

工程岩石力学中的解析 与数值计算方法

[英] E. T. 布朗 主编

科学出版社

1991

工程岩石力学中的解析 与数值计算方法

余诗刚 王可钧 译

杨林德 袁建新 校

科学出版社

1991

内 容 简 介

本书由前国际岩石力学协会主席E. T. 布朗 主编, 论述了工程岩石力学问题的特性和相应的解析与数值计算方法, 集理论、计算、工程应用于一体, 着重讨论了弹性理论的某些应用、二维边坡稳定性分析、岩土结构的离散元模型、地下洞室设计所用的边界单元法及其耦合计算方法, 以及利用块体理论对无限块体系统进行的稳定性分析。全书共分六章, 各章由国际上相应专业领域的学科带头人撰写, 介绍了各自领域的最新成果。

本书可供从事工程力学(特别是岩土力学)和应用数学研究的科技人员、研究生以及相应专业的高等院校师生参考。

E. T. Brown ed.,
ANALYTICAL AND COMPUTATIONAL METHODS
IN ENGINEERING ROCK MECHANICS
Allen & Unwin Ltd., 1987

工程岩石力学中的解析 与数值计算方法

(英) E. T. 布朗 主编

余诗刚 王可钧 译

杨林德 袁建新 校

责任编辑 杨家福

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100707

武汉测绘科技大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年5月第一版 开本787×1092mm 1/16

1991年5月第一次印刷 印张: 12 1/2

印数: 1500 字数: 276 000

ISBN 7-03-002974-7/TB·97

定价: 8.00元



174/3/7/05

序

J.W.布雷1923年3月26日生于英格兰的布里斯托(Bristol)。在伦敦大学学习期间,他是一个循规蹈矩的学生,攻读土木工程专业,并在1943年获得该校头等优秀生的荣誉称号。大学毕业后,他即在北安普敦(Northampton)工业大学(现在的城市大学)土木工程系担任讲师。1947—1950年,他是伦敦皇家学院的研究生。由于他对大体积混凝土中的温度分布所作的研究获得成功,得到了博士学位。布雷发表的第一篇文章报道了在这方面所做的工作^[1]。完成博士学位后,布雷又回到讲台,开始是在昆玛丽(Queen Mary)学院,而后在北安普敦工业大学,1953年至今则一直在帝国学院任教。

作为一名教员,布雷起初在帝国学院采矿系为采矿工程专业的大学生讲授的是基本工程科学知识。那时还没有专门的岩石力学学科,在采矿系的课程中也没有岩石力学课程。然而他能应用工程力学的原理和方法热心地研究他的同事们感兴趣的一些问题,由此自然地将岩石力学引入了全系的教学和研究活动。布雷本人的兴趣并不限于研究岩石力学。他在帝国学院发表的第一篇文章涉及的实际上是由他首创的刚性框架分析的电模拟法^[2]。有趣的是布雷关于大体积混凝土中温度分布的文章^[1]和后来关于通风分析的文章^[6]介绍的都是最早建立的使重要工程问题获得数值解的新方法。虽然布雷后来从事的工作主要是研究工程岩石力学领域中的范围广泛的课题,但他仍然在其研究生涯中保持了早年的兴趣,对不能找到解析解的课题建立了行之有效的数值算法。

布雷对岩石力学的研究起初主要是分析地下洞室围岩的二次应力、位移和屈服区^[3-5, 10]。后来他又很快将兴趣转向不连续性对岩体性态和岩石洞室稳定性的影响。布雷早年不像有些人那样急于从事写作,但在60年代中期,他发表了一系列有创见的关于不连续岩体力学的文章^[7-9]。这些文章在该学科的文献中占有重要地位。

1966年,在E.Hoek博士的领导下,帝国学院建立了跨系的岩石力学课题。同年布雷升任高级讲师,并于1970年起参加岩石力学课题的研究。他成为非常成功的工程岩石力学课程(硕士课程)的负责人,并对由E.Hoek提出且得到产业部门资助的课题——岩石边坡稳定性研究作出了重大贡献。这一工作在许多文章中都有报道^[11, 13, 14],其中最为重要的内容已收入专著《岩石边坡工程(Rock Slope Engineering)》^[12]。该书于1974年出版,并于1977年和1981年两次再版。1979年,由于那本书对促进工程地质和岩石力学的发展作出了杰出的贡献,Hoek和布雷被美国地质协会授予E.B.Burwell奖。

布雷在创造性地建立多种新颖的边坡稳定性分析法的同时,对岩石力学的基础课题和岩石地基与地下洞室分析方法的研究也卓有成效。70年代中期,布雷对发展边界元方法表现了极大的关心,并与许多同事和研究生一起开展了研究^[15, 16, 19, 21]。由于在1978年发表的两篇有关边界元方法的文章有创造性的贡献,B.H.G.Brady和布雷于1980年被美国岩石力学委员会授予基础研究奖。此外,布雷也擅长于塑性理论,并已将其用于岩体性质、边坡稳定、地基基础和地下洞室工程的研究^[17, 18, 20, 22]。

布雷几乎总是在从事工程岩石力学的所有基础课题和应用课题的研究。然而在他多产的、新颖而又简明的解法中,公开发表的仅是一小部分。布雷的个性是,一旦解决了一个问题,就马上迎接下一个问题的挑战,而不是撰写著作宣扬自己。在岩石力学领域工作的全部

时间内,他的多数时间花在思考同事、访问者或学生们提出的问题上,并在几天内清晰地写出解答。他的多数研究工作的唯一“出口”,是对硕士生的讲课,以及跟研究生的交谈。很多研究生正是根据布雷的想法从事研究工作,并取得成果。

布雷在工作中表现出的特点是工程学科的基础知识全面,思路和表达清晰,处理技巧几乎无人可以与之相比。这些特点在他对所讲课程的组织和叙述方法上也有所反映。他常花大量时间备课,选用自己的公式推导过程和表达方法讲解,而不是照搬课本上的内容。布雷认为课本上的许多内容即便不是错误的,也是不能令人信服的,并且难于为学生所理解。几乎无一例外,布雷教过的学生都认为他是他们大学里最杰出的教师。

布雷是个缄默和谦虚的人,从不追求得到世界的承认和物质奖励。他不喜欢旅行,始终谢绝到会议或国外的大学去讲演,也不承担咨询顾问工作。他已不止一次地有机会成为岩石力学界的领导人,但他一点也没有企业家的热情,对组织有关活动、晋级和行政管理事务毫无兴趣,总是宁可把时间都花在教学和研究工作上。1979年,伦敦大学多少有些过迟地授予布雷岩石力学指导导师的职称。1984年9月,在他形式上退休之际(我说“形式”上,是因为可以担保布雷绝不会从他为之献身的知识追求中完全退休),他得到了荣誉指导导师的头衔,并且成为帝国学院的高级研究员。

布雷的同事、学生和岩石力学委员会对布雷极为尊崇,一致认为要以一种特别的方式来标志他在形式上的退休。大家欣然同意,认为最合宜的方法是以他的名义举行一次学术讨论会。1985年7月23日,“J.布雷学术讨论会”在帝国学院举行,他过去和现在的大约50名在岩石力学部门工作的同事和研究生参加了会议。布雷的一些有杰出成就的同事或学生B.Brady, P.Cundall, D.Goodman, E.Hoek, 以及他本人都在讨论会上发表了涉及现代工程岩石力学重要问题的一流水平的讲演。所有讲演者都本着对布雷的崇敬,尽其所能地提供最好的研究成果。这次讨论会在学术上和社交上都非常成功。

本书是布雷学术讨论会讲演稿的扩充,并增加了导论一章,以期阐述和展望本书的主题。选择“工程岩石力学中的解析与数值计算方法”作为书名,是因为它确切地反映了布雷进行的研究工作的特色,并反映了目前岩石力学中至关重要的问题。本书不是教科书,也不打算涉及这一主题的所有方面,而仅拟集中介绍几种对工程岩石力学特别重要的、别具一格的解析和数值计算法。预期这本书将适用于该学科的教师、大学高年级学生、研究人员和经验丰富的实际工作者。发行这本书的全部收入将用于为帝国学院工程岩石力学硕士课程优等生提供年度奖金,因为布雷在1970—1984年的漫长时间内曾经卓越地指导了这组课程。

E.T. 布朗

1986年2月于伦敦

J.W.布雷的有关出版物

- [1] 1949 Ross, A. D. and J. W. Bray. The prediction of temperatures in mass concrete by numerical computation. *Mag. Concr. Res.* 1, 9-20.
- [2] 1957 Bray, J. W.. An electrical analyser for rigid frameworks. *The Structural Engineer* 30, 297-311.
- [3] 1962 Low, I. A. B. and J. W. Bray. Strain analysis using moiré fringes. *The Engineer* 213, 566-9.
- [4] 1963-4 Bray, J. W.. Discussion on 'Some problems of strata control and support

- in pillar workings' by A. Bryan and J. G. Bryan, *Trans. Instn. Min. Engrs* **123**, 262-3.
- [5] 1964 Bray, J. W.. Discussion on 'A dynamic or energy approach to strata control theory and practice' by R. A. L. Black and A. M. Starfield. *Proc. 4th int. conf. strata control rock mechs*, Columbia University, New York, 463-7.
 - [6] 1964 Bray, J. W. and I. M. Plummer. Methods of ventilation analysis. *Min. Mag.* **110**, 224-37.
 - [7] 1966 Bray, J. W.. Limiting equilibrium of fractured and jointed rocks. *Proc. 1st Congr. Int. Soc. Rock Mech.*, Lisbon, **1**, 531-5. Lisbon; Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
 - [8] 1967a Bray, J. W.. A study of jointed and fractured rock. Part 1: Fracture patterns and their failure characteristics. *Rock Mech. Engng Geol.* **5**, 117-36.
 - [9] 1967b Bray, J. W.. A study of jointed and fractured rock. Part 2: Theory of limiting equilibrium. *Rock Mech. Engng Geol.* **5**, 197-216.
 - [10] 1967c Bray, J. W.. The teaching of rock mechanics to mining engineers. *The Mining Engineer* **126**, 483-8.
 - [11] 1973 Hoek, E., J. W. Bray and J. M. Boyd. The stability of a rock slope containing a wedge resting on two intersecting discontinuities. *Q. J. Engng Geol.* **6**, 1-55.
 - [12] 1974 Hoek, E. and J. W. Bray. *Rock slope engineering*. London; Institution of Mining and Metallurgy (2nd edn 1977; 3rd edn 1981.)
 - [13] 1976 Bray, J. W. and E. T. Brown. A short solution for the stability of a rock slope containing a tetrahedral wedge. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **13**, 227-9.
 - [14] 1977 Goodman, R. E. and J. W. Bray. Toppling of rock slopes. In *Rock engineering for foundations and slopes 2*, 201-34, New York; American Society of Civil Engineers.
 - [15] 1978a Brady, B. H. G. and J. W. Bray. The boundary element method for determining stresses and displacements around long openings in a triaxial stress field. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **15**, 21-8.
 - [16] 1978b Brady, B. H. G. and J. W. Bray. The boundary element method for elastic analysis of tabular orebody extraction, assuming complete plane strain. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **15**, 29-37.
 - [17] 1978 Bray, J. W.. Discussion on 'Energy changes due to mining' by J. B. Walsh. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **14**, 218.
 - [18] 1982 Brown, E. T. and J. W. Bray. Rock-support interaction calculations for pressure shafts and tunnels. In *Rock mechanics: caverns and pressure shafts*, W. Wittke(ed.), **2**, 555-65. Rotterdam; Balkema.
 - [19] 1982 Austin, M. W., J. W. Bray and A. M. Crawford. A comparison of two indirect boundary element formulations incorporating planes of weakness. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **19**, 339-44.
 - [20] 1983 Brown, E. T., J. W. Bray, B. Ladanyi and E. Hoek. Characteristic line calculations for rock tunnels. *J. Geotech. Engng, Am. Soc. Civ. Engrs.* **109**, 15-39.
 - [21] 1983 Crawford, A. M. and J. W. Bray. Influence of the *in-situ* stress field and joint stiffness on rock wedge stability in underground openings. *Can. Geotech. J.* **20**, 276-87.
 - [22] 1986 Bray, J. W.. Some applications of elastic theory. This volume, ch.2.

目 录

序

第一章 导论	1
1.1 工程岩石力学问题的特性	1
1.2 连续介质模型和不连续介质模型	2
1.3 弹性	3
1.4 塑性	5
1.5 解析法	13
1.6 数值算法	14
参考文献.....	18
第二章 弹性理论的某些应用	24
2.1 引言	24
2.2 内部加载的圆孔	24
2.3 影响带	53
参考文献.....	72
第三章 二维边坡稳定性分析的一般方法	74
3.1 引言	74
3.2 几何计算	74
3.3 水压力计算	75
3.4 临界加速度 K_c 的计算	76
3.5 安全系数的计算	77
3.6 解的合理性校验	77
3.7 Sarma 分析法的计算机解	78
3.8 负应力问题	80
3.9 边坡排水	80
3.10 非线性破坏准则的考虑.....	81
3.11 建议的分析步骤.....	81
3.12 实例.....	82
参考文献.....	88
附录 Sarma非垂直条块分析的 BASIC 计算机程序	88
第四章 岩土结构的离散元模型	102
4.1 引言.....	102
4.2 离散单元法的难点.....	102
4.3 岩体的结构效应.....	108

4.4 颗粒土的结构效应	115
4.5 概要	124
参考文献	124
第五章 用于地下洞室设计计算的边界单元法及其耦合计算方法	126
5.1 引言	126
5.2 计算弹性连续体的边界单元法	127
5.3 计算含有控制性不连续面的边界单元法	131
5.4 边界单元法的应用	135
5.5 边界元-离散元耦合算法	137
5.6 模拟支护的结构单元法	143
5.7 结构元与边界元-离散元的耦合算法	146
5.8 边界元-有限元耦合算法	149
5.9 结论	152
参考文献	152
第六章 无限块体系统稳定性的块体理论分析	155
6.1 引言	155
6.2 节理岩体分析的输入数据	155
6.3 方法途径	156
6.4 组合关键块与节理锥	156
6.5 组合关键块的稳定性分析	161
6.6 最小稳定关键块	162
6.7 钳夹块体	162
6.8 组合凸块	164
6.9 组合块类型	166
6.10 节理锥功用	167
6.11 EP为最大尺寸时的稳定性条件	167
6.12 JP为最大尺寸时的稳定性条件	168
6.13 有几个自由表面的块体	168
6.14 最大不稳定块体的支护	170
6.15 最大关键块	171
6.16 隧道的最大关键块	172
6.17 隧道方向的选择	173
6.18 隧道关键块的完整分析	175
6.19 平行隧道之间的组合关键块	177
6.20 地下洞室稳定性的完整分析	178
6.21 节理形迹图与实际最大关键块	181
6.22 概要和结论	185
参考文献	186

第一章 导论

E. T. 布朗

1.1 工程岩石力学问题的特性

岩石力学是研究岩石和岩体力学性态的理论和应用的科学。它是力学的一个分支，主要研究岩石和岩体对其存在环境中的力场的响应^[16]。

在岩石中进行开挖，构筑结构物或在岩石上建造建筑物时，工程师们改变了岩石自然环境的力场。因此，**工程岩石力学**的课题涉及岩石和岩体对工程活动的响应。正如本书将阐述的那样，人们关心的问题通常是在岩石中产生的次生应力和位移，以及结构物的稳定性。然而必须认识到，在工程岩石力学的许多应用研究中，考虑水在岩体中的流动是至关重要的，热传导及其力学效应在某些情况下也起决定性作用。因此，对于某些问题，特别是对在地下处置放射性废料的设计问题，必须考虑热-水-力学效应的耦合作用^[6,1]。

对岩石和岩体的工程响应进行预测预报的工作非常重要，通常要贯穿整个设计工作的全过程。图 1.1 给出了有普遍意义的岩石工程设计过程的组成框图和逻辑关系。在本书中，我们关心的是在设计分析阶段和反馈分析阶段中采用的方法。应予指出，由设计分析作出预报的基础，是根据现场特性资料选定的岩体的地质力学模型。即使选定的分析方法或计算方法是合适的，现场特性资料的不足或岩体特性的可变化性仍可使岩体性态响应的预报不精确。

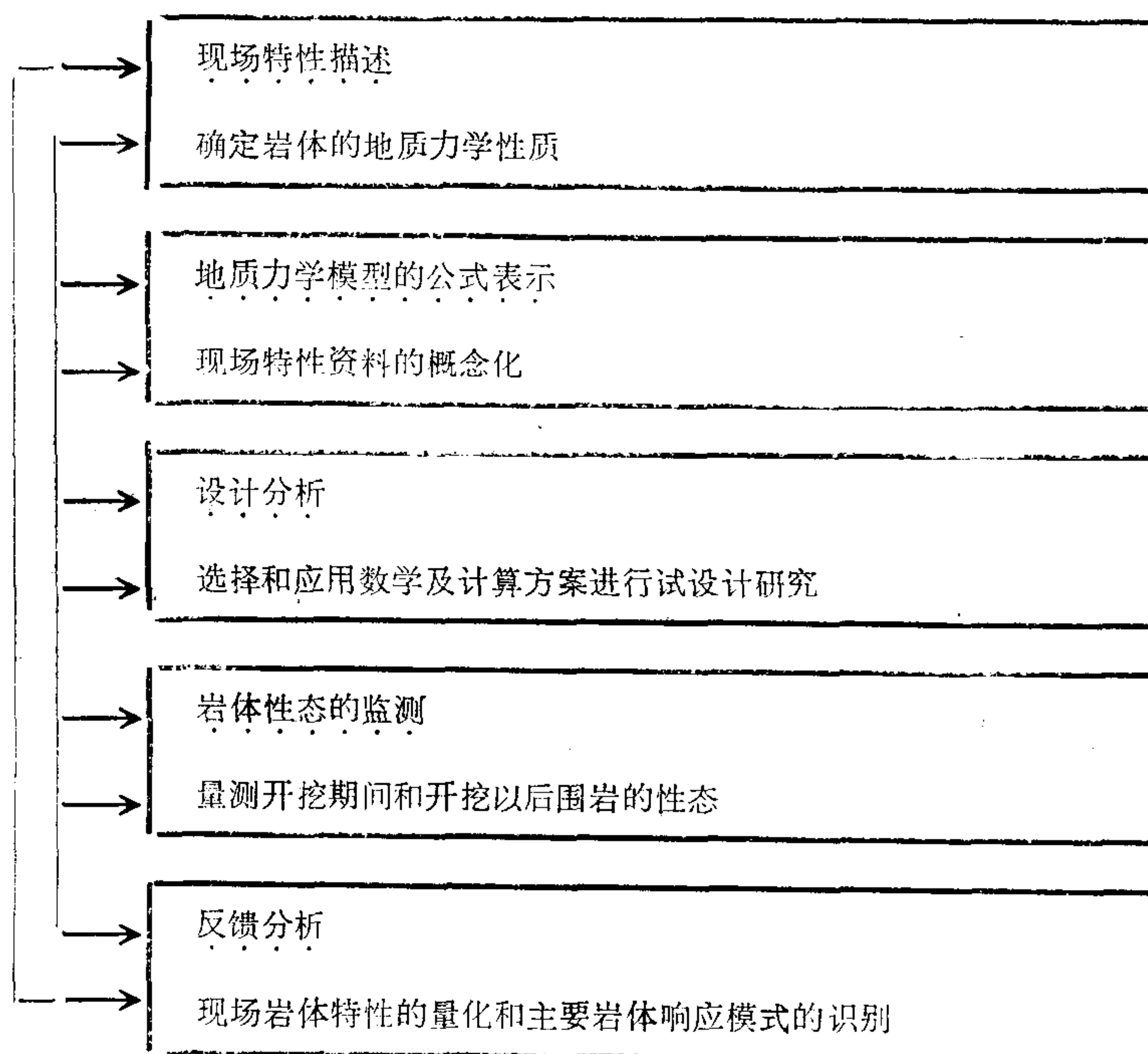


图1.1 工程岩石力学问题研究过程的一般方案

为此，现场监测、反馈分析和不断更新现场特性资料及地质力学模型，是任何有效的工程岩石力学问题分析过程的基本组成部分。

对岩体的工程响应事前作出可靠的或第一流的预报遇到的困难^[45]，主要来自岩体的不连续性和性质的可变化性。岩体包含的层面、节理、断层和具有的其它结构特征，不仅使岩体成为不连续体，而且常常控制它们的工程性态。此外，完整岩石材料本身的响应也是不易模拟的，因为它常具有各向异性和非线性的力学性态，抗拉强度低，容易受到风化作用的影响，并在遇水时性质可能发生变化。还有，由许多不同类型的岩石或性质随机变化的同一种岩石组成的非均质岩体材料，可影响特殊工程结构物的性态。由于难以对各种岩体性质可靠地赋值，设计分析中广泛进行了参数研究^[38]。出于类似的原因，在岩石描述和岩石工程设计中，概率分析法也已得到越来越多的应用^[64]。

1.2 连续介质模型和不连续介质模型

岩石与其它工程材料的区别，主要在于其内部存在不连续面。在选择具体岩石力学问题的解析解或数值算法时，首先要决定是否以隐式或显式考虑不连续性对问题的影响。发展不连续性及其影响的模拟方法，是工程岩石力学与其它工程力学分支的显著区别。

图1.2以简化的图式表示了不连续面间距与问题域尺度之间的对比关系对岩体性态模型选择的影响。Brady 在本书图5.1中给出了一个更为详细的例子，并在5.1节中作了描述。问题涉及的范围较大，岩体的不连续特性无关紧要时，可将其视为连续体。如果在问题涉及的区域内不连续面的数量非常多，间距非常密时，岩体也可视为具有“等效”岩性参数的连续介质。对于这两种情况，经典**弹性和塑性连续介质理论**都可采用。1.3和1.4节将阐述这些理论的基本原理。

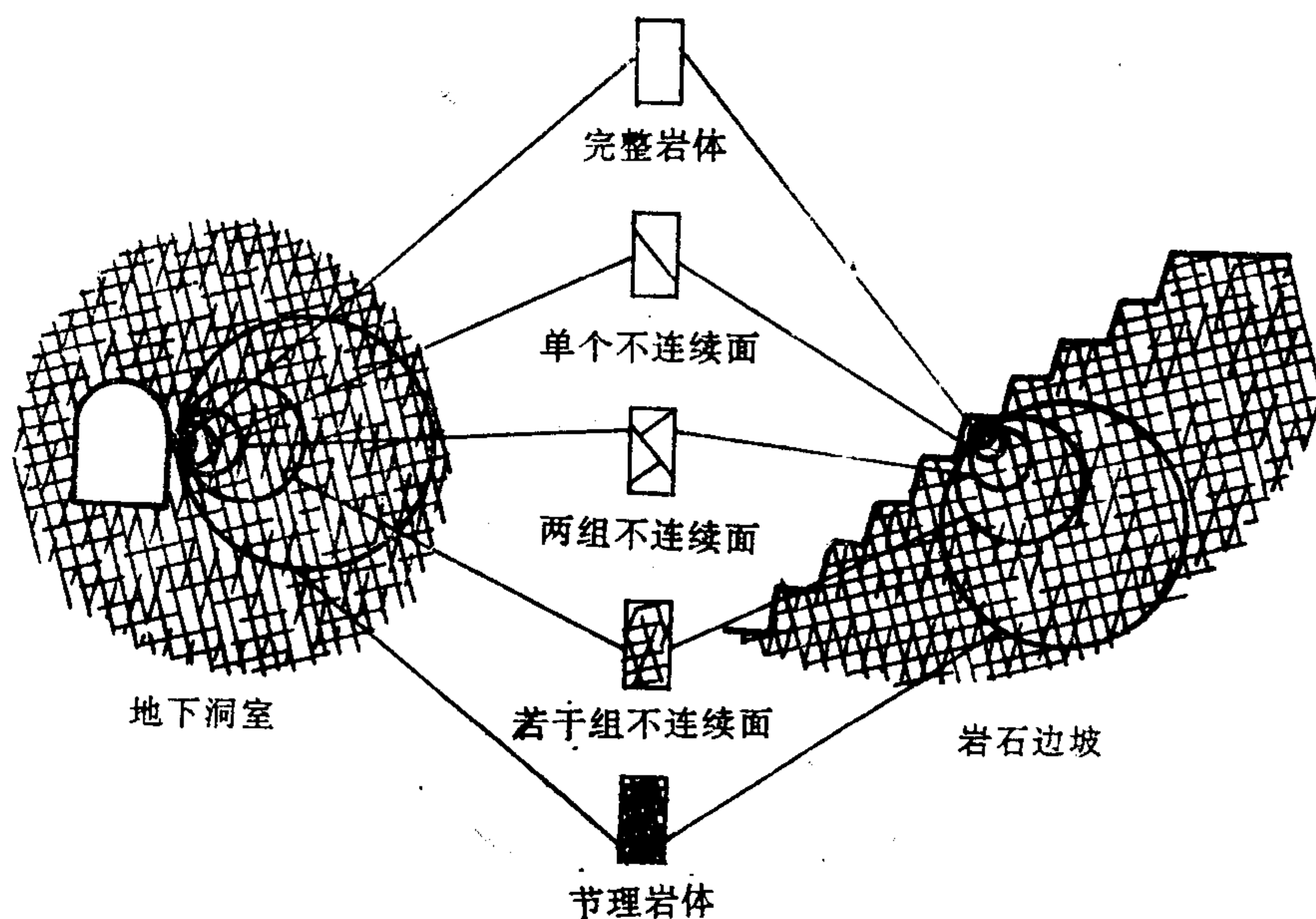


图1.2 在地下开挖或岩石边坡设计中，相对尺寸对岩体性态模型选择的影响^[43]

在需要考虑单个贯穿的不连续面或少量不连续面的影响时，解析方法或数值计算方法都可采用。人们已经采用诸如**极限平衡法**那样的假定，判断刚体是否沿着不连续面滑动，或者以弹性理论计算应力场和位移场，并评价在已知应力作用下沿不连续面滑动的可能性。

除上述情况外，另一类重要的问题是对区域由有限个离散的、相互作用的块体组成时的分析。目前已建立了几种研究这类**非连续体**的性状的方法^[20, 34, 46, 59, 60]。如图1.3所示，连续介质与不连续介质性状的主要区别，在于不连续介质的位移场可以不连续，各个块体可自由转动，并可沿着块体界面滑移或和其它块体分离。现有的最易于理解的不连续介质理论称为**离散单元法**，将由Cundall在第四章中进行介绍。

Brady在第五章中将这一方法作了发展，用杂交计算技术建立了耦合计算法。由Goodman和石根华^[34]建立并发展的**块体理论**，运用拓扑学和集合论的概念评价不连续岩体和各类岩体开挖的复杂的三维几何特性。块体理论的主要目标，在于提供一种方便而又严格的方法识别临界块体，这种临界块体是由含特定凌空面的岩体中的不连续面相互切割而成的。有关内容将在第六章中作介绍。

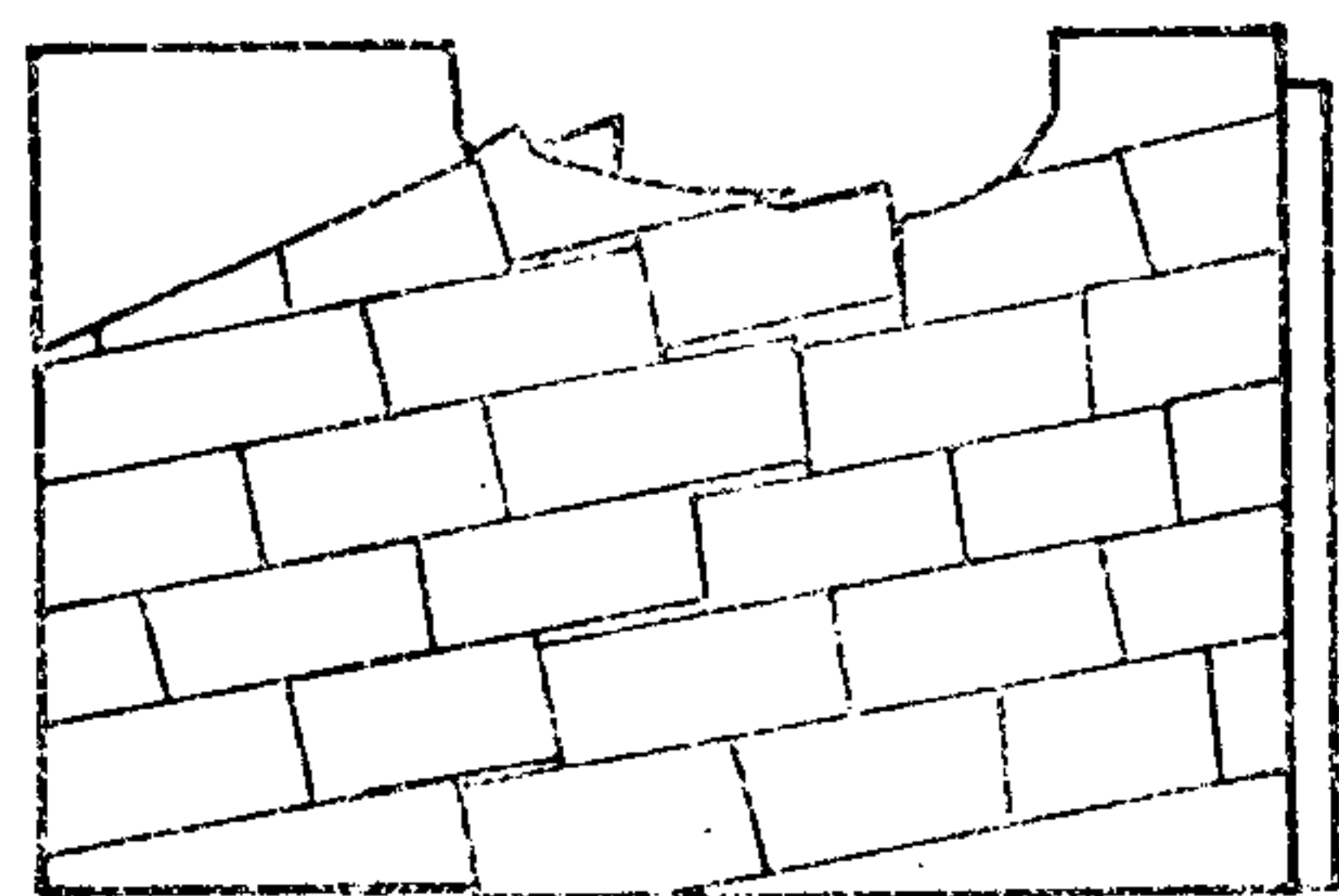


图1.3 块状岩体中围岩的不连续性态^[64]

1.3 弹性

基本连续介质理论，即数学弹性理论^[47]已被广泛用于计算由开挖或加载引起的岩体的应力、无限小应变和位移。显然，岩石和岩体并非总是处于弹性状态，也并非总是连续体。然而对于大量的工程问题，由将岩石视为均质各向同性的线弹性材料（Brady称之为HILE材料）进行的分析常可获得许多有用的解。如果有必要，计算中还可考虑材料的各向异性^[27, 81]和非线性弹性^[2, 8]。

在第二章中，Brady指出，在适当的场合弹性理论可用于分析工程岩石力学中的许多重要问题。例如对于地下开挖，可分析：

- (1) 洞室边界上的最大应力和最小应力；
- (2) 开挖引起的边界位移；
- (3) 开挖影响区的范围；
- (4) 高应力区的范围；
- (5) 开挖巷道时增加的应变能和释放的动能。

以弹性理论进行分析的工程岩石力学问题（包括本书介绍的内容）多数属于静态问题。动力加载或卸载问题，爆炸力学中波的传播问题等，也可作为弹性问题加以分析^[9, 44]。

在确定特定情况下的应力和位移的分布时，需要满足下述条件：

- (1) 已知边界条件；
- (2) 平衡微分方程；
- (3) 材料的本构方程；
- (4) 应变相容方程。

对于本书考虑的各类问题，已知边界条件是岩体中的初始地应力，以及由开挖或修筑结

构物引起的岩体表面的作用力或位移。工程岩石力学中遇到的主要难题之一，是确定开挖（或施工）以前问题域内岩体的初始地应力。对初始主应力的大小和方向所作的不合理假设，可使地下巷道边界应力的计算出现显著的误差^[7]。

弹性理论的静力平衡微分方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

式中， σ_{xx} ， σ_{yy} ， σ_{zz} ， τ_{xy} ， τ_{yz} 和 τ_{xz} 分别表示三维直角坐标系中的正应力分量和剪应力分量， X ， Y ， Z 分别为在坐标轴 x ， y 和 z 的正方向上每单位体积的体力。

线弹性本构关系的最普通的情况，是各应变分量为所有应力分量的线性函数，即

$$\{\epsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

或

$$\{\epsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\} \quad (1.2)$$

式中 $\{\epsilon\}$ 和 $\{\sigma\}$ 分别为由应变和应力的六个分量组成的列阵， $[S]$ 和 $[D]$ 为 6×6 的矩阵，两个矩阵中的元素分别表示柔度和刚度。

对于各向同性的线弹性材料，方程式（1.2）简化为众所周知的虎克定律。这时正应变的三个分量的表达式形如

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (1.3)$$

剪应变分量表达式的典型形式为

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (1.4)$$

式中 E 为杨氏模量， ν 为泊松比， $G = E/2(1 - \nu)$ ，称为材料的刚性模量或剪切模量。

弹性理论的基本前提，是弹性参数为常数，应力增量与应变增量的相互关系也符合方程式（1.2）。因此，弹性材料的受力变形性态与路径无关，卸荷后应变可完全恢复，呈能量守恒状态。

应变相容方程是使连续介质的位移场满足物理连续性要求的方程式。它们由形如式（1.5）的三个方程及形如式（1.6）的三个方程共同组成，即

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.6)$$

在工程岩石力学中，常将问题简化为**平面应变**问题。若变形仅限于 x ， y 平面，则有

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

此外，其余应变分量（ ϵ_{xx} ， ϵ_{yy} ， ϵ_{xy} ）将都不是 z 的函数。在这种情况下，如果体力为零，则由方程（1.1）和（1.3）—（1.6）可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (1.7)$$

上式表示各向同性弹性体的二维应力分布与介质的弹性性质无关，且平面应变问题和平面应力问题的应力分布相同。对于评价平面应变问题的应力分布（诸如等截面长隧道的应力分布），式(1.7)表明可用光弹性平面应力模型试验的结果作定性分析^[29, 40]。如式(1.7)所示，平面上的正应力之和满足拉普拉斯方程。本式为在早期以电模拟法获得板状采矿巷道围岩的弹性应力和位移解提供了基础^[58]。

为了得到平面弹性问题的解析解，必须在满足边界条件的前提下求解平衡微分方程和方程式(1.7)。Airy^[1]引入了应力函数 $U(x, y)$ ，使其满足

$$\sigma_{xx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

这些表达式在体力为零时自动满足平衡微分方程。将它们代入方程式(1.7)，可得双调和方程

$$\nabla^4 U = 0 \quad (1.9)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

已经建立了几种由Airy应力函数得出特定问题的解的方法。例如，多项式

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} x^m y^n$$

可用于求解对边界施加连续荷载的问题。对于以柱面极坐标公式表示的轴对称问题，合适的应力函数形式为

$$U = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr + D$$

式中 r 为径向坐标。

对于平面问题，复变函数理论为解双调和方程提供了最为完善和有力的方法。Jaeger和Cook^[44]详细论述了这类方法。Salamon^[67]和Brady在本书第二章中给出了将这种方法用于工程岩石力学问题的其它实例。如果微分方程和边界条件都是线性的，则可由叠加原理推导弹性理论问题的解析解。

1.4 塑性

1.4.1 增量塑性理论

增量塑性理论^[38]是连续介质力学的一个分支，用于解析地模拟金属的塑性变形或流动。塑性变形是永久的、不可恢复的变形。在常应力作用下发生理想塑性变形时，材料的体积不变。如果屈服后仍然需要增大应力才能产生进一步变形，这类材料就称为加工硬化或应变硬化材料。

岩石和岩体变形的塑性或扩散机制在微观和宏观的尺度上都可能出现。岩石材料的塑性

变形机制包括碎裂流动，颗粒内部的滑移，孪晶作用（晶体塑性）及扩散流动^[52]。岩体中出现塑性变形的其它原因，有沿不连续面的滑动、岩块的转动和局部压碎等^[15]。图1.4为对日本黑部川四号拱坝位置上的节理黑云母花岗岩进行大尺寸真三轴压缩试验所得的资料^[51]。由图可见在超过“初始”屈服极限的低水平应力作用下，岩石已出现不可恢复的变形。在这一试验资料中，后继“主”屈服极限和峰值（或破坏）应力也可加以识别。应力超过“主”屈服极限以后，不可恢复变形的数量明显地增加。因此，采用塑性理论描述岩石和岩体本构性态的某些特征看来是合理的。

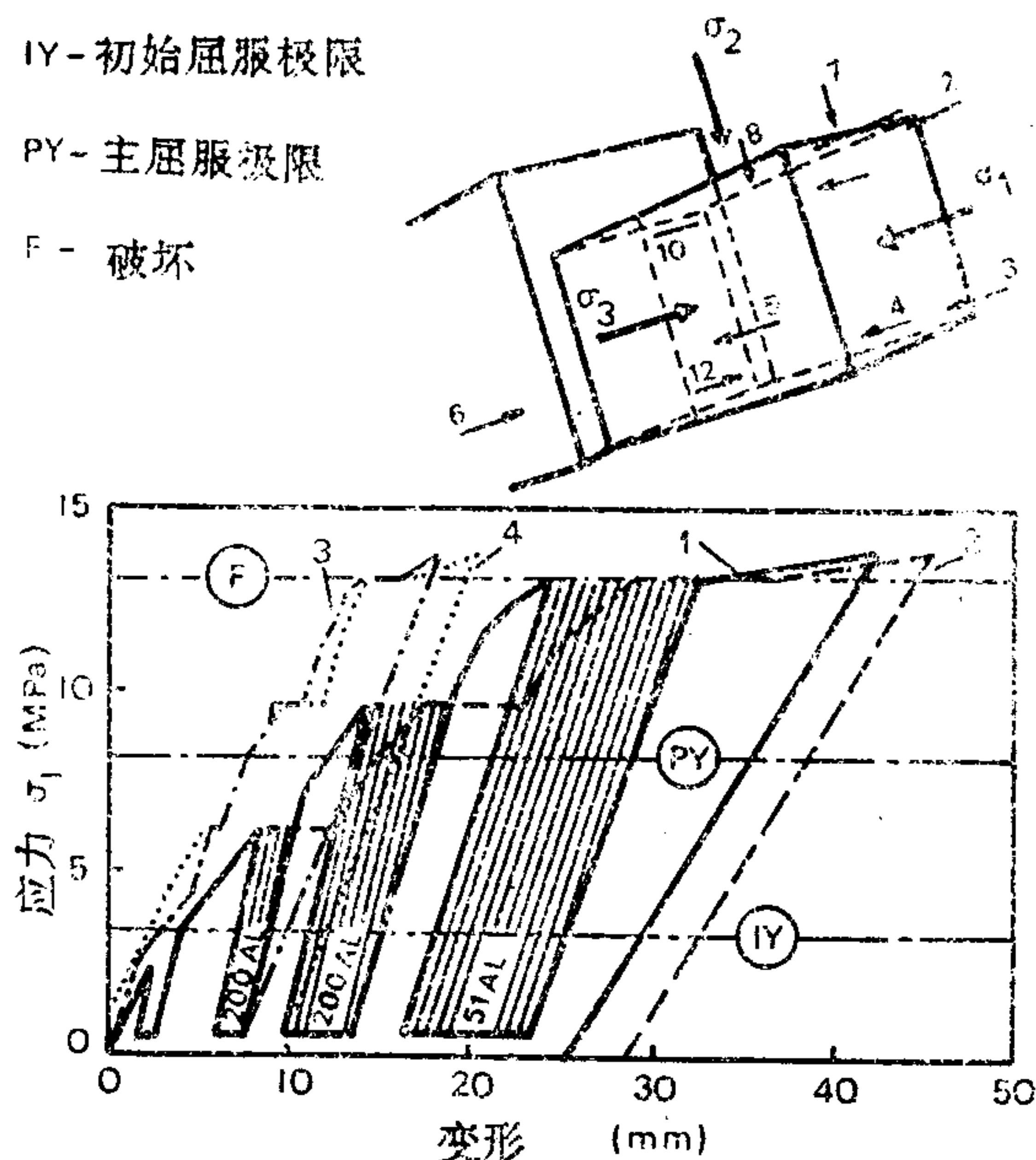


图1.4 日本黑部川四号拱坝现场真三轴压缩试验的最大主应力-变形曲线^[51]

由于塑性变形与原子位置的永久性变化有关，因而不可能用当前应力状态唯一地加以确定。塑性应变取决于加载历史，故塑性理论计算必须采用增量加载法，由对增量变形取和得出总的塑性变形。在某些工程问题中，弹性应变比塑性应变小得多，故在分析中可以略去不计。弹性应变不能忽略时^[28]，就需进行弹塑性分析。总应变增量 $\{\dot{\epsilon}\}$ 为弹性应变增量和塑性应变增量之和，即

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}^e\} + \{\dot{\epsilon}^p\} \quad (1.10)$$

塑性势函数 $Q(\{\sigma\})$ 定义为

$$\{\dot{\epsilon}^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.11)$$

式中 λ 为非负的比例常数，在整个加载历史中可取不同的值。因此，由式(1.10)，(1.11)和式(1.1)的增量表达式可得

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.12)$$

在分析中必须对在何种应力状态下出现屈服和初始塑性变形作出规定。为此，定义**屈服函数** $F = (F(\sigma))$ ，使在屈服时有 $F = 0$ 。若 $Q = F$ ，则称流动法则为**相关联**的流动法则。在这种情况下，矢量 $\{\sigma\}$ 和 $\{\dot{\epsilon}^p\}$ 是相互垂直的。这一性质常称为**正交性**条件，图1.6和1.7对之作了示意说明。布雷指出^[12]，对于冯·米赛斯(Von Mises)屈服准则， $F(J_2) = 0$ (式中 J_2 为应力偏量的第二不变量)，应力与增量塑性应变分量之间的关系式与基于描述理想粘性材料的纳维埃-泊松 (Navier-Poisson) 定律的圣维南 (Saint-Venant) 关系式相同^[56]。

对于各向同性硬化和相关联流动，弹塑性应力和应变增量间有关系式

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D^{ep}]\{\dot{\epsilon}\}$$

式中

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D]\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]}{A + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}}$$

$$A = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk$$

式中 k 为硬化参数，使当

$$dF = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

时出现屈服。

塑性关联流动的概念被用于分析理想塑性和应变硬化的金属材料，并采用与静水应力分量无关的屈服函数，例如屈雷斯卡 (Tresca) 和冯·米赛斯准则中采用的屈服函数^[38]等。虽然这些概念已被用于分析某些地质材料，但不能由此认为这些概念必定适合于对压力比较敏感的材料，如岩石材料等的分析，因为岩石材料易于出现脆性破裂和膨胀现象^[25, 55]。

岩石和岩体常常呈现明显的应变软化特性。以塑性理论模拟应变软化性态会有许多困难。塑性力学属于连续介质力学，而理论上在各向同性的连续介质中不可能出现应变软化现象，因为它将引入不稳定性。应变软化现象只可能在非均质材料中出现^[3]。均匀变形的初始各向同性材料的非均质性是局部性的剪应变或破裂引起的^[3, 55]，解的不规则性和不唯一性也与这类性态有关。尽管有许多严重的困难，在用塑性理论模拟岩石的局部剪应变和破裂方面所作的努力看来还是很有价值的。

为了得到岩石和岩体在屈服时的真实应力状态，需要寻找比对金属材料采用的经典函数更为复杂的屈服函数。根据 Drucker 和 Prager 的研究^[26]，在通常情况下这些函数的形式为 $F(I_1, J_2) = 0$ ，式中 I_1 为应力张量的第一不变量。试验表明，关联流动假设过高估计了在屈服岩石中发生的膨胀数量，由此导致发展了许多可用于岩石和似岩石材料分析的非关联流动法则^[48, 49]。

1.4.2 极限理论¹⁾

首先考察承受从零起连续增加的偏心荷载 P 作用的基底地基土的弹塑性性态 (图1.5)。

1) 本节介绍的进展引自 J. W. 布雷未发表的文稿。

在低荷载水平下，地基呈弹性状态，且仅发生数量较小的垂直位移和基底转动。达到荷载临界值时，地基在A点处屈服，并形成小范围的塑性区〔图1.5(a)〕。该区内的变形是塑性的，但是外面仍为弹性区。当荷载增加时，塑性区范围增大，如图1.5(b)所示。这时的位移虽然比由纯弹性变形产生的位移大，但由于塑性区周围的弹性材料的约束作用，总位移量仍很小。最后，塑性区可穿透表面，基础底部出现大幅度的转动，使系统失去稳定，如图1.5(c, d)所示。这时的荷载 P_c 称为**倒坍破坏荷载**。在最终的大幅度转动发生之前，该系统的几何形状始终变化不大。

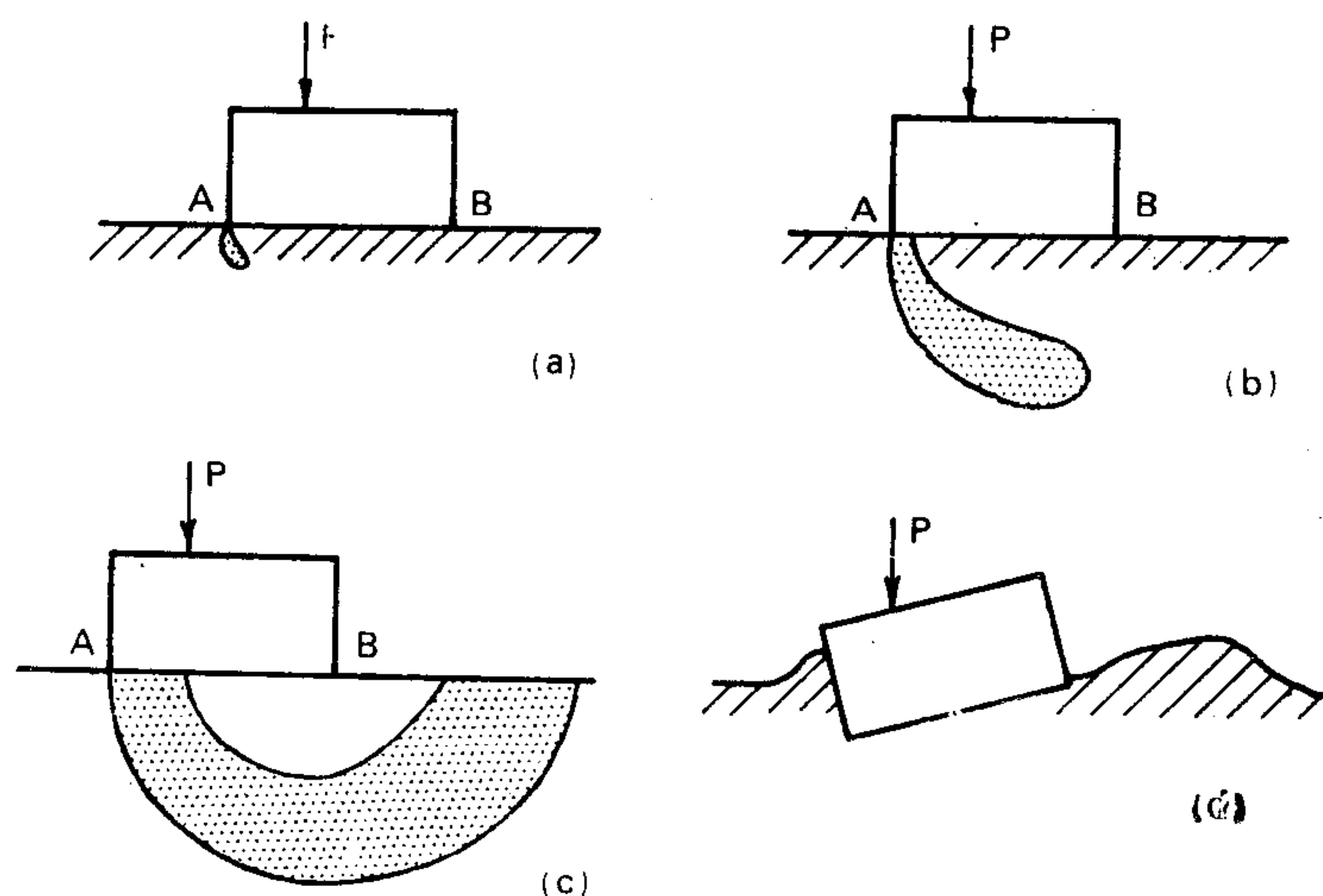


图1.5 偏心荷载增大时基础的倒坍破坏〔11〕

采用在1.4.1节建立的增量塑性理论和基本方程计算弹塑性加载历史的全过程是一个繁重的任务。然而，采用**极限理论**却可非常简便地估计倒坍荷载，因为极限理论可使倒坍荷载置于上限和下限 (P_U , P_L) 之间，即可使

$$P_U > P_c > P_L$$

在多数情况下，可确定出上限和下限，它们非常接近于平均值，可对破坏荷载提供合理的估计。

在该理论的发展和应用中，有如下几个假定：

(1) 在塑性变形过程中，结构物的几何形状没有明显的变化，分析中取为卸载状态中的形状。

(2) 与塑性变形相比较，弹性变形可予忽略（这一假设并非绝对必需，而是为了简化）。

(3) 存在屈服函数 F ，其临界值为 k^2 ，使当 $F < k^2$ 时材料呈弹性状态， $F = k^2$ 时材料呈塑性变形状态。不存在加工硬化，塑性流动使 F 不大于 k^2 。

(4) F 仅取决于应力分量，与应变无关。

(5) 材料是各向同性的， F 与主应力轴的方向无关。

(6) 流动法则是相关联的， $Q = F$ ，塑性应变增量由式(1.11)给出。

(7) 在以 σ_1 , σ_2 , σ_3 为轴的图上绘制 $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k^2$ 时，所得到的**屈服面**是平面或凸形面。不规定 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，允许这些主应力中的任何一个都可成为最大主应力、最小主