

科学大师佳作系列

6

自然之数

——数学想象的虚幻实境

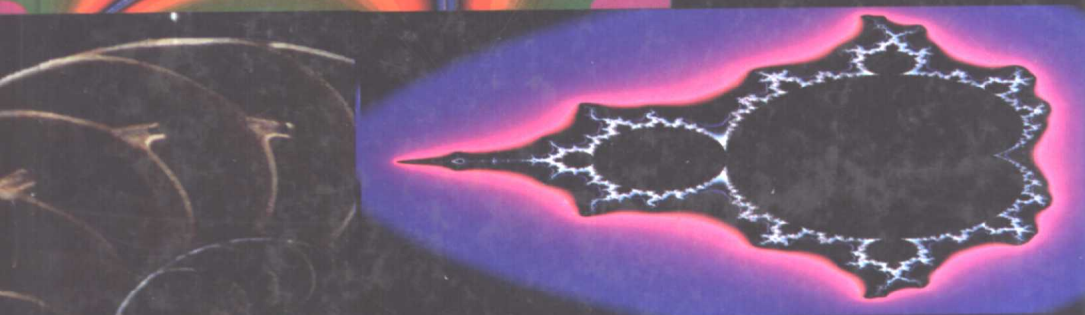
NATURE'S NUMBERS

伊恩·斯图尔特 著

潘 涛 译

刘华杰 校

谈祥柏 审



上海科学技术出版社

自然之数

——数学想象的虚幻实境

伊恩·斯图尔特 著

潘 涛译 刘华杰校 谈祥柏审

上海科学技术出版社

内 容 提 要

《自然之数》为美国约翰·布罗克曼公司组织世界著名科学家分别撰写,并于1994年开始推出的一套反映世纪之交科学前沿问题的《科学大师佳作系列》丛书之一。全世界有20多个国家和地区共同推出这套丛书的各种文本。

本书是专门为非数学专业的一般读者而写,因此,文字简洁易懂,而且全书没有一个复杂的数学公式。书中用了许多饶有趣味的例子来叙述数学的发展历史,介绍当代数学所面临的前沿问题,以及展望未来数学的发展趋势。这是一本非常精彩的科普读物。

责任编辑 张跃进

自 然 之 数

——数学想象的虚幻实境

伊恩·斯图尔特 著

潘 涛译 刘华杰校 谈祥柏审

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 常熟市印刷六厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 3.75 插页 4 字数 88,000

1996年11月第1版 1997年3月第2次印刷

印数 21,001—41,000

ISBN 7-5323-4028-7/O·202

定价:10.00元

Published by arrangement with
JOHN BROCKMAN ASSOCIATES, INC.
in association with BARDON-CHINESE MEDIA AGENCY
ALL RIGHTS RESERVED

编译委员会名单

编译委员会主任	朱光亚
顾问	龚心瀚
编译委员会副主任	谢希德
	叶叔华
编译委员会委员	(以姓氏笔划为序)
	文有仁
	卞毓麟
	陈念贻
	杨沛霆
	杨雄里
	吴汝康
	何成武
	郑 度
	洪国藩
	胡大卫
	谈祥柏
	戴汝为

《科学大师佳作系列》中文版序

人类正在迎接世纪之交。即将消逝的 20 世纪,科学技术又有了过去无法比拟的巨大发展与进步。科学上的重大发现,与技术发明、创造相互交替影响与促进,使人们对客观世界的认识更深入、更丰富多采了。

以“宇宙演化”这一课题为例,《科学美国人》杂志 1994 年 10 月号以“宇宙中的生命”为题的专刊,登载了詹姆士·皮博(P. James E. Peebles)等 4 位科学家的综述文章,介绍了近年来对宇宙起源的演化问题的研究成果——大爆炸标准模型。按照这一理论,宇宙是在大约 150 亿年以前从炽热而且稠密的物质与能量“大爆炸”而形成,随着它急骤膨胀、冷却,逐渐衍生成众多的星系、星体、行星,直至出现生命。人类生活于其中的太阳系,约在 50 亿年前才开始出现。这篇文章指出,研究宇宙学问题的还有哲学家、神学家、神秘主义者;然而,与他们不同的是,科学家们只接受经过实验或观测检验过的事实。文章还指出:“我们对宇宙起源与演化的认识,是 20 世纪科学研究的重大成就之一,这正是基于几十年的创新实验与理论研究的结果。用地面和发射到空间的现代望远镜,可探测到远在数十亿光年之外的星系发出的光,它告诉我们宇宙年青时是何种模样。用粒子加速器可探索宇宙演化初期其高能环境的基础物理学。用人造卫星可探测到宇宙早期膨胀后留下的本底射线,使我们在能观察到的宇宙最大尺度范围内勾画出它的大致图象。”当然,由于观察和实验受到条件和能力的局限,正如过去许多理论认识仅是客观真实的一种近似那样,也还有许多问题尚不能由这一理论作出回答,需要科学家们继续努力进行创新研

究,并通过更多的观察、实验来解决。

江泽民同志近年来多次指出,各级领导干部要努力学习与掌握现代科学技术知识。1994年12月,中共中央、国务院发出了《关于加强科学技术普及工作的若干意见》,要求从科学知识、科学方法和科学思想的教育普及3个方面推进科普工作。问题是:当代科学之发展如此迅速,其前沿领域又如此艰深,究竟能不能凭借通俗的语言,使广大干部和社会公众对当代科学成就取得比较中肯的了解?

这很不容易,但回答仍是肯定的。已故美国科普泰斗艾萨克·阿西莫夫(Isaac Asimov)曾经说过:“只要科学家担负起交流的责任——对于自己干的那一行尽可能简明并尽可能多地加以解释,而非科学家也乐于洗耳恭听,那么两者之间的鸿沟便有可能消除。要能满意地欣赏一门科学的进展,并不非得对科学有透彻的了解。归根到底,没有人认为,要欣赏莎士比亚,自己就必须能写出一部伟大的文学作品。要欣赏贝多芬的交响乐,也并不要求听者能作出一部同等的交响乐。同样地,要欣赏或享受科学的成就,也不一定非得躬身于创造性的科学活动。”

这番话很有道理。而美国布罗克曼公司组织编写的《科学大师佳作系列》(Science Masters Series)则堪称贯彻这一宗旨的上乘之作。该系列的作者们,既是当代科学前沿研究领域中有盛誉的专家,又是成绩卓然的科普作家。他们的这些作品内涵丰富,深入浅出,水准确实是很高的。同时,该系列的选题布局也很有特色:既有选择地抓住了当前科学发展的若干热点或焦点,又从整体上兼顾了学科覆盖面。这从该系列第一辑12本书和第二辑10本书的选题即可见一斑。

《科学大师佳作系列》是世界科普出版界的一项盛举:它将在全球范围内的十几个国家中,以二十几种语言出版。上海科学技术出版社与布罗克曼公司签约,取得了出版中译本的版权。为确保中译本早日问世,出版社邀请了10余位专家、学者组成中文版编译委员会,决定每拿到一本英语原著打字稿,即着手组织本学科领域

中既有学术专长、又有著译和科普写作经验的学者翻译。经过编译委员会诸同仁和全体译、校、编者的共同努力,《科学大师佳作系列》中译本中首先推出的3本已呈献于读者面前,即《宇宙的起源》、《宇宙的最后三分钟》与《人类的起源》。这3本书也正好是我前面举例讲到的介绍“宇宙的起源与演化”课题的精辟之作。作为中文版编译委员会的主任,我对此委实是不胜欣喜的。

该系列的作者之一、哲学家丹尼尔·丹尼特说过:“我将这项计划(按:即出版《科学大师佳作系列》)视为向这个世界撒下了一张网,它捕获的将是我们这颗行星的下一代思想家和科学家。”但愿果真如此。与此同时,我也衷心地企盼我国的科学家、科普作家、出版家们能并肩奋斗,不懈努力,写作和出版一批足以雄视世界科普之林的传世佳作,为我国科学事业的长足进步作出更大的贡献。

谨序如斯,愿与读者共勉。

朱 光 亚

1995年1月20日于北京

目 录

序 言	虚拟幻境机	1
第一章	自然之秩序	4
第二章	数学有何用	11
第三章	数学是什么	23
第四章	变动之常数	34
第五章	从小提琴到录象机	44
第六章	破缺的对称	52
第七章	生命的节律	65
第八章	骰子掷上帝吗	74
第九章	液滴、动力学和雏菊	87
尾 声	形态数学	99

序言 虚拟幻境机

我做了一个梦。

我被空无包围。不是虚无的空间，因为没有什么空间是虚无的。不是黑暗，因为没有任何东西是黑色的。只是缺无，有待成为存在的缺无。我用思维下指令：要有空间*。但要有何种空间呢？我有一个选择：三维空间，多维空间，甚至弯曲空间。

我选择了。

我又用思维下了一条指令，这个空间充满了到处渗透的流体，流体以波浪和涡旋形式旋转。这里是平静的波浪，那里是泛泡的湍乱的大漩涡。

我给空间着上蓝色，在流体中画许多白色的流线，使流动模式显现。

我在流体中放一个小红球。它无依无靠地盘旋，对围绕它的混沌一无所知，直到我发话为止。后来，它沿一条流线流走了。我把自己压缩到原先的百分之一大小，置身于这球的表面，鸟瞰那些逐渐显露的事件。每隔数秒，我在流体中放一个绿色图标，以记录球的流程。要是我轻按一个图标，它就像下雨时沙漠仙人掌的延时摄影那样开花，并且在每一片花瓣上都有图形、数字和符号。我也可以使小红球开花，开花的时候，那些图形、数字和符号随着球的运动而变化。

由于对符号的行进不满意，我把球轻推到一条不同的流线上，细微地调节它的位置，直到看见我正寻求的清楚的奇点轨迹为止。

* 仿《圣经·创世记》中的话：要有光 ——译者注

我捻响手指，球推断出它自身的将来，并报告它所发现的事情。前景大有希望……。突然，有一整片均为流体所荷载的红球，它们像一大群很快散布开来的鱼那样打旋、伸出卷须、展平成片。然后有更多的球群加入到这一游戏中来——金色球、紫色球、棕色球、银色球、粉红色球……。我的色彩已近枯竭。各种色彩的球片以复杂的几何形式截交。我将它们冻结，打磨光滑，画上条纹。我用手势将球挥去。我把图标召来，审视它们展现的花瓣。我把有些花瓣取下，系在一个半透明的网上，这个网已经像从薄雾中显露的地形那样显现了。

好！

我发布一条新指令。“存盘。标题：三体问题中一个新的混沌现象。日期：今天。”

空间崩溃，空空如也。然后，上午的研究结束了，我从我的虚拟幻境机(Virtual Unreality Machine)中脱身出来，去寻觅我的午餐。

这个奇特的梦几近事实。我们已经拥有了模拟“正常”空间中所发生的事件的虚拟实境系统*。我把我的梦叫做虚拟幻境，因为它可以模拟任何由数学家丰富的想象力创造出来的东西。虚拟幻境机的大部分部件已经存在。计算机图形软件可以让你“飞越”任何选定的几何对象；动力学系统软件可以刻划任何选定方程的演化状态；符号代数软件可以解除令人生畏的演算所带来的痛苦，并且得出正确的答案。对于数学家来说，能够进入他们自己的创造物的内部，看来只是时间问题。

尽管虚拟幻境机这种技术可能美妙无比，但是，我们并不需要它使我从梦境中醒来。如今，这个梦已是一种现实，它出现在每一位数学家的头脑里。这正是当你在进行数学创造时所能体会到的。

* 指利用高性能的计算机软硬件和传感器，给操作者创造一种具有身临其境的沉浸感、完善的交互作用、激发想象的信息环境的计算机系统。虚拟实境(Virtual Reality)又译虚拟现实、临境等 ——译者注

数学家世界中的对象，通常用符号标签或名称，而不是用色彩来区分。但那些符号标签对生活在数学世界里的人来说如色彩一样鲜明。事实上，尽管我的想象丰富多采，但我的梦只是生活在其间的每一位数学家想象力世界的苍白的投影。在这个世界里，弯曲空间或三维以上空间不但司空见惯，而且无可置疑。你可能发现，我描述的梦境既陌生又奇怪，与数学的代数符号截然不同。这是因为数学家迫不得已才用符号和图形来描述他们的世界。但符号并不是那个世界，恰如音符不是音乐一样。

几个世纪以来，数学家们用集体的智慧创造了他们自己的世界。我不知道这个世界在什么地方——就“地方”这个词的通常语义而言，我认为它并不存在，但我向你保证：当你沉浸在其中时，这个世界看起来非常真实。数学这个精神世界不仅仅非常独特，而且正是由于这些独特性，才使人类对周围的世界有了许多深刻的认识。

我将引导你在那个数学世界里游览观光。我将力图赋予你一双数学家的眼睛，并将尽我所能来改变你观照自身世界的方式。

第一章 自然之秩序

我们生活在一个由诸多模式组成的宇宙中。

繁星夜夜周而复始地划过天空。一年四季循环更替。这世界上没有两片完全相同的雪花，但所有雪花都具有六重对称性；老虎和斑马身披条带花纹，而美洲豹和袋狼则身着斑点花纹。错综的波列穿越海洋；非常相似的沙丘成列地横越沙漠。五颜六色的光弧交织成彩虹装扮天空；明亮的圆晕有时环绕着冬夜的月亮；球形的雨滴会从云中飘落。

人类的心智和文化已经为模式的识别、分类和利用建立了一套规范的思想体系。我们把它称作为数学。通过运用数学建立有关模式的概念并使之条理化，我们揭示了一个很大的秘密：自然之模式不仅令人赞叹，而且它是阐明支配自然过程的规律至关重要的线索。400年前，德国天文学家约翰尼斯·开普勒(Johannes Kepler)写了一本名为《六角雪花》(*The Six-Cornered Snowflake*)的书，他在书中指出，雪花必定是由微小的相同单元集聚在一起而成。开普勒的这一认识远远早于物质是由原子组成的理论被世人所公认。开普勒并不是通过实验而得出这样的结论的，他只不过对各种各样的常识进行了深入的思考。他的结论的主要证据是雪花的六重对称性，这种对称性是物体有规则集聚的自然结果。假如你在桌子上平铺一大堆相同的硬币，并尽可能密实地把它们集聚在一起，这样你就得到一个蜂窝状排布，这一排布中的每1枚硬币——那些在边缘处的硬币除外——均为6枚其他硬币包围，并呈正六角形。

星星夜间有规则的运动也是一条线索，通过这条线索我们可

以认识到地球运转这一事实。波浪和沙丘是了解水、沙和空气流动规律的线索。老虎的条纹和袋狼的斑纹显示了生物生长和生物形态中的数学规律。天上的彩虹告诉了我们有关光的散射知识，并间接地证明了雨滴是小水珠这一事实。此外，月晕也是一条了解冰晶形状的线索。

在各种各样的自然线索中蕴含着许多美妙的事物，我们毋需受任何数学训练就可认识到。在数学史话中从线索出发推断自然潜在的规则和规律也存在美，但那是另一种美，它适合于思想而不是事物。数学之于自然，恰如歇洛克·福尔摩斯(Sherlock Holmes)之于证据。这位具有传奇色彩的大侦探能根据雪茄烟蒂来推断出吸烟者的年龄、职业和收入状况。然而他的搭档华生(Watson)医生对此种事情却不敏感。很多时候，他只能怀着疑惑又钦佩之情做一个旁观者，看着这位破案大师铺展开无懈可击的逻辑链条。对一个数学家而言，当六角形雪花的证据呈现在面前时，他就能推断出冰晶的原子几何结构。假如你是华生，这一证据可能仅仅是一个令人困惑的圈套，但假如你是福尔摩斯，你将洞悉其中的奥秘。

模式不但蕴含美，而且很有用。一旦我们学会了辨识背景模式，许多例外就会突然变得格外醒目。例如，作为背景的沙漠处于静止状态，奔跑中的狮子就会格外抢眼；在映衬着恒星的循环背景中，少数以截然不同的方式运行的星星因特别引人注目而会被区分出来。希腊人把这些星星称为“planetes”，意思是“漫游者”，它被保留在我们的术语“行星”(planet)中。理解行星运动模式，比理解恒星何以在夜晚循环运动所花的时间要长得多，其原因主要在于我们都处在太阳系内，与太阳系一起运动。有些事物从外部观察要比从内部观察简单得多。行星是揭示隐藏在引力与运动背后规律的线索。

我们仍然在学习认识新的模式。就在最近 30 年里，人类已逐渐清楚地认识到两类模式，即如今被称作“分形”(fractal)和“混沌”(chaos)的模式。分形是在愈来愈细微的尺度上重复其结构的

几何形状,我将在本章末尾详谈。混沌是一种表现无规性,而其起源是完全确定性的,我将在第八章详述。自然界在亿万年前就“知道”这些模式,例如云朵是分形,天气呈混沌。要想理解这些,得花点功夫才行。

最简单的数学对象是数字,自然界最简单的模式是数字模式。月相从新月到满月再回到新月,每 28 天完成一个循环;一年大约有 365 天;人有 2 条腿;猫有 4 条腿;昆虫有 6 条腿;蜘蛛有 8 条腿;海星有 5 条臂(有的有 10 条、11 条臂,甚至 17 条臂,这取决于物种)。三叶草通常有 3 片叶,4 片叶的三叶草表示幸运,这种迷信反映了一种由来已久的信念——模式的例外是特别的。在花的花瓣中存在着一个奇特的模式。几乎所有的花,花瓣数目是如下奇特序列的数字中的一个:3,5,8,13,21,34,55,89。例如,百合花花瓣有 3 瓣;毛茛属植物有 5 瓣;许多翠雀属植物有 8 瓣;万寿菊有 13 瓣;紫菀属植物有 21 瓣;大多数雏菊有 34、55 或 89 瓣。你几乎找不到其他如此常见的数字。这些数字有一个明显的模式,人们稍加努力即可发现:每一个数字都是前两个数字的和。例如: $3+5=8$, $5+8=13$,依此类推。在向日葵葵花盘内葵花籽的螺旋模式中亦可找到同样一些数字。这一特定模式在几个世纪前就被注意到了,此后又被广泛研究,但真正满意的解释到 1993 年才给出。这在第九章中我会详述。

就寻找模式而言,数字命理学方法是最容易的,因而也是最危险的。说它容易,是因为任何人都会做。说它危险,乃基于同样理由。困难在于把非偶然的数字模式与偶然的数字模式区分开来。这里有一个恰当的例子。开普勒曾醉心于研究自然界中的数学模式,他花了大半辈子的时间来寻找行星行为中的数学模式。他根据太阳系恰好存在 6 颗行星这一现象(当时只知道水星、金星、地球、火星、木星和土星),提出了一个简洁的理论。他还发现了一个很奇特的模式:6 颗行星的公转周期(即行星绕太阳运转一周所需的时间)与它们距太阳的距离有关联。回想一下,一个数的平方由它自乘而得,例如 4 的平方是 $4 \times 4 = 16$ 。同理,一个数的立方由它自乘

两次而得,例如4的立方是 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 。开普勒发现,若取任一行星距太阳距离的立方,除以其公转周期的平方,则总能得到同一个数。这并不是一个特别雅致的数,但它对所有6颗行星而言都相同。

以上这些数字命理学上的观测哪个更重要?后人认为是第二个,即带平方和立方的计算。因为这一数字模式是通往艾萨克·牛顿(Issac Newton)万有引力理论的关键步骤之一。开普勒就行星数目建立起来的简洁理论早已被埋葬得无影无踪了。这首先因为,这一理论必然是错误的,我们现在知道太阳系有九大行星,而不是6颗,甚至可能存在更多的行星,离太阳更远的行星,它们小得和暗淡得无法检测。但更重要的是,我们不再期望就行星的数目找到一个简洁的理论。我们认为,太阳系由围绕太阳的一团星云浓缩而成,行星的数目取决于星云中的物质有多少、物质如何分布、物质运动得快慢以及向什么方向运动。一团似乎同样的星云可能使太阳系存在8颗,或11颗行星。这个数字是偶然的,而不是普适的,它依赖于星云的初始条件,并不反映自然界的一般规律。

用数字命理学办法搜寻模式所面临的一个很大的问题是,每个可产生许多偶然模式。何者是普遍的,何者是偶然的并不总是显而易见的。例如,猎户星座腰带上有3颗亮星,它们近乎等间距,并且位于一条直线上。那是自然界内在规律的一条线索吗?这儿有一个类似的问题。木卫一、木卫二和木卫三是木星3颗较大的卫星,它们分别以1.77天、3.55天和7.16天绕木星运转一周。在这3个数字中,后一个数几乎恰好是前一个数的两倍。那是一个非偶然模式吗?3颗亮星根据位置排成行;3颗卫星则根据运转周期“排成行”。如果算作模式的话,哪一个模式是重要线索呢?请先考虑一会儿,我在下一章再作讨论。

除了数字模式之外,还存在着几何模式。实际上,本书本应当取名为《自然之数与形》,之所以没有这样做有两条理由。第一,书名没有“与形”两字读起来更上口。第二,数学形状总是可以归并为数——计算机就是藉此处理图形的。图形中的每一小象点是以荧

屏上横向和纵向位置的一对数字来存贮和操作的。这两个数被称为小象点的坐标。普通的形状是小象点的集合体，它可以表示成一系列数对。不过，最好还是把形状视为形状，因为我们可以利用我们强大的直观视觉能力来对付形状，而最好将一系列复杂的数字留给我们较弱的、较差的符号能力去处理。

直到最近，吸引数学家主要的是一些很简单的形状：三角形、四边形、五边形、六边形、圆形、椭圆形、螺旋形、立方体、球体、锥体等等。这些形状都可在自然界中找到。例如，彩虹就是许多圆的集合体，每个圆有一种颜色。我们通常看不到完整的圆，见到的只是一段弧。但从大气中看到的彩虹可以是完整的圆。你还可以从池塘里的波纹、人眼以及蝴蝶翅膀上的花斑中见到圆。

谈到波纹，流体的流动提供了无穷无尽的自然之模式。在自然界中存在着多种不同的波：以平行横波形式拥向海岸的波；在航行中船的船尾以 V 字形扩展的波；因水下地震向外辐射的波。大多数波是群聚物，但有的波，如当涨潮能量受限于坚固河道时扫荡河面的潮涌是孤立波。另外，还存在盘旋着的螺旋漩涡和小涡旋；存在貌似无结构、无规起泡沫的湍流，它是数学和物理学中的一大谜团。大气中也有类似的模式，最令人惊奇的莫过于环绕地球的宇航员所见到的飓风那巨大的螺旋。

陆地上也存在波模式。地球上最壮观的地貌之一是阿拉伯沙漠和撒哈拉沙漠巨大的沙质荒漠（或叫沙海）。在那甚至当风以不变的方向稳定地吹的时候，沙丘也会形成。最简单的模式是横列沙丘模式，它像海浪一般，以平行的直线横列排列，与盛行风的风向成直角。有时候横列本身变得波浪起伏，这种情形叫新月形沙垅；有时候横列碎裂成数不清的盾形新月形沙丘。如果沙略微潮湿，并且有一些把沙维系在一起的植被，你会发现抛物线形沙丘——在风向上有圆滑顶点的 U 形沙丘。这些横列有时成簇出现，形如耙齿。如果风向多变，可能有其他形式。例如会形成星形沙丘簇，每一簇有从一个主峰辐射出的若干不规则手臂。它们本身呈无规斑纹模式排列。