 $A\cap B$(图 1.3),即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

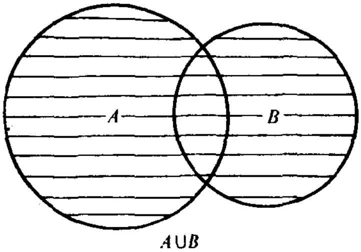

图 1.2

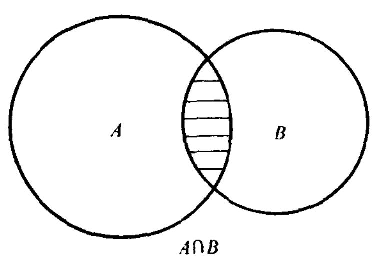

图 1.3