高等学校教材

数学物理方程讲义

（第二版）

姜礼尚　陈亚浙
刘西垣　易法槐

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

数学物理方程讲义

（第 二 版）

姜礼尚　陈亚浙
刘西垣　易法槐　编

高 等 教 育 出 版 社

本书第一版在第二届全国优秀教材评选中获国家教委一等奖。第二版保持了原有特色，并根据教学的需要把基础内容尽可能交待得透彻一些，把应用部分尽可能多展开一些，把具体推演简化、精练一些，把与课程要求相距较远的材料适当地删掉一些，力求作到使教师便于教，学生便于学

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程讲义/姜礼尚等编. －2版. －北京：高等教育出版社，1996.12(2003重印)
ISBN 7-04-006001-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.姜…　Ⅲ.数学物理方程-教材　Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第16279号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
		版　　次	1986年5月第1版
开　　本	850×1168　1/32		1996年9月第2版
印　　张	8.375	印　　次	2003年10月第3次印刷
字　　数	210 000	定　　价	10.90元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

再 版 序 言

本书第一版问世以来已近 10 年，在这期间国内很多高校把它作为数学系本科各专业数学物理方程课程的教材. 通过实践，肯定了本书的一些长处，同时亦提出了不少希望修改的建议. 第一届国家教委理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组根据大家的意见，把本书的修改和再版列入了教材建设“八五”规划. 在教材建设组各位专家的推动和督促下，我们着手了这项修订工作.

这次修订的指导思想是：保持原书的特色，尽量考虑到教学实践的要求，把基础内容尽可能交待得透彻一些，把应用部分尽可能多展开一些，把具体推演尽可能简化精练一些，把与课程的要求相距较远的材料适当地删掉一些，力求做到使教师便于教、学生便于学，争取成为一本受广大师生欢迎的教材.

在这次修改过程中，比较重要的增补有以下几点：

1. 增加了一阶线性偏微分方程 Cauchy 问题的特征线方法. 增加了求解多维波动方程 Cauchy 问题的球面平均法和降维法的内容.

2. 根据广义函数是定义在基本空间上的线性泛函这个概念出发，改写了原书的广义函数这一节，删去了广义函数 Fourier 变换的内容，把基本解的推导直接从“点源”的影响函数这个物理事实出发来进行.

3. 从解的比较原理出发，通过建立上 (下) 函数，对解的最大模估计作了统一处理.

4. 增加了用分离变量法求解热传导方程轴对称解的内容.

同时我们亦删去了流体力学基本方程组 (除连续性方程以外) 和带有障碍的膜平衡方程的推导、一阶线性双曲组、不适定问题的对数凸性法以及 Cauchy-Ковалевская 定理等一些原书带有星号的内容.

对于本书的修订和再版, 王元明、王传芳等教授提出了很多宝贵意见, 以伍卓群教授为首的微分方程教材建设组的全体专家对本书修订的指导思想提出了很多建设性意见, 高等教育出版社郭思旭同志自始至终关心和支持本书的再版工作, 苏州大学王翼勋同志为争取再版本早日问世, 用 LaTeX结合天元数学排版系统, 突击排出了本书, 对此我们表示由衷的感谢.

姜 礼 尚

于苏州大学

1995 年 12 月 20 日

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 一 版 序 言

数学物理方程以具有物理背景的偏微分方程 (组) 作为研究的主要对象. 它与其他数学分支及物理、化学等自然科学和工程技术的很多领域都有着广泛的联系. 因此, 无论在历史上还是在今天的现实世界中, 它对于推动数学理论的发展, 加强理论与实际的联系, 帮助人们认识世界和改造世界都起着重要的作用.

数学物理方程作为一门大学基础课, 是企图通过对一些具有典型意义的模型方程的深入剖析, 阐明和介绍偏微分方程的基本理论、解题的典型技巧以及它们的物理背景. 把数学理论、解题方法与物理实际这三者有机地、紧密地结合在一起, 应该是本课程有别于其他课程的一个鲜明的特点.

半个多世纪以来, 偏微分方程的理论有了重大的发展, 电子计算机已广泛地应用于自然科学和工程技术的各个领域. 这些发展不仅意味着新理论、新工具与新方法的出现, 同时也使人们对一些传统的经典方法和理论有了新的认识, 从而为我们更新教材提供了重要的前提和必要的线索. 北京大学数学系微分方程教研室的一些同志多年来与全国同行一样, 一直在自己的教学实践中进行探索. 这本教材就是在原有大纲的基础上, 吸取了大家在探索中的点滴体会与经验写成的.

本教材基本上是按照一学期 70 学时的课程安排编写的. 由于学时比较紧, 有些内容虽然写了, 但标了 “*” 号, 可根据情况选用; 有些则只写出结论, 有兴趣的读者可以查阅有关的参考书. 对于像 $\delta-$ 函数、广义 Fourier 变换、Соболев 空间等重要概念, 我

们采用较为直观、浅易的阐述，强调了它们的应用. 当然，我们也尽可能做到论证的严密性.

第一章希望读者掌握守恒律与变分原理等物理规律的应用以及每个方程的物理背景；第二章的重点是双曲型方程的特征理论、能量积分与分离变量法；第三章要求读者重点掌握 Fourier 积分变换，抛物型方程的 Green 函数与极值原理；第四章除了进一步熟悉椭圆型方程的极值原理与 Green 函数之外还应重点掌握变分方法；第五章希望对 Cauchy–Ковалевская 定理以及 Lewy 的反例等重要结论有一个初步的了解.

由于作者学识所限，错误与不妥之处在所难免，希望读者提出宝贵意见.

最后，对我们教研室，特别是刘西垣、吴兰成、叶其孝等同志在本书的酝酿、试用和编写过程中所提出的宝贵意见与付出的辛勤劳动表示深切的谢意. 在定稿过程中，李大潜，陈庆益，伍卓群，陈恕行，王传芳诸先生和理科数学、力学教材编审委员会微分方程编审组的诸位先生对本书提出了很多带有建设性的意见，作者对此表示由衷的感谢.

1985 年 5 月 1 日

目　　录

第一章　方程的导出和定解条件 1

§1　守恒律 1

1.1　动量守恒与弦振动方程 2

1.2　能量守恒与热传导方程 9

1.3　质量守恒与连续性方程 14

§2　变分原理 17

2.1　极小曲面问题 19

2.2　膜的平衡问题 21

§3　定解问题的适定性 25

第一章习题 28

第二章　波动方程 33

§1　一阶线性方程的特征线解法 33

§2　初值问题 (一维情形) 37

2.1　问题的简化 38

2.2　解的表达式 41

2.3　依赖区间、决定区域和影响区域 44

2.4　能量不等式 47

2.5　半无界问题 53

§3　初值问题 (高维情形) 60

3.1　解的表达式 60

3.2　特征锥与惠更斯原理 65

§4　混合问题 70
4.1　分离变量法 70
4.2　物理意义，驻波法与共振 87
4.3　能量不等式 90
4.4　广义解 92
*§5　一阶拟线性双曲方程式概述 98
第二章习题 108

第三章　热传导方程 117
§1　初值问题 117
1.1　Fourier 变换 117
1.2　Poisson 公式 126
1.3　广义函数简介 131
1.4　基本解 142
1.5　半无界问题 146
§2　混合问题 150
2.1　有界杆的热传导问题 150
*2.2　圆形区域上的热传导问题 154
§3　极值原理与最大模估计 161
3.1　弱极值原理 161
3.2　第一边值问题解的最大模估计 163
3.3　第二、三边值问题解的最大模估计 164
3.4　初值问题解的最大模估计 168
3.5　边值问题解的能量模估计 169
*3.6　反向问题的不适定性 172
第三章习题 173

第四章　位势方程 183
§1　基本解与 Green 函数 183

1.1　基本解与 Green 公式 183
1.2　Green函数 189
1.3　圆上的 Poisson 公式 193
§2　极值原理与调和函数的性质 200
2.1　极值原理 200
2.2　边值问题解的最大模估计 205
2.3　能量模估计 208
2.4　调和函数的性质 210
§3　变分方法 213
3.1　$H^1(\Omega)$空间 213
3.2　变分问题的解的存在唯一性 217
*3.3　Ritz–Galerkin近似解法 223
*§4　Cauchy 问题的不适定性 228
第四章习题 231

第五章　二阶线性偏微分方程的分类 242
§1　分类 242
§2　二个自变量的方程的化简 246
2.1　特征理论 246
2.2　二个自变量的方程的化简 250
第五章习题 254

第一章　方程的导出和定解条件

任何物质的运动都受到一定的自然规律 (如物理定律) 的制约. 我们常见的一些数学物理方程, 它们作为描写这些物质运动的数学模型, 是从数量形式上刻画了由相应的物理定律所确立的某些物理量之间的制约关系.

与建立数学物理方程关系最密切的物理定律大致可以归结为两大类: 1. 守恒律; 2. 变分原理. 当然, 为了使方程 (组) 成为封闭的, 往往还需要其他实验定律, 如 Fourier 热传导定律, 状态方程等, 但前面所述的两大类是最基本的.

在这一章内, 我们将通过弦振动、热传导、流体运动以及膜平衡、极小曲面等物理和几何的例子, 说明如何从守恒律和变分原理出发导出我们常见的一些数学物理方程. 它们将作为本书讨论的对象.

§1　守　恒　律

质量守恒、动量守恒和能量守恒是自然界一切运动都必须遵循的基本规律. 对于自然界的某一个特定问题, 如果把相应的守恒律数量化, 就导出刻画这个问题的微分方程. 因此, 从这个意义上说, 微分方程实质上就是自然界守恒律的数量形式.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.1 动量守恒与弦振动方程

物理模型

一根长为 l 的均匀细弦，拉紧之后让它离开平衡位置，在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动，求在不同时刻弦线的形状.

我们这里所说的“弦”是指所讨论的对象充分柔软，它只抗伸长，不抗弯曲，也就是当它变形时，反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计；所谓“均匀”是指弦的线密度(即单位长度的质量)为常数；所谓“细”是指弦的长度远远大于它的直径，使得在数学上可以把弦作为一根(直的或弯曲的)线段来处理；所谓“横振动”是指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直. 所谓“微小”的意义将在下文中说明.

弦的往返运动的主要原因是张力的影响. 弦在运动过程中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循动量守恒律.

动量守恒律

物体在某一时段(即时间间隔)内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{动量}\\ t=t_2\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{动量}\\ t=t_1\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{外力产生的冲量}\\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{matrix}}$$

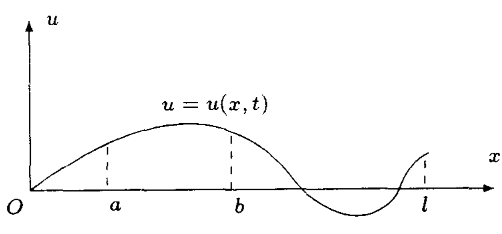

图 1.1

我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴. 在弦线运动的平面内，垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴. 这样，在任意时刻 t, 弦线上各点的位移为

$$u = u(x,t).$$

在弦上任意截取一段 $[a,b]$, 考虑它在任意时段 $[t_1,t_2]$ 动量的变化.

设 ρ 为弦的线密度 (kg/m), f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度 (N/m), 从而在任意时刻 t, 弦段 $[a,b]$ 的动量为

$$\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x.$$

在时段 $[t_1,t_2]$ 内动量的变化为

$$\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2}\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1}\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

为了写出作用在弦段 $[a,b]$ 上所有垂直于弦线的外力产生的冲量，注意到作用于弦段 $[a,b]$ 上的外力有两类：外加强迫力和周围弦线通过端点 $x=a$ 和 $x=b$ 作用于弦段 $[a,b]$ 的张力. 强迫力在时段 $[t_1,t_2]$ 内所产生的冲量是

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b f_0\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

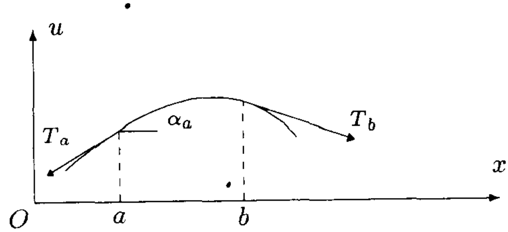

图 1.2

作用在端点 $x=a$ 和 $x=b$ 点的张力为 $\boldsymbol{T}_a$ 、 $\boldsymbol{T}_b$, 它们的方向如图 1.2. 它们在 u 轴方向的分量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_a \bullet \boldsymbol{i}_u &= |\boldsymbol{T}_a| \cos(\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{i}_u) = -|\boldsymbol{T}_a| \sin\alpha_a, \\ \boldsymbol{T}_b \bullet \boldsymbol{i}_u &= |\boldsymbol{T}_b| \cos(\boldsymbol{T}_b, \boldsymbol{i}_u) = |\boldsymbol{T}_b| \sin\alpha_b, \end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{i}_u$ 表示 u 轴上的单位向量， α_a 、 α_b 分别为弦线在 a 、 b 点处的切线与 x 轴正方向的夹角.

由于我们假设弦线是均匀的，弦作微小横振动，故可以认为：

$$|\alpha_a|,\ |\alpha_b| \ll 1, \quad \sin\alpha_a \sim \tan\alpha_a, \quad \sin\alpha_b \sim \tan\alpha_b,$$

以及

$$|\boldsymbol{T}_a| = |\boldsymbol{T}_b| = T_0 \ \ (\text{常数}).$$

因此张力 $\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{T}_b$ 的垂直于弦线的分量在时段 $[t_1, t_2]$ 内产生的冲量 (忽略高阶小量) 是

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan\alpha_b \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan\alpha_a \mathrm{d}t \\ = &\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} - \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} \right] \mathrm{d}t. \qquad (1.3) \end{aligned}$$

考虑到表达式 (1.1) 、 (1.2) 、 (1.3), 从而由动量守恒定律得到弦线作微小横振动所满足的方程 (忽略高阶小量):

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=t_2} - \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=t_1} \right] \mathrm{d}x \\ = &\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} - \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} \right] \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_a^b f_0 \mathrm{d}x, \qquad (1.4) \end{aligned}$$

其中 $[a, b]$ 是包含在弦线 $[0, l]$ 内的任意弦段， $[t_1, t_2]$ 是包含在振动期间 $[0, \infty)$ 内的任意时段.

如果假设在区域 $(0,l)\times(0,\infty)$ 内， u 存在二阶连续微商 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, 那么由熟知的 Green 公式，表达式 (1.4) 可改写为

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x\\ =&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b f_0\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 (a,b), (t_1,t_2) 的任意性以及被积函数的连续性，即得 u 适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f_0\qquad(0<x<l,\ t>0).$$

由于弦是均匀的，故 $\rho=$ 常数，因此方程亦可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad(0<x<l,\ t>0),\tag{1.5}$$

其中

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\qquad f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}.$$

方程 (1.5) 刻画了均匀弦的微小横振动的一般规律，人们称它为 **弦振动方程**.

一根弦线的特定的振动状况，还依赖于初始时刻弦线的状态和通过弦线的两端所受到的外界的影响. 因此为了确定一个具体的弦振动，除了列出它满足的方程以外还必须写出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件 即必须给出弦上各点在初始时刻 $t=0$ 的位移和速度.

$$\begin{aligned}&u(x,0)=\varphi(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant l),\\&u_t(x,0)=\psi(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant l),\end{aligned}\tag{1.6}$$

这里 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为已知函数.

边界条件 一般说来有三种

1. 已知端点的位移变化，即

$$u(0,t)=g_1(t), \qquad u(l,t)=g_2(t) \quad (t\geqslant 0), \tag{1.7}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称弦线具有 **固定端**.

2. 已知在端点所受的垂直于弦线的外力的作用，即

$$\begin{aligned} &-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=g_1(t),\\ &T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t) \qquad (t\geqslant 0), \end{aligned} \tag{1.8}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称弦线具有 **自由端**.

3. 已知端点的位移与所受外力的作用的一个线性组合

$$\begin{aligned} &-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1 u(0,t)=g_1(t),\\ &T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+\alpha_2 u(l,t)=g_2(t) \qquad (t\geqslant 0), \end{aligned} \tag{1.9}$$

$(\alpha_i>0,\ i=1,2)$, 特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，表示弦的两端固定在弹性支承上， $\alpha_i\ (i=1,2)$ 分别表示支承的弹性系数. 事实上 (以左端点为例), 根据作用力与反作用力的关系，弦对弹性支承的力为 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}$, 而弹性支承的伸长为 $u(0,t)$, 由胡克 (Hooke) 定律知 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha_1 u(0,t)$, 此即 (1.9) 中的第一表达式.

通常我们把初始条件和边界条件统称为 **定解条件**. 一个偏微分方程连同与它相应的定解条件 (初始条件和边界条件) 组成一个 **定解问题**. 因此为了寻求在特定条件下弦的振动规律，我们需要去求解一个相应的定解问题.

在区域 $\{0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0\}$ 上由方程 (1.5) 、初始条件 (1.6) 以及边界条件 (1.7) — (1.9) 中间的任意一个组成的定解问题称为 **弦**

振动方程的混合问题 (两个端点的边界条件也可以分别是 (1.7) —(1.9) 中不同的两种).

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点 (边界) 的影响可以忽略不计，那么我们可以认为弦长是无穷的，这样就不必考虑边界条件. 我们把在区域 $\{-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0\}$ 上，由方程 (1.5) 和初始条件 (1.6) 组成的定解问题称为 **弦振动方程的初值问题**(或 **Cauchy 问题**).

类似地我们可以给出关于弦振动方程半无界问题的定义.

附注 1 方程 (1.5) 虽然一般称为弦振动方程，但决不只用来表述弦的横振动. 事实上在工程和物理中，还有很多其它的实际问题同样可以用方程 (1.5) 来刻画. 例如杆的纵振动 (即一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动)，如果取杆长方向为 x 轴，$u(x,t)$ 表示 x 处的截面在 t 时刻沿着杆长方向的位移，那么由动量守恒定律和胡克定律

$$\frac{N}{S} = E\varepsilon,$$

(其中 N 为端面受力， S 为端面面积， N/S 为应力， E 为杨氏模量， ε 为相对伸长) 可推出 $u(x,t)$ 适合方程 (1.5)，其中 $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$. 其实不论是弦的横振动还是杆的纵振动，它们都有一个共同的特征，即由物体的振动产生了波的传播. 因此方程 (1.5) 一般亦称为 **一维波动方程**.

附注 2 如果我们考虑的是膜的振动或者声波在空气中的传播，用来描述这些二维和三维波动现象的微分方程仍然具有和方程 (1.5) 相似的形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f, \tag{1.10}$$

这里 $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子， n 是维数. 通常我们把方程 (1.10) 称为 **波动方程**.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com