

全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数学

第二册（下A）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

NEW

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS



VALUE

全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数 学

第二册（下 A）

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)

数 学

第二册(下A)

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社出版发行
(北京沙滩后街55号 邮编:100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

北 京 出 版 社 重 印

北 京 市 新 华 书 店 发 行

北京北苑印刷有限责任公司印刷

*

890×1194 1/16 印张9.75 字数148 000

2001年10月第2版 2004年1月第1次印刷

印数1-62 800

ISBN 7-107-14959-8 定价:10.20 元
G·8049(课)

如发现印装质量问题影响阅读请与北京出版社书店联系

电话:62050948

说明

《全日制普通高级中学教科书(试验修订本)·数学》是根据教育部 2000 年颁布的《全日制普通高级中学课程计划(试验修订稿)》和《全日制普通高级中学数学教学大纲(试验修订版)》的规定,遵照 1999 年全国教育工作会议的精神,在两市一市进行试验的《全日制普通高级中学教科书(试验本)·数学》的基础上进行修订的。此次修订的指导思想是:遵循“教育要面向现代化,面向世界,面向未来”的战略思想,贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务,必须与生产劳动相结合,培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针,以全面推进素质教育为宗旨,全面提高普通高中教育质量。

普通高中教育,是与九年义务教育相衔接的高层次的基础教育。高中教材的编写,旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质,培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力,促进学生的全面发展,为高一级学校和社会输送素质良好的合格的毕业生。

《全日制普通高级中学教科书(试验修订本)·数学》(以下简称《数学》)包括三册,其中第一册、第二册是必修课本,分别在高一、高二学习,每周 4 课时;第三册是选修课本,在高三学习,它又分为选修 I 和选修 II 两种,每周分别为 2 课时和 4 课时。

这套书的第二册又分为上、下两个分册,分别供高二上、下两个学期使用。本书是《数学》第二册(下 A),内容包括直线、平面、简单几何体(根据大纲“教学内容和教学要求”中的 9(A)部分编写),排列、组合和概率两章,供高二下学期使用。

全套书在体例上有下列特点:

1. 每章均配有章头图和引言,作为全章内容的导入,初步了解学习这一章的必要性。

2. 书中习题共分三类:练习、习题、复习参考题。

练习 以复习相应小节的教学内容为主,供课堂练习用。

习题 每小节后一般配有习题,供课内、外作业选用,少数标有 * 号的题在难度上略有提高,仅供学有余力的学生选用。

复习参考题 每章最后配有复习参考题,分 A、B 两组, A 组题是属于基本要求范围的,供复习全章使用; B 组题带有一定的灵活性,难度上略有提高,仅供学有余力的学生选用。

3. 每章在内容后面均安排有小结与复习,包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分,供复习全章时参考。

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料,供学生课外阅读,借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识。

本套书由人民教育出版社中学数学室编写,其中《数学》第二册(下 A)原试验本由田载今、薛彬主持编写,参加编写的有:田载今、饶汉昌等,责任编辑为蔡上鹤、康合太、李海东,审稿为方明一。

《数学》第二册(下 A)原试验本在编写过程中蒙孔令颐、吴之季、刘玉翘、陈捷、朱长盛、戴佳珉等同志提出宝贵意见,在此表示衷心感谢。参加本次修订的有:田载今、饶汉昌,责任编辑为李海东,审稿为方明一。

人民教育出版社中学数学室

2001 年 6 月

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体

一 空间直线和平面	4
9.1 平面	4
9.2 空间直线	9
9.3 直线与平面平行的判定和性质	16
9.4 直线与平面垂直的判定和性质	20
9.5 两个平面平行的判定和性质	29
9.6 两个平面垂直的判定和性质	34
二 简单几何体	41
9.7 棱柱	41
9.8 棱锥	47
阅读材料 柱体和锥体的体积	54
9.9 研究性课题：多面体欧拉公式的发现	56
阅读材料 欧拉公式和正多面体的种类	63
9.10 球	65
小结与复习	73
复习参考题九	79

第十章 排列、组合和概率

一 排列与组合	84
10.1 分类计数原理与分步计数原理	84
10.2 排列	88
10.3 组合	96
10.4 二项式定理	105
二 概率	112
10.5 随机事件的概率	112
阅读材料 从集合的角度看排列、组合和概率	122
10.6 互斥事件有一个发生的概率	125
10.7 相互独立事件同时发生的概率	129

阅读材料 抽签有先有后, 对各人公平吗?	136
小结与复习	138
复习参考题十	142
附录 部分中英文词汇对照表	147

本书部分常用符号

$A \in a$

点 A 在直线 a 上

$A \notin a$

点 A 不在直线 a 上

$A \in \alpha$

点 A 在平面 α 内

$A \notin \alpha$

点 A 在平面 α 外

$\alpha \cap \beta = a$

平面 α 和平面 β 的交线是 a

$a \subset \alpha$ 或 $a \subseteq \alpha$

直线 a 在平面 α 内

$a \not\subset \alpha$ 或 $a \not\subseteq \alpha$

直线 a 不在平面 α 内

$a \cap b = A$

直线 a 和直线 b 相交于点 A

$a \cap \alpha = A$

直线 a 和平面 α 相交于点 A

$a // \alpha$

直线 a 和平面 α 互相平行

$\alpha // \beta$

平面 α 和平面 β 互相平行

$a \perp \alpha$

直线 a 和平面 α 互相垂直

$\alpha \perp \beta$

平面 α 和平面 β 互相垂直

$\alpha - AB - \beta$ (或 $\alpha - a - \beta$)

棱为 AB , 面为 α, β 的二面角

(或棱为 a , 面为 α, β 的二面角)

A_n^m

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数

$n!$

正整数 1 到 n 的连乘积

C_n^m

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数

$P(A)$

事件 A 的概率

$\bar{A}$

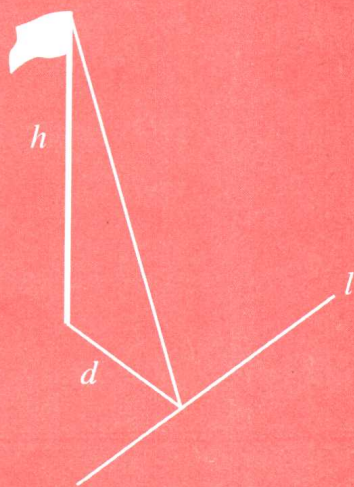
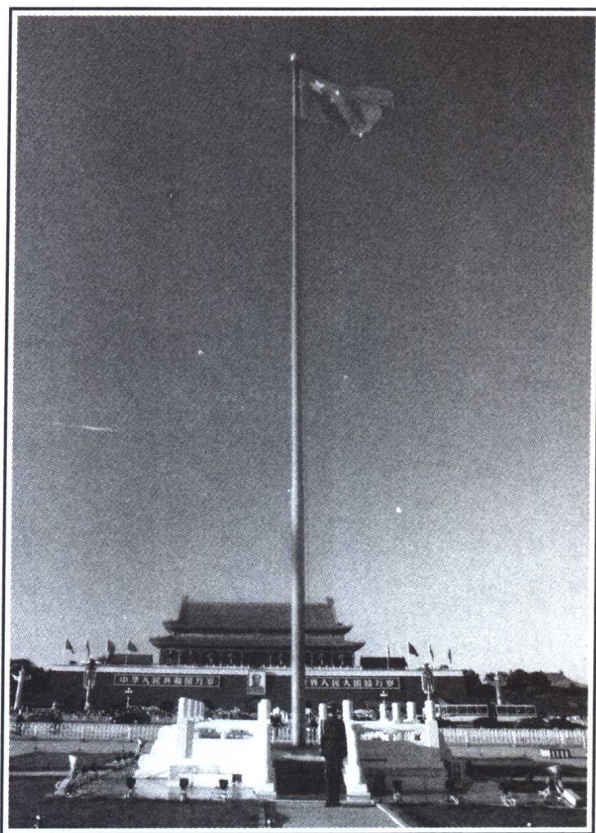
事件 A 的对立事件

$A \cdot B$

事件 A, B 同时发生

第九章

直线、平面、 简单几何体



- 9.1 平面
- 9.2 空间直线
- 9.3 直线与平面平行的判定和性质
- 9.4 直线与平面垂直的判定和性质
- 9.5 两个平面平行的判定和性质
- 9.6 两个平面垂直的判定和性质
- 9.7 棱柱
- 9.8 棱锥
- 9.9 研究性课题: 多面体欧拉公式的发现
- 9.10 球

人们在研究物体的形状、大小和位置关系时，认识了各种各样的几何图形，例如线段、三角形、圆、长方体、球等。在初中几何里，我们已经研究过一些几何图形，并且认识到几何图形都可以看作点的集合。

空间中的一些点组成线和面，这些点、线、面构成空间中的几何图形，可以说空间图形是空间中一些点的集合。组成空间图形的点可以都在同一平面内，也可以不都在同一个平面内。像线段、三角形、圆等图形那样，各点都在同一个平面内的图形是平面图形。像长方体、球等图形那样，各点不都在同一个平面内的图形是立体图形。初中几何主要研究平面图形，也涉及一些简单的立体图形。平面图形和立体图形都是空间图形。

土木建筑、机械设计、航行测绘等大量的实际问题，都要涉及对立体图形的研究。例如，左页图中的旗杆垂直立在地平面上，旗杆与地平面内的直线存在什么样的位置关系？竖立旗杆时怎样才能保证它垂直立于地平面上？如果旗杆的高度为 h ，旗杆底端与地平面内某条直线 l 间的距离为 d ，那么旗杆顶端到 l 的距离是多少？要解决这类问题，就要用到有关立体图形的知识。

研究立体图形，一方面要注意立体图形问题与平面图形问题的区别，考虑问题时要着眼于整个空间，而不能局限于一个平面；另一方面要注意立体图形与平面图形的联系，立体图形中有些点在同一平面内，对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决。

学习关于立体图形的知识，需要空间想象力，即对于几何图形的形状、大小、位置关系及其运动变化的认识与处理的能力。

本章将在初中几何知识的基础上，进一步研究有关立体图形的基础知识，研究对象主要包括最基本的立体图形——空间的直线、平面和简单几何体，研究内容主要是这些对象的几何性质、位置关系的判定、画法、度量计算以及相关的应用等。

一 空间直线和平面

9.1 平 面

1. 平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面等，都给我们以平面的形象。几何里所说的平面，就是从这样的一些物体中抽象出来的。但是，几何里的平面是无限延展的。

直线也是无限延伸的。通常我们画出直线的一部分来表示直线。同样地，我们也可以画出平面的一部分来表示平面。当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很像平行四边形。因此，通常画平行四边形来表示平面（图 9-1）。当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成邻边的 2 倍长。当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 9-2）。这样，看起来立体感强一些。

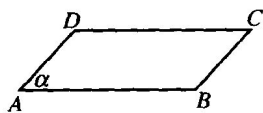


图 9-1

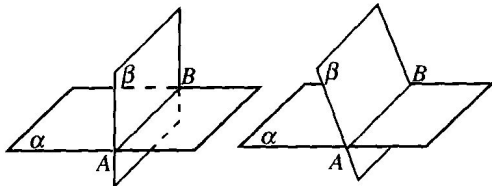


图 9-2

平面通常用一个希腊字母 α 、 β 、 γ 等来表示，如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC （图 9-1）。

平面内有无数个点，平面可以认为是由它内部的所有的点组成的点集，其中每个点都是它的元素。点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ；点 B 在平面 α 外，记作 $B \notin \alpha$ （图 9-3）。

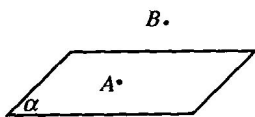


图 9-3

2. 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质。我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础。

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上。人们经常根据这个道理来检验物体的表面是否平整。

直线也是由无数个点组成的集合。点 P 在直线 l 上，记作 $P \in l$ ；点 P 在直线 l 外，记作 $P \notin l$ 。如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l ，记作 $l \subset \alpha$ 。否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l \not\subset \alpha$ 。

公理 1 的含义如图 9-4 所示，也可以用符号表示为

$$A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha.$$

公理 2 如果两个平面^①有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线。

例如，房间里墙角处的那个点是相邻两面墙的公共点，这两面墙还有其他公共点，这些公共点的集合就是这两面墙的公共直线。

如果平面 α 和 β 有一条公共直线 l ，就说平面 α 和 β 相交，交线是 l ，记作 $\alpha \cap \beta = l$ 。

公理 2 的含义如图 9-5 所示，也可以用符号表示为

$$P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l \text{ 且 } P \in l.$$

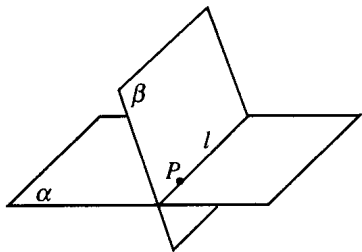


图 9-5

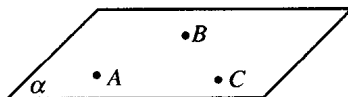


图 9-6

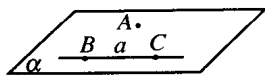
公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 9-6）。

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了。

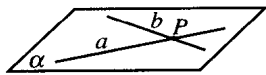
过 A 、 B 、 C 三点的平面又可记作“平面 ABC ”。

根据上述公理，可以得出下面的推论。

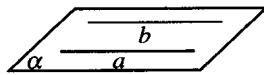
推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 9-7 (1)）。



(1)



(2)



(3)

图 9-7

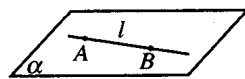


图 9-4

^① 在本章中，没有特别说明的“两个平面”，均指不重合的两个平面。

证明：设点 A 不在直线 a 上，在直线 a 上任取两点 B 和 C ，于是有 $A \notin a$, $B \in a$, $C \in a$ ，即 A 、 B 、 C 为不共线的三点。根据公理 3，经过 A 、 B 、 C 三点有一个平面 α 。因为 $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ ，所以由公理 1 可知 $a \subset \alpha$ ，即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面。

又根据公理 3，经过不共线的三点 A 、 B 、 C 的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个。

推论 1 可以用符号表示为

$A \notin a \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$ 。

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 9-7 (2)）。

我们规定：直线 a 和 b 相交于点 P ，记作 $a \cap b = P$ 。

推论 2 可以用符号表示为

$a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ 。

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 9-7 (3)）。

推论 3 可以用符号表示为

$a \parallel b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ，使 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ 。

推论 2、推论 3 的证明与推论 1 的证明类似。

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”。

公理 3 及它的三个推论给出了确定一个平面时经常使用的一些条件。

例 如图 9-8，直线 AB 、 BC 、 CA 两两相交，交点分别为 A 、 B 、 C ，判断这三条直线是否共面^①并说明理由。

① 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，那么可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”。

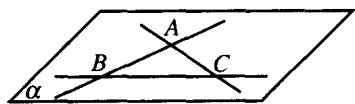


图 9-8

解：这三条直线共面，理由如下：

- $\because$ 直线 AB 和 AC 相交于点 A ,
- $\therefore$ 直线 AB 和 AC 确定一个平面 α (推论 2).
- $\because$ $B \in AB$, $C \in AC$,
- $\therefore$ $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.
- $\therefore$ $BC \subset \alpha$ (公理 1).

因此，直线 AB 、 BC 、 CA 都在平面 α 内，即它们共面。

从以上可知，证明三条直线共面，可以先证其中两条直线共面，再证第三条直线也在这个平面内。

练习

1. 填空:

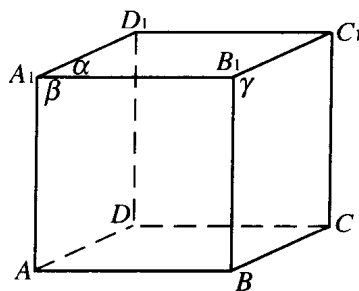
正方体的各顶点如图所示, 正方体的三个面所在平面 A_1C_1 、 A_1B 、 BC_1 分别记作 α 、 β 、 γ .

(1) $A_1 \in \alpha$, $B_1 \in \alpha$,
 $C_1 \in \alpha$, $D_1 \in \alpha$;

(2) $A \in \beta$, $B \in \beta$,
 $A_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta$;

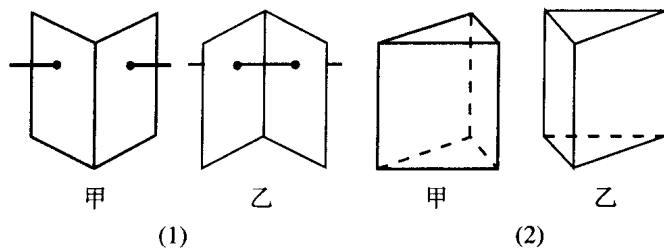
(3) $A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$,
 $A \in \gamma$, $B \in \gamma$;

(4) $\alpha \cap \beta = A_1B_1$,
 $\beta \cap \gamma = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $\alpha \cap \gamma = \underline{\hspace{2cm}}$.



(第1题)

2. 观察 (1)、(2) 中甲、乙两个图形, 用模型说明它们的位置有什么不同, 并用字母来表示各个平面.



(第2题)

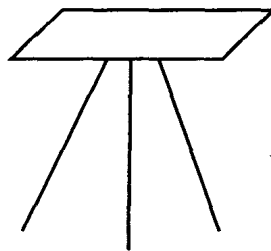
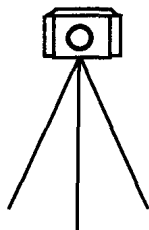
3. 用生活中的实例说明本节的公理及推论.

4. 用符号表示下列语句, 并画出图形:

- (1) 点 A 在平面 α 内, 点 B 在平面 α 外;
- (2) 直线 l 在平面 α 内, 直线 m 不在平面 α 内;
- (3) 平面 α 和 β 相交于直线 l ;
- (4) 直线 l 经过平面 α 外一点 P 和平面 α 内一点 Q ;
- (5) 直线 l 是平面 α 和 β 的交线, 直线 m 在平面 α 内, l 和 m 相交于点 P .

习题 9.1

1. 为什么照相机支架、平板仪 (如图) 都只用三条腿就够了?



(第1题)

2. (1) 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?
(2) 怎样用两根拉紧的细线来检验桌子的四条腿的底端是否共面?

3. 填空: 在图中,

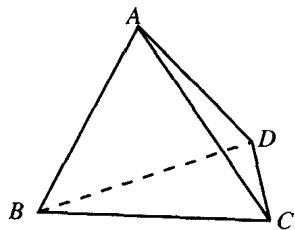
A _____ 平面 ABC ,

A _____ 平面 BCD ,

BD _____ 平面 ABD ,

BD _____ 平面 ABC ,

平面 $ABC \cap$ 平面 $ACD =$ _____, _____ $\cap$ _____ $= BC$.



(第3题)

4. 用符号表示下列语句, 并画出图形:

- (1) 点 P 在平面 α 内, 但在平面 β 外;
- (2) 直线 l 在平面 α 内, 但不在平面 β 内;
- (3) 直线 l 和 m 相交于点 P ;
- (4) 平面 α 和 β 的交线是 l , 点 P 在 l 上;
- (5) 直线 l 经过平面 α 内一定点 P , 但 l 在 α 外.

5. 选择题:

- (1) 经过同一直线上的 3 个点的平面 ()
(A) 有且只有 1 个. (B) 有且只有 3 个.
(C) 有无数个. (D) 只有 0 个.
- (2) 直线 a 、 b 、 c 两两平行, 但不共面, 经过其中 2 条直线的平面共有 ()
(A) 1 个. (B) 3 个. (C) 0 个. (D) 6 个.
- (3) 直线 a 、 b 、 c 交于一点, 经过这 3 条直线的平面 ()
(A) 有 0 个. (B) 有 1 个. (C) 有无数个.
(D) 可以有 0 个, 也可以有 1 个.
- (4) 过不共面的 4 个点中的 3 个点的平面共有 ()
(A) 0 个. (B) 3 个. (C) 4 个. (D) 无数个.

6. 不共面的 4 个点中能否有 3 个点共线? 为什么?
7. 三角形、梯形是否一定是平面图形? 为什么?
8. 一条直线过平面内一点与平面外一点, 它和这个平面有几个公共点? 为什么?
9. 一条直线与两条平行直线都相交, 判断这三条直线是否在同一个平面内并

说明理由.

10. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线, 判断这三条直线是否在同一个平面内并说明理由.
11. 四条线段顺次首尾连接, 所得的图形一定是平面图形吗? 为什么?

9.2 空间直线

1. 空间两条直线的位置关系

在初中几何里已经介绍了空间的两条直线^①有以下三种位置关系:

^① 本章中没有特别说明的“两条直线”, 均指不重合的两条直线.

- (1) **相交直线**——有且仅有一个公共点;
- (2) **平行直线**——在同一个平面内, 没有公共点;
- (3) **异面直线**——不同在任何一个平面内, 没有公共点.

例如在图 9-9 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 AB 与 BC 是相交直线, 直线 AB 与 A_1B_1 是平行直线, 直线 AB 与 CC_1 是异面直线.

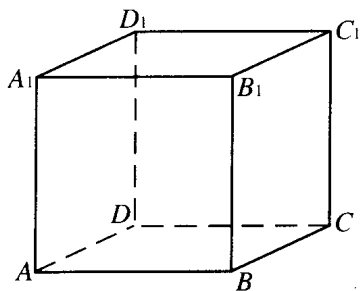


图 9-9

两条直线相交或平行时, 确定一个平面. 但是, 三条直线交于一点或两两互相平行时, 它们不一定共面. 例如图 9-9 中, 直线 AA_1 、 AB 、 AD 相交于点 A , 它们不共面; 直线 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 两两互相平行, 它们也不共面.

2. 平行直线

我们在初中几何里已经知道, 在同一个平面内, 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行. 对于空间的三条直线, 是否也有这样的规律? 例如, 房间里墙与墙的交线, 如果 $AA' \parallel BB'$, $CC' \parallel BB'$, 那么是否有 $AA' \parallel CC'$ (图 9-10)? 可以发现, 答案是肯定的.

我们把上述规律作为本章的第 4 个公理.

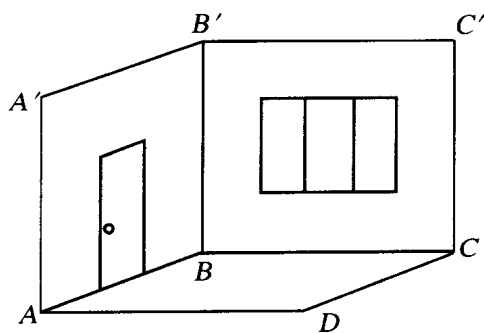


图 9-10

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

公理 4 也可以用符号表示如下:

设 a, b, c 为直线,

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ c \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel c.$$

a, b, c 三条直线两两平行, 可以记为 $a \parallel b \parallel c$.

① 四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

例 1 已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形①, E, H 分别是边 AB, AD 的中点, F, G 分别是边 CB, CD 上的点, 且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} =$

$\frac{2}{3}$, 求证四边形 $EFGH$ 有一组对边平行但不相等.

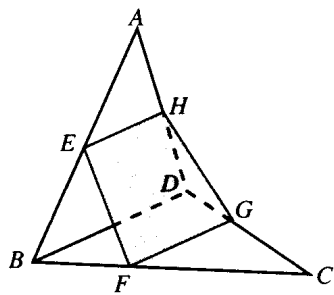


图 9-11

证明: 如图 9-11, 连结 BD .

$\because EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD.$$

又在 $\triangle BCD$ 中, $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore FG \parallel BD, FG = \frac{2}{3}BD.$$

根据公理 4, $EH \parallel FG$.

又 $FG > EH$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的一组对边平行但不相等.

由公理 4, 我们可以推出下面的结论.

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同, 那么这两个角相等.

已知: $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, 并且

① 这里 $AB \parallel A'B'$ 并且方向相同①.
向相同, 即向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ 的方向相同.

求证: $\angle BAC = \angle B'A'C'$.