内 容 提 要

《文字的世界》是日本横地 清教授主编的中学生数学丛书第三卷，共分四章。作者山岸雄策运用现代数学的观点和方法，对文字的意义和文字式、展开和因式分解、数的集合和式子的集合以及文字的各种应用等数学内容，由具体到抽象，深入浅出的作出了详尽阐述。本书是广大中学数学教师教学参考用书，也是中学生丰富数学知识不可多得的课外读物。

日本中学生数学丛书（3）

文 字 的 世 界

〔日〕山岸雄策 著

刘正一译 马忠林审校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 印张 4⅛ 70,000字

1981年7月第1版 1981年7月第1次印刷

印数：1—9,680册

书号：13091·70 定价：0.55 元

出 版 说 明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地 清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林 人民出版社 一九八〇年元月

目　　录

第一章　文字的意义和文字式

§1. 文字的意义

（1）　如果不使用文字和记号

我们为了交流自己的想法，使用了各种文字和记号。如果不使用文字和记号的话，那么在生活的许多方面，将会感到十分不便。

随着科学的发展，需要研究越来越复杂的事物，在这里，文字和记号起到了很大的作用。如果不使用文字和记号，象这样一类的研究也就不可能进行了。

在数学里，以前，就使用了文字和记号。其用法也是各种各样的。在这里，指的不是我们日常所使用的「平假名」「汉字」「数字」，让我们想一想看，那种对于学习发展了的数学方面，所必需的文字的意义和作用吧。

首先，我们通过具体事例回顾一下，不使用这样的文字的时代，将是怎样的一种情况。

在纪元前三世纪，既或现在仍为人们所熟知的希腊的『欧几里德原本』一书，给了当时的学术以很大影响。

在这本书中，现在的中学生，用现在的形式学习的一部分内容，就是用当时的表达方式写的。

例如，下面是用英文写出的一段内容。

"If there be two straight lines, and one of them be cut into any number of segments whatever, the rectangle contained by the two straight lines is equal to the rectangles contatined by the uncut straight line and each of the segments."

这一段的中文意思如下。

「有两条线段，如果把其中一条分割成几部分，那么这两条线段围成的长方形，等于没被分割的线段和被分割出的各部分围成的长方形之和」

这段文字是有些难以理解，可是，在现在，就可以象下面这样来叙述。

假设图 1 中的两条线段长为 a，b。把长为 b 的线段分割成几部分都可以，比如分割成三部分。

设其长为 c，d，e，则 $b=c+d+e$。

用长为 a 和 b 的两条线段，作成如图那样的长方形，其面积为 $a\times b$，也就是

$$a\times(c+d+e)$$

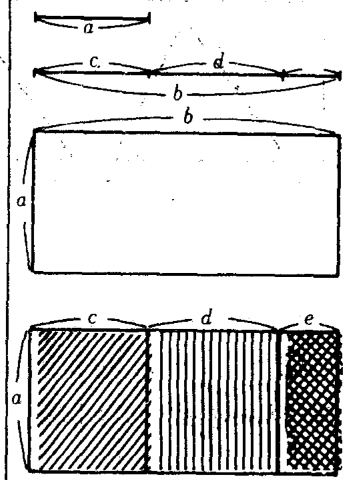
另外，用长为a和c，a和d，a和e各作长方形，其面积为

$$a\times c,\ a\times d,\ a\times e$$

把这三个长方形的面积加起来，则等于上面的长方形的面积。这就是前页那段叙述的意思。如果写成式子，则为

$$a\times(c+d+e)$$
$$=a\times c+a\times d+a\times e$$

由此可见，如果学习了文字的意义，并了解了它的用法，这个式子，表示的是一个很简明的事理，是可以理解的吧。



这三个长方形面积之和等于上面的长方形的面积

图 1

于是也就了解到，象此式这样的写法，比起前面用文字来叙述，该多么简明而易懂啊。

然而，在欧几里德的那个时代，象这样使用文字的方法还不曾有过。所以尽管写成式子是个简单的事情，在当时来说，除了写成不易懂的文字叙述之外，是没有其他办法的。

再举一个例子。例如，应用记号，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果

$$AB=A'B' \qquad BC=B'C'$$
$$\angle B=\angle B'$$

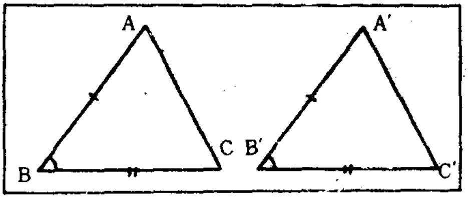


图 2

则 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$，$AC = A'C'$，$\angle A = \angle A'$，$\angle C = \angle C'$

关于这一点，用当时的形式来写的话，则写成下面这样，

「在两个三角形中，如果两组对应边分别相等，且它们的夹角相等，则底边和底边相等，三角形和三角形相等，剩下的两组对应角分别相等，就是说相等的边所对的角分别相等」

这就可以了解，如果使用文字和记号，是多么方便的事情。『欧几里德原本』一书搜集并总结了直到当时所研究的许多问题。此书 *，早已有了日文译本。这对于了解当时的情况是一部珍贵的书籍。

（2） 文字的意义——I

下面我们来讨论在中学的数学中经常使用的文字，也包括上面使用的文字在内，是在怎样的意义下被使用的。

现在有 $1\,cm^3$ 的重量为0.9g 的油。已知其体积，我们来考察它的重量。

$1.5cm^3$ 的重量是，$0.9\times1.5=1.35g$

* 注）：在我国，为明末天算学家徐光启（1562～1633）首译。

2 cm^3 的重量是，$0.9\times 2 = 1.8$ g

2.5cm^3 的重量是，$0.9\times 2.5 = 2.25$g

3 cm^3 的重量是，$0.9\times 3 = 2.7$ g

……………………………………………………

……………………………………………………

在这里，总是0.9乘以表示油的体积数，就可以算出油的重量。这件事，也可以说成

油 □ cm^3 的重量是，$0.9\times$ □ g

把其中 □ ，换成表示油的体积数加以计算，总是可以求出油的重量的。

前面的讨论中，代替 □ 的数，仅仅是写出1.5，2,2.5，3 的情形，其实只要是表示油的体积的数，把它换成什么数都行。

如果使用集合的语言，则可以象下面那样去说。

体积是用正数来表示的。所以，可以用正数的集合的元素来替换 □ 。

在数学里，要把 □ 用文字来表示。这些文字，可以是 **A**，**B**，**C**，……，**X**，**Y**，**Z**；*a*，*b*，*c*，……，**x**，**y**，**z** 等的某一种。现在，假设使用 x，则

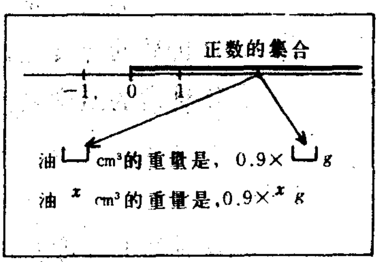


图 3

油 x cm^3 的重量是，$0.9\times x\,g$

把此事，说成下面那样也行。

「设油的体积是 x cm^3，则油的重量是，$0.9\times x\,g$」

文字的使用方法是不止一种的，在上述意义下使用文字时，首先，在开始时，对文字的用法就必须预以理解，其次，在多数场合中使用文字时，重要的是使用方法。

需要强调的是，上例中的文字 x，和表示油的体积的正数的集合是密切相关的。这是因为，只要用这个集合中的元素代替 x，进行计算，永远可求得油的重量。

换一个例子。

现在，教室的温度是5 ℃。想用火炉使温度升高到25℃。假设用温度计测知，平均每分钟温度升高0.8℃。我们来考察火炉的升温时间和教室的温度之间的关系。时间是从火炉点着火算起，

1 分钟后的温度是，$5+0.8\times1=5.8$ ℃

2 分钟后的温度是，$5+0.8\times2=6.6$ ℃

2.5 分钟后的温度是，$5+0.8\times2.5=7$ ℃

5 分钟后的温度是，$5+0.8\times5=9$ ℃

……………………………………………………

……………………………………………………

25分钟后的温度是，$5+0.8\times25=25$ ℃

由此得到

└┘ 分钟后的温度是，$5+0.8\times$ └┘ ℃

其中 └┘ ，用表示时间的数来代替，加以计算的话，可以知道，总是能求出这一时刻所对应的温度的。

因为温度升高到25℃，所以，└┘ 就要用 1 到25的正数来代替。

原因是，由于从 5 ℃到25℃，温度升高了20℃，平均每分钟升高0.8℃，所以

$$20\div0.8$$
$$=25\ (\text{分钟})$$

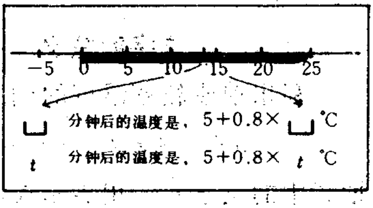


图 4

即只需25分钟的时间。

把 └┘ 用文字 t 表示，于是

t 分钟后的温度是，$5+0.8\times t$ ℃

或者，象下面这样说也行。

「假设用火炉升温的时间为t，则这时的温度是$5+0.8\times t$ ℃」

对这里的文字 t ，也要注意到，它和表示用火炉升温时间直到25以前的正数的集合密切相联的。用这个集合里的元素代替 t 进行计算时，多少分钟后的温度，都能求出。

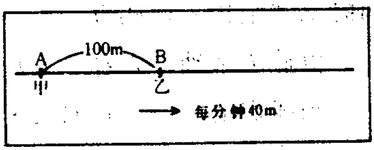


图 5

【想一想】在相距100 m的二地点A，B，有甲，

乙二人，如图 5 所示。现在，乙每分钟以40 m的速度沿箭头所示方向行走，把乙走的时间用文字表示出来，并且指出怎样表示甲、乙间的距离。

【略　解】　设乙行走的时间是t，则甲，乙间的距离是$100+40\times t$　（m）。

（3）　文字的意义——Ⅰ

利用前段教室温度的例子，进一步研究文字的意义。

$$5+0.8\times t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（i）}$$

把式中的文字t，用表示火炉升温的时间数代换，总是能计算出该时间的温度的。所以，可以设想用一个文字t就能够代表表示火炉升温时间的各各数。这是因为，在这里，我们认为文字t代表着直到25的正数的集合的各个元素。

总而言之，文字t所起的作用是，它既能用表示升温时间的各个数去替换，同时它又表示代表这些数。

在这种意义下，对油的重量的例子来说也是一样的。

$$0.9\times x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（ii）}$$

文字x所起的作用是，既能用表示油的体积的各个数来替换，同时又表示代表这些数。

以此为基础，来看（i），（ii）两式。

当我们把（i）式的文字t，理解为代表火炉升温的各个数时，就可以认为（i）式一般的给出了教室的温度。所

谓「一般的」一词，是作为具有下述意义而使用的。

如果把（i）式中的t，代之以5，8，15，22，如图6所示，就能由（i）式算出火炉升温从开始起，5分钟，8分钟，15分钟，22分钟后的教室的温度。无论是几分钟后的温度，都同样一定能求得。所以说，这时（i）式「一般的」给出了教室的温度。

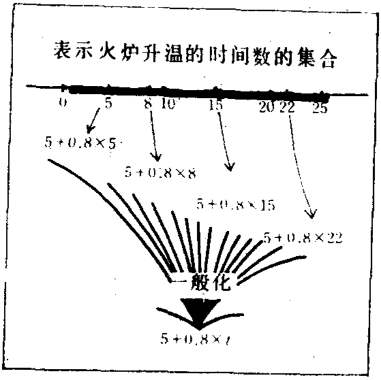


图 6

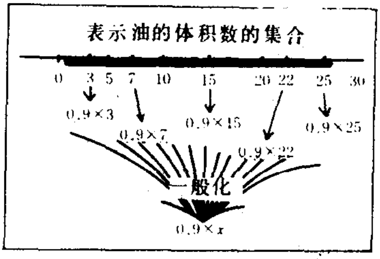


图 7

关于（ii）式也是一样说法。无论多大体积的油的重量，把文字x代之以表示油的体积数，进行计算时，一定能求得它的重量。所以说，（ii）式一般的给出了油的重量。

引用文字表示数，象这两个例子那样，就可以得到对任何个别场合都一概适用的一般的表示式。这件事，实在是不仅方便，而且是重要的方法。因为只要我们知道了这些式子，则立即可以算出教室的温度和油的重量。

在这里，我们给出一条规定。这就是，（i）式和（ii）

式中的数和文字之间的乘号「×」可以略去不写。直到现在为止，使用的乘法记号有×和•，如3×2，3•2。但是，数和数相乘时，乘法的记号不得省略。这时如果略去乘法记号的话，比如32，是3×2呢，还是两位数三十二呢？区别不开了，势必引起混乱。

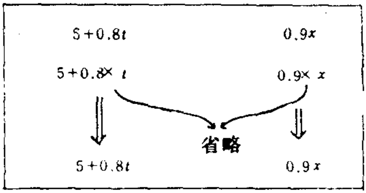


图 8

不过，数与文字之间的乘号，纵然略去也不会引起混乱的。如图 8 所示那样，$0.8t$ 除掉表示 $0.8\times t$ 之外，不再意味着别的。至于 $0.9x$ 也是同样意思。但是，加法和减法等记号不能省略。不需要的地方，略去记号，为的是书写简便，需要的地方，必须正确使用。

请看第 8 页的问题。略去乘法记号，七分钟后，甲，乙之间的距离是

$$100+40t \quad (\mathrm{m})$$

把式子中的文字 t，代之以乙行走的分钟数，予以计算，就得出了那时的甲，乙之间的距离。

例如，以10代替文字 t，则

$$100+40\times 10=100+400=500 \quad (\mathrm{m})$$

可知，乙行走10分钟时，甲，乙之间的距离为500（m）。

这时，把它说成

「把10往 t 里一代入，式子 $100+40t$ 的值就是500」。

而且，还可以写成下面这样。

「当$t=40$时，则$100+40t=100+40\times10=500$」

就是说，用10代换式子中的文字t，说成是「把10代入t」。同样道理，如果以各种不同的数值代入t，就能求出关于乙行走各个时间的甲，乙间的距离。

【想一想】 把8代入t时，式子$5+0.8t$的值是多少？再有，当$x=3.5$时，$0.9x$的值是多少？

【略　解】 $5+0.8\times8=11.4$，　$0.9\times3.5=3.15$

§2. 一次式和计算

（1）　文字式

100g面包中，含有蛋白质8 g，100 g面条中，含有蛋白质2.6 g。50 g面包和30 g面条之中含有多少蛋白质，可如下计算。

$$\frac{8}{100}\times50+\frac{2.6}{100}\times30=4.78\ (\mathrm{g})$$

因为1 g面包中含有蛋白质$\frac{8}{100}$g，1 g面条中含有蛋白质$\frac{2.6}{100}$g，所以，只要按照上面那样去计算，就行了。

同样方法，60 g 面包，50 g 面条之中含有蛋白质的总数为

$$\frac{8}{100}\times 60+\frac{2.6}{100}\times 50=6.1\ (\mathrm{g})$$

在这里，我们来给出面包和面条之中一共含有多少蛋白质的一般的表示式。首先，想法与上面相同，面包$\sqcup$g，面条$\cup$g之中含有蛋白质，计算如下，

$$\frac{8}{100}\times \sqcup+\frac{2.6}{100}\times \cup\ (\mathrm{g})$$

记号$\sqcup$和$\cup$，分别表示面包和面条的重量的，因而上式就是用面包和面条的重量分别代换$\sqcup$和$\cup$的计算。由于面包和面条的重量，总是不能用一样的数来表示，所以，采用了不同的记号。

用x，y分别表示$\sqcup$和$\cup$。基于上面那样的原因，因而这时，表示面包和面条的重量，也得使用不同的文字。于是，面包和面条共含有蛋白质的总量，一般的表为下式。

$$\frac{8}{100}x+\frac{2.6}{100}y\ (\mathrm{g})$$

此式，写做下式也一样。

$$0.08x+0.026y\ (\mathrm{g})$$

要注意，在这些式子中，略去了乘法记号。此外，也必须理解使用不同的二个文字这件事。同样理由，由于情况的

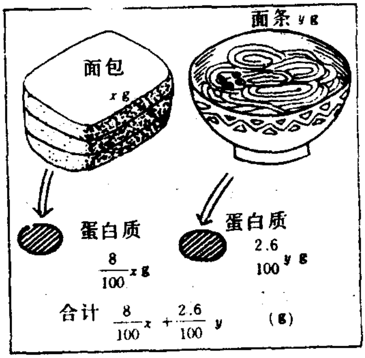


图 9