陆传赉 王玉孝 姜炳麟 编著

概率论与数理统计习题解析

GAILÜLUN YU SHULITONGJI XITI JIEXI

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与数理统计
习 题 解 析

陆传赉　王玉孝　姜炳麟　编著

北京邮电大学出版社
·北　京·

内 容 简 介

本书集编著者在概率论与数理统计学科对本科生与研究生近40年之教学实践,将工科、理科及管理科学中遇到的概率论与数理统计方面的典型例题加以解析论证或解答,通过读者阅读研习,使其掌握一把求解或论证概率论与数理统计习题的钥匙.

本书可作为高等学校工科、理科、经济或管理学科本科生、研究生的教学辅导与参考书,对考研及某些专业考博的学子也有一定的指导意义.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题解析/陆传赉,王玉孝,姜炳麟编著. —北京:北京邮电大学出版社,2003

ISBN 7-5635-0587-3

Ⅰ.概... Ⅱ.①陆...②王...③姜... Ⅲ.①概率论—高等学校—解题 ②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 042862 号

出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路10号)邮编:100876
发行部电话:(010)62282185 62283578(传真)

电子信箱:publish@bupt.edu.cn

经 销:各地新华书店

印 刷:北京通州皇家印刷厂

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:18.25

字 数:471千字

印 数:1—3 000册

版 次:2003年9月第1版 2003年9月第1次印刷

ISBN 7-5635-0587-3/O·35 定价:28.00元

前　　言

目前,国内已出版了多种版本的概率论与数理统计典型题分析解集或解题方法与技巧之类的教学辅导书,其中多数是专门为工科学生而编写的;有的书虽指出它也适合理科学生的需要,但据我们所知其内容是很不完善的.根据我校及其他院校有关的理、工、管理学科的学生之需要,集我们近40年本科与研究生教学之实践,分工合作各尽其责地编写了这本教学辅导书.

本书内容除编写了市场上出版过的理、工科学生需要的概率论与数理统计的内容外,还增加了理科或管理学科学生所需要的其他内容,这包括增加了概率论部分的随机变量的特征函数与母函数、强大数定律、重对数律、独立随机变量和的收敛性等;数理统计部分则增加了最大功效检验、广义似然比检验、正态性检验(即Shapiro-Wilk检验和偏度、峰度检验)、独立性检验(即联立表检验和Spearman检验)等内容.

本书第一篇概率论部分前四章由王玉孝编写,第五、六章由陆传赉编写;第二篇数理统计各章由姜炳麟编写.全书由陆传赉统编与整理.

本书不少例题是首次编写的,也有不少例题的证明或解法与已出版过的方法不同.全书各章配有一定数量的练习题,并给出了答案或提示,便于读者在演习过程中自行检查时参考.

在本书编写过程中,自始至终得到我校信息工程学院郭军院长的支持和鼓励,并且田宝玉、杨洁副院长经常关心和指导我们的编写工作,院里为本书的编写还给予了一定的资金资助.此外,崔学莹、王蕴辉、周慧荣、兰淑平、赫绍英、崔新宇诸同志为书稿的腾

写、打印和插图作了大量的工作，历届研究生李奉平、侯书果、于凯、张宪力、王民、赵船钢、杨波、申志坚、徐洪志对若干例题的解答均提供过不少有用的方法和思路．在此一并向上述支持帮助过我们的同志表示衷心地感谢．

限于编者水平，书中难免有错漏或不当之处，恳请广大读者批评、赐教，以期更正、完善．

编　者

2003 年 4 月

目　　录

第一篇　概率论

第一章　概率论的基本概念 …… 1
一、内容提要 …… 1
（一）随机事件及其运算 …… 1
（二）事件的概率及其性质 …… 4
（三）条件概率及条件概率空间 …… 7
（四）事件的独立性 …… 9
二、典型例题分析 …… 11
（一）概念题 …… 11
（二）计算题 …… 22
（三）证明题 …… 52
三、练习题 …… 69
四、练习题答案或提示 …… 76
第二章　随机变量及其分布 …… 78
一、内容提要 …… 78
（一）随机变量及其分布函数 …… 78
（二）离散型随机变量 …… 79
（三）连续型随机变量 …… 81
（四）随机变量函数的分布 …… 85
二、典型例题分析 …… 88
（一）概念题 …… 88
（二）计算题 …… 94

(三) 证明题 …… 118
三、练习题 …… 126
四、练习题答案或提示 …… 132
第三章　多维随机变量及其分布 …… 137
一、内容提要 …… 137
(一) 多维随机变量及其分布函数 …… 137
(二) 多维离散型随机变量 …… 140
(三) 多维连续型随机变量 …… 141
(四) 边缘分布 …… 143
(五) 条件分布 …… 145
(六) 随机变量的相互独立性 …… 147
(七) 多维随机变量函数的分布 …… 149
二、典型例题分析 …… 154
(一) 概念题 …… 154
(二) 计算题 …… 156
(三) 证明题 …… 192
三、练习题 …… 204
四、练习题答案或提示 …… 211
第四章　随机变量的数字特征 …… 217
一、内容提要 …… 217
(一) 数学期望 …… 217
(二) 方 差 …… 220
(三) 常用分布的数学期望和方差 …… 221
(四) 协方差 …… 221
(五) 相关系数 …… 222
(六) 随机变量的矩 …… 223
(七) 多维随机变量的数字特征 …… 224
(八) 多维正态分布 …… 226
二、典型例题分析 …… 227

（一）概念题 …… 227
（二）计算题 …… 230
（三）证明题 …… 254
三、练习题 …… 263
四、练习题答案或提示 …… 268
第五章　随机变量的特征函数与母函数 …… 272
一、内容提要 …… 272
（一）特征函数及其性质 …… 272
（二）多元特征函数及其性质 …… 275
（三）母函数及其性质 …… 277
二、典型例题分析 …… 279
（一）计算题 …… 279
（二）证明题 …… 288
三、练习题 …… 299
四、练习题答案或提示 …… 303
第六章　极限定理 …… 308
一、内容提要 …… 308
（一）随机变量序列的收敛性 …… 308
（二）大数定律 …… 310
（三）强大数定律 …… 312
（四）中心极限定理(CLT) …… 313
（五）重对数律 …… 315
（六）独立随机变量和的收敛性 …… 316
二、典型例题分析 …… 318
（一）概念与计算题 …… 318
（二）证明题 …… 325
三、练习题 …… 358
四、练习题答案或提示 …… 365

第二篇　数 理 统 计

第七章　抽样分布 …… 371
一、内容提要 …… 371
（一）基本概念 …… 371
（二）三个重要分布 …… 373
（三）抽样分布定理 …… 375
二、典型例题分析 …… 376
三、练习题 …… 391
四、练习题答案 …… 395
第八章　参数估计 …… 397
一、内容提要 …… 397
（一）点估计的方法 …… 397
（二）估计的标准 …… 398
（三）区间估计 …… 400
二、典型例题分析 …… 402
三、练习题 …… 425
四、练习题答案 …… 432
第九章　假设检验 …… 435
一、内容提要 …… 435
（一）假设检验的基本概念 …… 435
（二）最大功效检验 …… 436
（三）正态总体的期望与方差的假设检验 …… 437
（四）广义似然比检验 …… 437
（五）正态性检验 …… 440
（六）分布的拟合优度检验 …… 441
（七）齐一性检验 …… 442
（八）独立性检验 …… 443

二、典型例题分析 …………………………………………… 444
三、练习题 …………………………………………………… 474
四、练习题答案 ……………………………………………… 481
第十章 方差分析 ………………………………………… 483
一、内容提要 ………………………………………………… 483
(一) 单因素方差分析 ………………………………… 483
(二) 双因素方差分析 ………………………………… 484
二、典型例题分析 …………………………………………… 488
三、练习题 …………………………………………………… 506
四、练习题答案 ……………………………………………… 509
第十一章 回归分析 ……………………………………… 511
一、内容提要 ………………………………………………… 511
(一) 一元线性回归 …………………………………… 511
(二) 多元线性回归 …………………………………… 513
二、典型例题分析 …………………………………………… 516
三、练习题 …………………………………………………… 538
四、练习题答案 ……………………………………………… 541

附表 1 标准正态分布函数值表 ………………………… 543
附表 2 t 分布上侧分位数表 ………………………… 445
附表 3 χ^2 分布上侧分位数表 …………………… 547
附表 4 F 分布上侧分位数表 ………………………… 551
附表 5 相关系数检验的临界值表 ……………………… 563
附表 6 柯尔莫哥洛夫检验的临界值表 ………………… 564
附表 7 斯米尔诺夫检验的临界值 α 表 ……………… 566
附表 8 Spearman 检验临界值表 ……………………… 568
附表 9 Shapiro-Wilk 检验统计量 W^2 系数 $a_i(W)$表 ……… 569
附表 10 Shapiro-Wilk 检验临界值表 ………………… 571

第一篇 概 率 论

第一章 概率论的基本概念

一、内 容 提 要

(一) 随机事件及其运算

1. 随机试验、样本点和样本空间

(1) 随机试验

随机试验具有如下特征.

1° 可重复性:在相同的条件下,可以重复进行.

2° 一次试验结果的随机性:在一次试验中可能出现这一结果,也可能出现那一结果,预先无法断定.

3° 全体结果的可知性:所有可能的结果预先是可知的.

通常用 E(可以带下标)表示随机试验.

(2) 样本点和样本空间

一随机试验 E 的每一个可能的(不可分解的)结果,称为 E 的样本点,记为 ω.

一试验 E 的所有样本点组成的集合,称为 E 的样本空间,记为 Ω.

2. 随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

对于一个随机试验，在一次试验中，可能发生也可能不发生的事情称为该试验的随机事件，记为 $A,B,\cdots$（可以带下标）.

通常一随机试验的随机事件可以表示为它的一些样本点组成的集合. 对于一随机试验的一个随机事件，当且仅当它所包含的任一样本点在一次试验中出现，称它在这一次试验中出现.

只包含一个样本点的事件称为基本事件.

在任何一次试验中都出现的事件，称为必然事件，它就是 Ω 所表示的事件，因而用 Ω 表示必然事件.

在任何一次试验中都不出现的事件，称为不可能事件，它就是 $\varnothing$ 所表示的事件，因而用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

3. 事件之间的关系和运算

(1) 包含关系

设 A,B 为二事件，若"A 发生必有 B 发生"，称"A 包含在 B 中"或"B 包含 A"，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

$A\subset B\Leftrightarrow$任意 $\omega\in A$ 必有 $\omega\in B$，见图 1-1.

(2) 相等关系

设 A,B 为二事件，若 $A\subset B$，$B\subset A$，称"A,B 相等"，记为 $A=B$.

$A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$，见图 1-2.

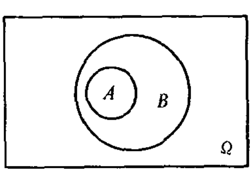

图 1-1

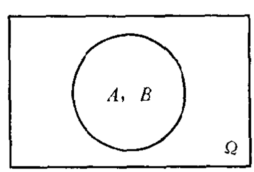

图 1-2

(3) 事件的并

设 A,B 为二事件，称事件"A,B 至少一个发生（A 发生或 B 发生）"为 A,B 的并（或和），记为 $A\cup B$.

$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$，见图1-3.

(4) 事件的交

设 A, B 为二事件，称事件"A, B 同时发生（A 发生而且 B 发生）"为 A, B 的交（或积），记为 $A \cap B$ 或 AB.

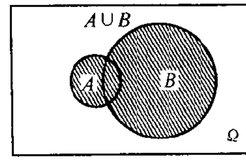

图 1-3

$AB = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$，如图1-4.

(5) 事件的差

设 A, B 为二事件，称事件"A 发生而 B 不发生"为 A 减去 B 的差，记为 $A - B$.

$A - B = \{\omega \mid \omega \in A$ 而 $\omega \notin B\}$，见图 1-5.

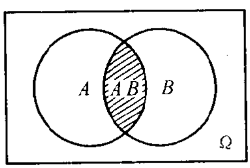

图 1-4

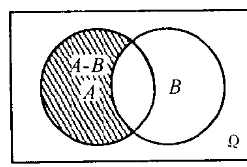

图 1-5

(6) 互不相容关系

设 A, B 为二事件，若"A, B 不能同时发生"，称 A, B 互不相容或互斥，记为 $AB = \varnothing$.

A, B 互不相容$\Leftrightarrow AB = \varnothing$ ，见图 1-6.

(7) 事件的余和对立事件

设 A 为一事件，称事件"A 不发生"为 A 的余事件或 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. $\overline{A} = \Omega - A$，见图 1-7.

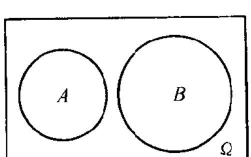

图 1-6

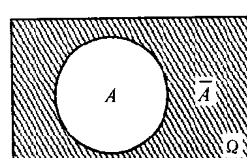

图 1-7

4. 事件的运算法则

1° 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

2° 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), ABC=(AB)C=A(BC)$.

3° 分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4° 对偶律：$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A}_k, \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A}_k$.

下列关系和运算要熟记：

$\varnothing \subset A \subset \Omega; A\subset A\cup B; B\subset A\cup B; A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$;

$AB\subset A; AB\subset B; A\subset B\Rightarrow AB=A; A-B\subset A; A\subset B\Rightarrow A-B=\varnothing$;

$\varnothing A=\varnothing; \overline{\Omega}=\varnothing; \overline{\varnothing}=\Omega; A\subset B\Rightarrow \overline{A}\supset\overline{B}; A-B=A\overline{B}=A-AB$;

$A\cup B=A\cup\overline{A}B; A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

（二）事件的概率及其性质

1. 事件概率的定义

(1) 古典概型

满足下列条件的随机试验，称为古典概型.

1° 有限性：样本点的总数是有限的.

2° 等可能性：所有基本事件是等可能的.

① 概率的定义　设 E 为古典概型，样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$A$ 是 E 的一个事件，$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_r}\}$，定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

② 概率的性质　对于古典概型，事件的概率具有下列性质：

1° $P(A)\geqslant 0$.

2° $P(\Omega)=1$.

3° 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}P(A_k)$.

(2) 几何概型

满足下列条件的随机试验，称为几何概型.

1° 有限性：样本空间是直线、二维或三维空间中度量（长度、面积或体积）有限的区间或区域.

2° 均匀性：样本点在样本空间上是均匀分布的（可通俗地称为是等可能的）.

① 概率的定义　设 E 为几何概型，样本空间为 Ω，A 是 E 的一个事件，定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)},$$

其中 $L(A),L(\Omega)$ 分别是 A,Ω 的度量.

② 概率的性质　对于几何概型，事件的概率具有下列性质：

1° $P(A)\geqslant 0$.

2° $P(\Omega)=1$.

3° 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

(3) 事件的频率和性质以及概率的统计定义

① 事件的频率　将试验 E 重复独立地进行 n 次，若其中事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中出现的频数，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 在这 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

② 频率的性质　事件的频率有下列性质：

1° $f_n(A) \geqslant 0$.

2° $f_n(\Omega)=1$.

3° 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则 $f_n\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} f_n(A_k)$.

③ 概率的统计定义　当 n 充分大，频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数 p 的附近摆动，定义事件 A 的概率 $P(A)=p$.

*2. 概率的公理化定义及性质

σ-代数　设 Ω 是一非空集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一些子集组成的集合类，若 $\mathscr{F}$ 满足：

1° $\Omega \in \mathscr{F}$.

2° 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$.

3° 若 $A_n \in \mathscr{F}, n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ-代数.

(1) 概率的公理化定义及概率空间

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ-代数，若对任一 $A \in \mathscr{F}$，有一实数与之对应，记为 $P(A)$，且满足：

1° $P(A) \geqslant 0$.

2° $P(\Omega)=1$.

3° 可列可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相交，则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

称 A 为 E 的随机事件，$P(A)$ 为 A 的概率，并称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间.

(2) 概率空间的性质

---

* 对有的读者，只要掌握概率的公理化定义和性质就可以了，不必深究 σ-代数和概率空间的概念.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，则 P 具有下列性质：

1° $P(\varnothing)=0$.

2° 有限可加性：如果 $A_k\in\mathscr{F},k=1,2,\cdots,n$，且 $A_iA_j=\varnothing\ ,i\neq j$，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$.

3° 可减性：如果 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

4° 对任意的 $A\in\mathscr{F}$，有 $P(A)\leqslant 1$.

5° 上、下连续性：如果$\{A_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $A_1\supset A_2\supset\cdots$，则$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$；如果 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$.

6° 一般加法公式：如果 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots,n$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

（三）条件概率及条件概率空间

1. 条件概率的定义及性质

(1) 条件概率的定义

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一已知概率空间，$B\in\mathscr{F},P(B)>0$，则称

$$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)},\ A\in\mathscr{F}$$

为在事件 B 发生的条件下 A 的条件概率.

(2) 条件概率的性质

条件概率满足：

1° $P(A|B)\geqslant 0,A\in\mathscr{F}$.