线性代数习题集

王萼芳 编著

线性方程组
n 维向量空间
行列式
矩阵
矩阵的对角化问题
二次型
线性空间与线性变换

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

线性代数习题集

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

《线性代数》和《线性代数习题集》是北京大学成人高等教育及远程教育线性代数课程的教材，可以作为大专院校非数学专业线性代数课程的教材和参考书。

《线性代数习题集》是《线性代数》的内容总结及习题解答。对各章节内容有详尽的内容提要，因此，本书也可以用作学习线性代数的参考读物。

同一类型的计算题给出了一两个题的计算过程以及不同的算法。证明题都有证明或者提示。

为了开阔读者的思路，提高能力，本书末附有复习题，提供了一些难度较大的习题，供读者选用。

读者对象：大专院校、成人高等教育、远程教育和电视大学的师生。

书　名：线性代数习题集
作　者：王萼芳　编著
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市密云胶印厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：8.75　字数：219 千字
版　次：2000 年 8 月第 1 版　2001 年 2 月第 2 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01142-7/O・235
印　数：5001～10000
定　价：13.50 元

前　言

本书是清华大学出版社出版的《线性代数》的习题解答。

书中的习题是根据《线性代数》中的习题按章节编排的。每一节的习题统一编号。为了学习其他线性代数课本的读者也能使用此书，在每节的开始编写了内容提要，因此，本书也可以用作学习线性代数的参考读物。

对于同一类型的计算题，书中给出了其中几个题目的各种方法的详细计算过程，其余的只给出答案。关于证明题，大都给出了证明，对少数较为简单的题目只给出提示。

为了加强对读者的训练，开阔思路，提高能力，本书最后还增加了一章补充题，其中有些题目难度较大，读者可以根据自己的情况选做。

做习题是巩固并加深课程内容及灵活处理问题的一个重要学习环节。和其他课程一样，线性代数解题的方法也是多种多样的，书中的算法及证明只是提供读者参考，希望读者能认真学习教材，掌握基本理论及算法，通过独立思考，自己作出正确答案。

希望本书能对读者有所帮助，并希望读者对本书提出宝贵意见，以便进一步改进。

作　者

2000 年 5 月于北京

目　　录

第 1 章　线性方程组

1.1 消　元　法

内容摘要

包含 n 个未知量，s 个方程的线性方程组可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个未知量. $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的**系数**；$b_i(i=1,2,\cdots,n)$称为**常数项**. 系数 a_{ij}的第 1 个下标 i 表示它在第 i 个方程，第 2 个下标 j 表示它是 x_j 的系数；b_i 的下标 i 表示它是第 i 个方程的常数项.

线性方程组(1)的一个**解**是由 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 组成的有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 分别代替方程组(1)中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，方程组(1)中的每个方程都变成恒等式. 方程组(1)的解的全体称为方程组(1)的**解集合**. 如果两个线性方程组有相同的解集合，就称它们是**同解的**.

解线性方程组的问题就是要判断一个线性方程是否有解，有多少个解，并在有解的情况下找出解集合.

消元法就是把线性方程组进行变换，化成一个与之同解的便于求解的方程组，从而求出原方程组的解.

定义 1 下述 3 种变换称为线性方程组的**初等变换**：

(1) 用一个非零的数乘一个方程；

(2) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上；

(3) 互换两个方程的位置.

初等变换把线性方程组变成与它同解的方程组.

用初等变换把方程组(1)化为同解的阶梯形方程组

$$\begin{cases} c_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+c_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+c_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\qquad c_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+c_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=dr, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $c_{ij_i}\neq 0$，$(i=1,2,\cdots,r)$；$j_1<j_2<\cdots<j_r$. 方程组(2)中最后一些方程 $0=0$ 是恒等式,可以去掉,不影响方程组的解.

因为方程组(1)与方程组(2)是同解的,所以可以通过方程组(2)来讨论方程组(1)的解.

(1) 如果 $d_{r+1}\neq 0$,则方程组(1)无解.

(2) 如果 $d_{r+1}=0$,$r=n$,那么,线性方程组(1)有唯一解,并可以由线性方程组(2)求出此解.

(3) 如果 $d_{r+1}=0$,$r<n$,那么,线性方程组有无穷多解,此时,为了叙述方便,不妨设 $j_1=1$,$j_2=2$,$\cdots$,$j_r=r$. 将线性方程组(2)改写成

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n.
\end{cases}
$$

可解出

$$
\begin{cases}
x_1 = k_1 + k_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{1n}x_n, \\
x_2 = k_2 + k_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = k_r + k_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{rn}x_n.
\end{cases}
$$

这组表达式称为方程组(1)的**一般解**. $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为一组**自由未知量**. 任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的一组值,就可唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值,从而得到线性方程组(1)的一个解.

在进行计算时可以把 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 略去不写,而把系数与常数项列成一个表来计算.

习　题　1.1

1. 用消元法解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-\ \ x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+\ \ x_2-2x_3=1, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=2, \\ x_1+3x_2+\ \ x_3=5, \\ x_1+\ \ x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

2. 求 a,使线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a. \end{cases}$$

有解,并求解.

3. 判断 a 与 b 取什么值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b. \end{cases}$$

有解? 在有解的情形,求一般解.

4. 证明:线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_5 = a_4, \\ x_5 - x_1 = a_5. \end{cases}$$

有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

并在有解的情形，求它的一般解.

解　答

1.(1)**解**：对原线性方程组进行初等变换

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+\ x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-\ x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ \qquad\qquad\qquad -2x_4=-2, \\ \qquad\qquad\qquad\quad 6x_4=6. \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4=1, \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ 0=0. \end{cases}$$

所以，此线性方程组有无穷多解，一般解为

$$\begin{cases} x_1=2x_2-x_3, \\ x_4=1. \end{cases}$$

其中 x_2,x_3 是自由未知量.

(2) **解**：对原方程组作初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ \quad -x_2 + 4x_3 = 5, \\ \qquad\qquad x_3 = 1, \\ \qquad\qquad 0 = 1. \end{cases}$$

所以原方程组无解.

(3) **解**：对原方程组作初等变换

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 6, \\ \qquad\qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

因此原方程组有唯一解,解为$(1,2,-2)$.

(4) **答**：一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(1 + x_5), \\ x_2 = \dfrac{1}{6}(-4 - 3x_4 + 5x_5), \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

其中 x_4,x_5 为自由未知量.

(5) **答**：一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

其中 x_2，x_4 为自由未知量.

2. **解**：对原方程组进行初等变换

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix},$$

所以 $a=5$ 时方程组有解，一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(4 - x_3 - 6x_4), \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(3 + 3x_3 - 7x_4). \end{cases}$$

其中 x_3,x_4 是自由未知量.

3. **答**：$a=0,b=2$ 时有解，一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3. \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 是自由未知量.

4. **证明**：将方程组化为阶梯形方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}.$$

所以原方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$$

在有解时，有同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_5 = a_4. \end{cases}$$

一般解为

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5, \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5, \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5, \\ x_4 = a_4 + x_5. \end{cases}$$

其中 x_5 是自由未知量.

1.2 线性方程组的矩阵

内 容 摘 要

定义 2 由 $s\times n$ 个数排成的 s 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**.

矩阵中的数 a_{ij}称为矩阵的**元素**,其中第 1 个下标 i 表示这个元素位于矩阵中第 i 行;第 2 个下标 j 表示这个元素位于第 j 列.

用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\cdots$或$(a_{ij}),(b_{ij})\cdots$表示矩阵.有时候为了指明 $\boldsymbol{A}$ 或(a_{ij})是一个 $s\times n$ 矩阵,把它表成 $\boldsymbol{A}_{sn}$或$(a_{ij})_{sn}$.如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相等,都等于 n,就称 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵或 n **阶方阵**.简称**方阵**.

两个矩阵只有当它们的行、列数分别相等,并且对应的元素都相等时,才称为**相等**.即相等的矩阵是完全一样的.

定义 3 矩阵的**初等行变换**是指下列 3 种变换:

(1) 用一个非零的数乘矩阵的某一行.

(2) 把矩阵的某一行乘 k 后加到另一行上,k 是任意数.

(3) 互换矩阵中两行的位置.

任一个矩阵都可以经过一系列的初等行变换，变成阶梯形矩阵. 所谓**阶梯形矩阵**是指形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的矩阵. 即满足下列条件的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为阶梯形矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的非零行都在上面，零行都在下方.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个非零行，第 $i(i=1,2,\cdots,r)$ 行的首元(非零行中第一个非零元)所在的列为 j_i，则

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r.$$

阶梯形矩阵简称**梯阵**. 如果梯阵 $\boldsymbol{A}$ 还满足

(3) $\boldsymbol{A}$ 的每个首元都等于 1.

(4) 每个首元所在的列除首元外，其他元素都等于零，那么 $\boldsymbol{A}$ 就称为一个**约化阶梯形矩阵**. 简称**约化梯阵**.

每个矩阵都可经初等行变换化为梯阵，也可经初等行变换化为约化梯阵. 而且矩阵的约化梯阵是唯一的.

定义 4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为阶梯形矩阵后，阶梯形矩阵中非零行的个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

元素全等于 0 的矩阵称为**零矩阵**，用 $\boldsymbol{0}$ 表示零矩阵. 零矩阵的秩规定为 0，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{0})=0$.

给定一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

把系数按原来的位置写成一个 $s\times n$ 矩阵