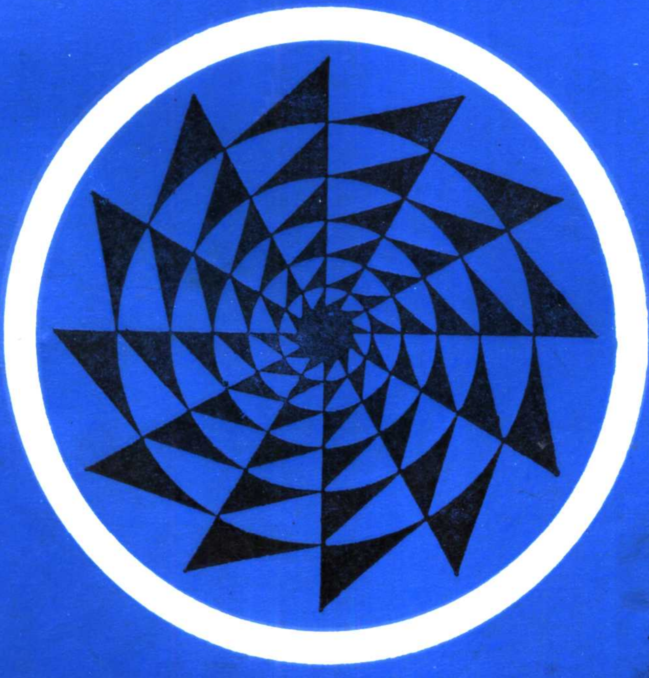
高等几何学习指导

邓纯江　周开瑞　罗崇善　编著



四川科学技术出版社

高等几何学习指导

邓纯江
周开瑞 编著
罗崇善

四川科学技术出版社

一九八八年·成都

责任编辑：张　俊
装帧设计：阴戈民

高等几何学习指导

邓纯江　周开瑞　罗崇善　编著

四川科学技术出版社出版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
ISBN 7-5364-0501-4/O·28

1988年4月第1版　开本：787×1092毫米1/32
1988年4月第1次印刷　字数：130千
印数：1—4500册　印张：6.25
定价：1.70元

前　　言

本书是大专院校数学系高等几何课程的配套书。根据高等几何教学大纲的要求，对这门学科的主要内容作了简明的概括，指出了它们的地位和作用。同时作者还注意到高等几何教学内容的一些新变化和新方向。

为了便于自学，本书收集并且解答了高等几何课程的大量习题，对重要的和较难的题目都给了多种解答。全书分成五章，每章最后一节收集了与该章内容相关的补充题，以开阔读者的视野。

为了发挥学习指导书的作用，书后用“若干注释”的形式提出并回答了读者学习高等几何时容易产生的疑窦，使初学者能较快地掌握这门学科的内容和学习方法。

本书特别适合参加高师函授、中学教师专业合格证书考试和数学专业自学考试的学员的需要，也可以作为高等师范院校、教育学院和民族学院数学系的高等几何课的教学参考书。

由于水平和时间的限制，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

最后，对本书在编写和出版的过程中给予帮助的同志表示衷心的感谢！

作　者

1987.5

目　　录

第一章　变换群与几何学

本章是全书的引论。它通过读者熟悉的欧氏几何和仿射几何的一些基本知识，介绍了变换群与几何学关系的克莱因观点。读者应当很好地理解这种新观点，以便明确高等几何研究的内容和方法，为以后几章学习射影几何作好准备。

一、变换群与几何学的一般关系

若映射T：$S\to S'$是既单又满的映射，则称T为变换。本书不区别S到S'和S到自身的映射，统一称为变换。

若集合S到自身的某些变换的集合

$G=\{T:\ S\to S\mid T$满足某种条件$\}$

满足：1．当$T\in G$时，有$T^{-1}\in G$；

2．当T_1，$T_2\in G$时，有$T_2\ T_1\in G$，则称G为S上的一个变换群。

集合S上若给了一个变换群G，则称S为空间，S的元素为点，S的子集F为图形。

在G的所有变换作用下，S的图形的不变性质和不变量，称为群G的不变性质和不变量。

设F、$F'\subset S$，若存在$T\in G$，使$F'=T(F)$，则称F和F'为等价图形。将等价图形看成同类图形的一种分类，称为群G下S的图形的分类。

研究S的图形在群G下的不变性质、不变量以及分类的命

题的全体，称为S上群G附属的几何学，这就是克莱因观点。

二、仿射群与仿射几何

1．仿射平面

建立了仿射坐标系$\sigma\{o;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$，$\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$的平面称为仿射平面。若$\overrightarrow{OM}=\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，则$M(x,y)$称为点$M$的坐标，$\{x,y\}$称为向量$\vec{a}$的坐标，记为$\vec{a}=\{x,y\}$。

2．仿射坐标变换和仿射变换

仿射坐标变换：表达同一点M在两个仿射坐标系σ和σ'之下的坐标$M(x,y)$和$M(x',y')$之间关系的变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (det(a_{ij}) \neq 0),$$

称为$\sigma \to \sigma'$的仿射坐标变换。

仿射变换：将直线变成直线，并且保持平行性和简单比的点变换。在给定坐标系σ之下，若仿射变换T：$M(x,y) \xrightarrow{T} M'(x',y')$，$\vec{a}=\{u,v\} \xrightarrow{T} \vec{a}'=\{u',v'\}$，则

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$(det(a_{ij}) \neq 0)$。

3．仿射几何的基本内容

仿射群：

$$G_6=\left\{T:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(a_{ij})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\middle|\ det(a_{ij})\neq o\right\}$$

不变性质：同素性，结合性，平行性。

不变量：简单比，面积比。

三、欧氏群和欧氏几何

1. 欧氏平面

直角坐标系：特殊仿射坐标系$\sigma=\{o, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$，

满足 $\vec{e}_i\vec{e}_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j,\end{cases}\quad(i,j=1,2)$。

建立了直角坐标系的平面称为欧氏平面。

2. 正交变换：保持长度不变的仿射变换。

变换式为T：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$AA^T=E$

正交变换分类$\begin{cases}\text{正运动：平移、旋转之积}\\\text{反运动：平移、旋转、反射之积。}\end{cases}$

3. 欧氏几何的基本内容

欧氏群：$G_3=\left\{T:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\middle|\ AA^T=E\right\}$。

不变性质：同素性、结合性、平行性、垂直性。

不变量：距离、交角、面积。

§1 变换与变换群

1．求证：在平面上两个平移一定可换，绕原点的两个旋转也一定可换。

证 用T_1、T_2分别表平移向量为$\vec{a}$和$\vec{b}$的平移，则由

$$T_1:\begin{cases}x' = x + a_1\\ y' = y + a_2\end{cases},\qquad T_2:\begin{cases}x' = x + b_1\\ y' = y + b_2\end{cases},$$

容易得到

$$T_1\cdot T_2:\begin{cases}x' = x + (a_1 + b_1)\\ y' = y' + (a_2 + b_2),\end{cases}$$

于是由向量加法的可换性$T_1\cdot T_2 = T_2\cdot T_1$，即两个平移可换。

类似地，有$R_\theta\cdot R_\varphi = R_{\varphi+\theta} = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi\cdot R_\theta$，即两个绕原点的旋转可换。

2．求证：非恒等的平移和绕原点的旋转的乘积不可换。

证 设$T:\begin{cases}x' = x + a\\ y' = y + b,\end{cases}$ $R:\begin{cases}x' = x\cos\theta - y\sin\theta\\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta,\end{cases}$

容易算得$R\cdot T:\begin{cases}x'' = x\cos\theta - y\sin\theta + a\cos\theta - b\sin\theta\\ y'' = x\sin\theta + y\cos\theta + a\sin\theta + b\cos\theta,\end{cases}$

$$T\cdot R:\begin{cases}x'' = x\cos\theta - y\sin\theta + a\\ y'' = x\sin\theta + y\cos\theta + b.\end{cases}$$ 若$R\cdot T = T\cdot R$,

则有 $\begin{cases} a(\cos\theta - 1) - b\sin\theta = 0 \\ a\sin\theta + b(\cos\theta - 1) = 0, \end{cases}$ 于是$(a,b) \neq (0,0)$

的充要条件为$\theta = 0°$。即$T \neq I$的充要条件是$R = I$。同理$R \neq I$的充要条件是$T = I$。这就是说，若T与R的乘积可以交换，则它们中至少有一个是恒等变换，这与已知条件矛盾。

3．求变换$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 \\ y' = 3x + 5y - 9 \end{cases}$的逆变换。

解 将变换式反解x, y（可用逆矩阵乘）得

$\begin{cases} x = 5x' - 3y' + 8 \\ y = -3x' + 2y' - 3, \end{cases}$ 写成$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$。

4．求变换

$$T_1:\ \begin{cases} x' = 2x + 2y + 5 \\ y' = 3x - y - 7 \end{cases} \quad 与T_2:\ \begin{cases} x' = 2x - 3y + 4 \\ y' = -x + 2y - 5 \end{cases}$$

的乘积$T_2 \cdot T_1$和$T_1 \cdot T_2$的表达式。

解 容易求得

$$T_2 \cdot T_1:\ \begin{cases} x'' = -5x + 7y + 35 \\ y'' = 4x - 4y - 24 \end{cases};$$

$$T_1 \cdot T_2:\ \begin{cases} x'' = 2x - 2y + 3 \\ y'' = 7x - 11y + 10 \end{cases}。$$

5．求证：以下四个变换构成变换群。

$$T_1:\ \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases};\ T_2:\ \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases};$$

$$T_3:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases};\quad T_4:\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$$

证1 由乘法表

	T_1	T_2	T_3	T_4
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4
T_2	T_2	T_3	T_4	T_1
T_3	T_3	T_4	T_1	T_2
T_4	T_4	T_1	T_2	T_3

知，此变换的集合对乘法封闭。且有$T_1^{-1}=T_1, T_2^{-1}=T_4$，$T_3^{-1}=T_3$，$T_4^{-1}=T_2$，所以此变换的集合构成一变换群。

证2 显然$T_1=R_0$，$T_2=R_{\frac{\pi}{2}}$，$T_3=R_\pi$，$T_4=R_{\frac{3\pi}{2}}$，故它们成群。

6．试证平面上非奇线性变换：

$\begin{cases}x'=\lambda x+a\\y'=\lambda y+b\end{cases}$，（其中$\lambda>o$，$a,b$都是参数）构成变换群，这个群是否可换？

证 令 $G=\left\{T:\begin{matrix}x'=\lambda x+a\\y'=\lambda y+b\end{matrix}\quad \lambda、a、b\in R, \lambda>o\right\}$，

任取G中的T_1：$\begin{cases}x'=\lambda_1x+a_1\\y'=\lambda_1y+b_1\end{cases}$，$T_2$：$\begin{cases}x'=\lambda_2x+a_2\\y'=\lambda_2y+b_2\end{cases}$，

则 $T_2\cdot T_1$：$\begin{cases}x''=\lambda_2\lambda_1x+\lambda_2a_1+a_2\\y''=\lambda_2\lambda_1y+\lambda_2b_1+b_2\end{cases}$ 也属于G；

$$T_1^{-1}:\ \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\lambda_1}x - \dfrac{a_1}{\lambda_1} \\ y' = \dfrac{1}{\lambda_1}y - \dfrac{b_1}{\lambda_1} \end{cases}$$ 也属于G，故G是群。但一般

$T_2 \cdot T_1 \neq T_1 \cdot T_2$，故不是可换群。

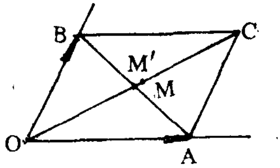
7．求证平面上所有变换 $\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \end{cases}$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$构成变换群。

证 与上题作法相同，略去。

§2 仿射坐标和仿射坐标变换

1．利用仿射坐标系证明平行四边形对角线互相平分。

证 如图选择坐标系，使$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$，则$A(1,0)$与$B(0,1)$连线的中点$M$的坐标为$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，



第1题

$O(0,0)$与$C(1,1)$连线的中点M'的坐标为$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，故$M \equiv M'$，即对角线互相平分。

2．平面上新坐标系的原点和新轴上的单位点的坐标分别是(1,1)，(2,1)，(1,2)时，写出坐标变换式。

解1 设所求坐标变换为 $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_1 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_2, \end{cases}$

注意到新原点O'的旧坐标为(1,1)，新坐标为(0,0)；x'轴上的单位点的旧坐标为(2,1)，新坐标为(1,0)；y'轴上的单位点的旧坐标为(1,2)，新坐标为(0,1)，分别代入上变换式，可定出$a_1=a_2=1$，$a_{11}=1$，$a_{21}=0$，$a_{12}=0$，$a_{22}=1$，故得

所求坐标变换为$\begin{cases}x=x'+1\\y=y'+1\end{cases}$。

解2 由于$\overrightarrow{e_1'}=\{2-1,1-1\}=\{1,0\}$，$\overrightarrow{e_2'}=\{0,1\}$，

且$\overrightarrow{OO'}=\{1,1\}$，故得变换式。

3．已知仿射坐标变换$\begin{cases}x=y'-2\\y=x'+y'-1\end{cases}$，

1° 求点$P_1(-1,3)$，$P_2(-2,3)$在新坐标系下的坐标；

2° 求向量$\overrightarrow{v_1}=\{-3,2\}$，$\overrightarrow{v_2}=\{2,-2\}$在新坐标系下的分量；3° P点的新坐标为(5,3)，求它在原坐标系下的坐标；4° 求直线$2x+y+2=0$在新坐标系下的方程。

解 1° 原坐标变换也写成$\begin{cases}x'=-x+y-1\\y'=x+2\end{cases}$，

将旧坐标代入得P_1与P_2的新坐标为(3,1)与(4,0)。

2° 对应的向量变换式为$\begin{cases}u'=-u+v\\v'=u\end{cases}$，代入得$\overrightarrow{v_1}$与$\overrightarrow{v_2}$的新分量为$\{5,-3\}$与$\{-4,2\}$。

3° P点的旧坐标为(1,7)。

4° 将变换式代入原方程得新方程为 $x'+3y'-3=0$。

§3 仿射变换

1．试证满秩线性变换T：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

将直线变成直线，且保持平行性和平行线段的比。

证　任取直线l：$Ax+By+C=0$，为求它在T下的象，将原变换式反解，设为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

代入，由于$-C = Ax+By = (A\ \ B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= (A\ \ B)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (A\ \ B)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$ 而且

$$(A\ \ B)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (Ab_{11}+Bb_{21} \quad Ab_{12}+Bb_{22})$$

$\neq (0,0)$，故l在T下的象集的坐标满足方程

$$(Ab_{11}+Bb_{21})x' + (Ab_{12}+Bb_{22})y' + Ab_1 + Bb_2 + C = 0$$

这说明l的象是直线。

为证保持平行性和平行线段的比，只须证保持向量的线性关系$\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$。记对应的向量变换式为

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

则 $$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\left(\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix},$$

即变换T将$\vec{u} = \lambda \vec{v}$变成$\vec{u'} = \lambda \vec{v'}$。

2．求在仿射变换$\begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$下，点$P(1,0)$和$Q(-1,0)$的象点，直线$l$：$x + y - 2 = 0$的象直线。

解 将点的坐标代入变换式得P的象为$P'(1,4)$，Q的象$Q'(-3,2)$，原变换用象表示原象为$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + y' - 2) \\ y = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 7), \end{cases}$代入$l$的方程得象直线为$l'$：$2x' - y' - 1 = 0$。

3．求下列仿射变换的不动点。

T_1：$\begin{cases} x' = 4x + 5y - 11 \\ y' = 2x + 4y - 7; \end{cases}$ T_2：$\begin{cases} x' = 4x - y - 5 \\ y' = 2x + 3y + 2 \end{cases}$

解 由：$\begin{cases} x = 4x + 5y - 11 \\ y = 2x + 4y - 7 \end{cases}$解得$T_1$的不动点为$(2,1)$。同理$T_2$的不动点为$(1,-2)$。

4．求仿射变换$\begin{cases} x' = 7x - y - 1 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases}$的不动直线。