

51.612
ZFX

51.612
ZFX

557003

大學叢書

51.612
ZFX

微積分及微分方程

趙訪熊著

商務印書館出版

⊙(352282·1)

大學
叢書
微積分及微分方程

★版權所有★

著 作 者 趙 訪 熊
出 版 者 商 務 印 書 館
上海河南中路二一—號
發 行 者 三聯中華商務印書館聯合組織
中 國 圖 書 發 行 公 司
北 京 廠 錄 胡 同 六 十 六 號
發 行 所 北京上海天津各地分公司
三聯書店 中華書局
商務印書館 開明書店
聯營書店 各地分店
印 刷 者 商 務 印 書 館 印 刷 廠

1951年8月初版
1951年10月再版 定價人民幣37,000元

(京)3001—5000

序

微積分的基本觀念是極限觀念。了解微積分必需了解極限觀念。正確的觀念是沒有代用品的。先入爲主的糊塗觀念常常是接受正確的觀念前必須剷除的障礙。本書重視並且正視極限觀念。首先建立實數的極限觀念，進一步建立函數的極限觀念。建立了正確的極限觀念後，級數，微商，及定積分等觀念就很容易了解了。

本書理論方面注重比較嚴格的證明，遇有不能在本書證明的定理，則指出參考資料。應用方面，力求與實際結合，使同學逐漸培養解決實際問題的能力。

本書教材著者在北京清華大學^{勉勵我輩青年}已試教過幾年。每星期演講五小時，可於一學年內講完。理工學院同學迫切需要矢量觀念。利用矢量可以使幾何及力學等問題簡單化明朗化。本書特設矢量分析章介紹矢量分析並應用於幾何，力學，及微分方程等問題。冪級數是一個重要的分析工具。本書特設冪級數章證明其主要定理並充分利用之。

謬誤之處，希望大家不吝指正。

一九五一年二月趙訪熊序於北京清華大學。

目 錄

微 積 分 部

第一章 數的觀念

1.1	點與數	2
1.2	集合	3
1.3	有理數	4
1.4	無理數	7
1.5	實數的十進位近似數	9
1.6	一個基本假定	14
1.7	數集的幾個特性	15
1.8	數學歸納法	17
1.9	德氏實數分割	18
1.10	二進位數	22
	習題	24

第二章 極 限

2.1	數集之特性	27
2.2	變數	32

2.3	函數	33
2.4	貫數及其極限	34
2.5	貫數之四則	39
2.6	實數之四則	40
2.7	單調貫數	41
2.8	貫數極限之值	42
	習題	49

第三章 級 數

3.1	級數	52
3.2	絕對及條件收斂性	56
3.3	級數收斂性判斷法	59
3.4	級數運算法	65
3.5	重列級數	69
	習題	72

第四章 函 數

4.1	函數的極限	76
4.2	左限及右限	77
4.3	極限存在性	79
4.4	函數極限定理	82
4.5	連續性	85
4.6	間斷點	87
4.7	一致連續性	89

4.8	連續函數特性	93
	習題	96

第五章 微 商

5.1	差分, 差商, 及微商	98
5.2	微商運算公式	100
5.3	有理函數	104
5.4	三角函數	105
5.5	對數函數	106
5.6	羅爾定理及中值定理	108
5.7	單調函數	111
5.8	反函數	114
5.9	反冪函數	117
5.10	反三角函數	119
5.11	指數函數	122
5.12	雙曲函數	123
5.13	微商公式表	126
	習題	128

第六章 戴勞級數

6.1	高級 ^{高阶} 微商	131
6.2	微分	132
6.3	戴勞級數	136
6.4	亞培爾定理	142

6.5	極大與極小	146
6.6	變曲點	149
6.7	極大極小的應用問題	152
	習題	157

第七章 積 分

7.1	積分	161
7.2	有理函數的積分	163
7.3	積分技術	167
7.4	換元積分法及部分積分法	170
	習題	175

第八章 定積分

8.1	面積	177
8.2	定積分	180
8.3	定積分的特性	183
8.4	換元及換限	185
8.5	旋轉體的體積	190
8.6	弧長	191
8.7	旋轉面的面積	195
8.8	用極坐標時的切線方向	199
8.9	扇形面積元素	202
8.10	用極坐標時的其他元素	203
	習題	205

第九章 重心及慣性力矩

9.1	力矩及重心	207
9.2	平面區的重心	209
9.3	旋轉體的重心	214
9.4	弦的重心	216
9.5	旋轉面的重心	217
9.6	慣性力矩	219
9.7	平面區的慣性力矩	220
9.8	用極坐標時的公式	222
9.9	旋轉體對於旋轉軸的慣性力矩	224
9.10	慣性橢圓	227
	習題	230

第十章 矢量分析

10.1	平面矢量	232
10.2	矢量代數	233
10.3	點積與叉積	235
10.4	曲率	237
10.5	平面曲線的微分幾何	239
10.6	擺線	243
10.7	心形曲線	244
10.8	光學定律	246
10.9	空間矢量	248

10.10	力矩及重心·····	251
	習題·····	253

第十一章 偏微商

11.1	平面點集·····	257
11.2	偏微商·····	260
11.3	方向微商·····	263
11.4	高級偏微商·····	265
11.5	二元函數的戴勞級數·····	266
11.6	顯函數及隱函數·····	269
11.7	限制極大極小問題·····	270
11.8	限制極大極小應用問題·····	274
	習題·····	282

第十二章 重積分

12.1	重積分及累次積分·····	284
12.2	面積及體積元素·····	288
12.3	面積及體積元素的應用·····	293
12.4	曲面的面積·····	298
12.5	吸力·····	300
	習題·····	302

第十三章 冪級數

13.1	函數級數·····	304
------	-----------	-----

13.2	幕級數.....	308
13.3	幕級數變式.....	312
13.4	定積分的近似值.....	317
13.5	指數函數及圓函數.....	322
13.6	未定式.....	324
13.7	階乘的近似值.....	326
	習題.....	329

微 分 方 程 部

第十四章 一級微分方程

14.1	微分方程.....	333
14.2	全微分方程.....	335
14.3	積分因子.....	339
14.4	一級平直微分方程.....	340
14.5	已分及齊次微分方程.....	343
14.6	換元.....	347
14.7	一級微分方程.....	349
14.8	應用問題.....	351
14.9	幾何問題.....	353
	習題.....	355

第十五章 常係數平直微分方程

15.1	齊次常係數平直微分方程.....	359
15.2	常係數平直微分方程.....	362

15.3	特解	366
15.4	運算微積介紹	372
15.5	聯立常係數平直微分方程組	376
15.6	勾庫平直微分方程	378
	習題	379

第十六章 二級微分方程

16.1	二級微分方程	382
16.2	二級平直微分方程	383
16.3	巧合平直微分方程	387
16.4	移位公式	390
16.5	自變數的變換	393
16.6	幕級數特解	395
	習題	400

第十七章 應用問題

17.1	牛頓動律	402
17.2	地球繞日軌道	403
17.3	病菌及血清	405
17.4	鐘擺	407
17.5	吸力問題	410
17.6	懸鏈問題	411
17.7	梁的彎曲	414
17.8	存在定理	417
	習題	420

微積分及微分方程

微 積 分 部

第一章 數的觀念

語言是符號，符號是抽象的。一個名詞可以代表一樣東西，一個觀念，不過他本身並不是那一樣東西或是那一個觀念。一個名詞的意義，可以多多少少隨人，隨地，隨時代而變。他有生命。他的生命過程，像人的生命過程一樣，從出生，生長，變到衰老，死亡。

例如“刷子”這一個名詞是代表一類東西的名詞。我說“刷子”兩個字，我們現在可以想到板刷，大大小小的豬鬃牙刷，玻璃牙刷，自行車舖用的鐵絲刷，洗瓶刷，洗澡用的橡皮刷，油漆匠泥水匠用的刷子等等。不過刷子的意義並不是一個個別的特殊的刷子，而是現在我們所能想到的各種刷子的總名詞，是代表各種刷子的共同性質的抽象名詞。各種刷子有什麼共同性質呢？各種刷子形狀不一樣，大小不一樣，所用的材料不一樣，所以形狀，大小，材料都不是刷子的共同性質。不過刷子總是刷東西的，所以刷子的功用是所有刷子的一個共同性質。辭源的定義是“除垢之器也”。這個定義指出一種刷子的功用不過仍是太狹隘。例如刷石灰牆的刷子的功用就不是除垢，而

自原點 O 至單位點 U 之距離 $\overline{OU}$ 爲“單位距離。”定自原點至單位點之方向爲此直線上之正向，其相反之方向則稱爲負向。名此種有原點及單位點之直線爲一“直線軸。”給定直線軸上之一點 P ，名有向距離 OP 與 OU 之商爲一個數，名爲 P 點之笛卡兒坐標。設 OP 爲正向，則 P 點之笛卡兒坐標爲一正數；設爲負向，則 P 點之笛卡兒坐標爲一負數。

順直線軸之正向，用兩腳規可作離原點之距離依次爲 1 個，2 個，3 個，……單位距離各點，其笛卡兒坐標依次爲正整數 1, 2, 3, ……；同法可順直線軸之負向作離原點之距離依次爲 1 個，2 個，3 個，……單位距離各點，其笛卡兒坐標依次爲負整數 -1, -2, -3, ……。原點之笛卡兒坐標爲整數 0。此上各點之笛卡兒坐標均爲整數，名爲整數點。兩個不同的整數 m 及 n 有相對的大小。設 $m < n$ ，則自相應整數點 m 至整數點 n 之方向爲正向。設所定正向爲自左至右，則 m 點在 n 點之左。

作另一直線軸 l' 與已有之直線軸 l 相交於原點 O 。定 O 爲 l' 之原點。選另一點 U' 爲 l' 直線軸之單位點。 l 軸上之單位點 U 與 l' 軸上之整數點 n ($n \neq 0$) 定一直線 K 。自 l' 上之整數點 m 作直線 K' 與 K 線平行。 K' 線與 l 軸相交於一點 R 。 R 點之笛卡兒坐標爲有理數或分數 $\frac{m}{n}$ 。名 R 點爲有理點 $\frac{m}{n}$ 。給定任何有理數 $\frac{m}{n}$ 後，可用此法在直線軸上定出有理點 $\frac{m}{n}$ 。

1.2 集合

任何多個元素組成之集體名爲“集合” (Set) 簡稱爲“集”。設集

合內包含無窮多個元素，則名此集合為“無窮集”(Infinite Set)。設集合內僅包含有窮多個元素，則名此集合為“有窮集”(Finite Set)。設集合不包含任何元素則名為“空集”(Empty Set)。設集合所含之元素為數，則稱此集合為“數集”。設集合所含之元素為點，則稱此集合為“點集”。

例如本大學全體大學生組成一個有窮集。本大學學生會女生部內之男生組成一個空集。直線軸上全體整數點組成一個無窮點集。此點集內各點之笛卡兒坐標，即全體整數，組成一個無窮數集。

1.3 有理數

給定任何正整數 n ，在直線軸上作下列無窮多個有理點：

$$R(n) : \frac{m}{n}, m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

此無窮點集 $R(n)$ 包含全體以 n 為分母之有理點。集內兩個鄰近點間之距離為 n 分之一個距離單位。設 $n=1$ ，則 $R(1)$ 為全體整數點組成之點集，兩個鄰近點間之距離為一個距離單位。設 $n=10^{10}$ ，則 $R(10^{10})$ 為全體有十位小數之十進位數組成之有理點集，兩個鄰近點間之距離為一百萬萬分之一個距離單位。設 $n=10^{100}$ ，則 $R(10^{100})$ 為全體有一百位小數之十進位數組成之有理點集，兩個鄰近點間之距離僅為 10^{100} 分之一距離單位，即一萬萬……萬（二十五個萬字）分之一距離單位。

一百萬萬分之一個距離單位是否是一個很短的距離？一萬萬……萬（二十五個萬字）分之一個距離單位是否是一個很短的距離？一百萬萬分之一是否是一個很小的數字？一萬萬……萬（二十五個萬

字) 分之一是否是一個很小的數字? 這些問題的唯一答案是一個反問: 那一個距離算是很短? 那一個正數算是很小? 這些反問不可能有客觀的答案。

數的大小觀念是相對的, 不是絕對的。兩個不同數相較, 則一個數可大於或小於另一個數, 而一個數本身是大或是小, 在數學上無確定意義的。例如一粒芝蔴, 一個蘋果, 一頭牛, 一個大象, 一個洲, 一個星球, 一個宇宙均含數字一。一粒芝蔴很小, 一個宇宙很大, 而數字一本身則無所謂大或小也。又如一公釐, 一公里, 一光秒。一光年均含數字一。我們認為一公釐很短 (細菌學家亦許認為很長), 一光秒等於十八萬六千三百三十哩, 故一光秒很長而一光年更長了 (天文家亦許認為不長), 而數字一本身則無所謂長或短也。

“很大的數”及“很小的數”是沒有一定意義的名詞。同一個數, 一個人認為很大, 另一個人可認為很小。沒有一個正整數可以使大家公認為很大, 大到不可再大, 因設 N 為任何正整數, 不論如何大, 則 $N+1$ 仍是一個正整數而比 N 更大。無窮大 ∞ 僅是一個符號, 一個方向, 而不是一個數。同理沒有一個正數可以使大家公認為很小, 小到不可再小, 因設 ϵ 為任意給定之正數, 不論如何小, $\frac{\epsilon}{2}$ 仍是一個正數而比 ϵ 更小。零比所有正數都小, 不過零不是正數。在有些介紹微積分的書裏說到小到不可再小或是小到不可想像的正數, 大到不可再大或是大到不可想像的正整數等等。這些觀念真是不可想像的觀念, 玄而不妙, 在數學上是沒有意義的。

讓我們回到 $R(n)$ 無窮有理點集。集中兩個鄰近點的距離是 n 分之一距離單位。當 n 逐漸增大時, 兩個鄰近點的距離 $\frac{1}{n}$ 逐漸縮小。我們應當避免很大及很小兩個主觀的名詞, 所以我們不願意說: “當

n 很大的時候，兩個鄰近點的距離 $\frac{1}{n}$ 很小。”我們可以說：“給定任意小正數 ε 後，我們找得出一個充分大正整數 N ，使凡 $n \geq N$ 之無窮有理點集 $R(n)$ ，其鄰近兩點之距離 $\frac{1}{n}$ 小於已給定之正數 ε 。”

證明是很容易的。給定任意小正數 ε 後，我們可任意選出一個大於 $\frac{1}{\varepsilon}$ 之正整數 N 。這個 N 已經充分大了，因設 $n \geq N$ ，則有 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ 。

我們用“任意小”代替了“很小”；用“充分大”代替了“很大”。茲再申說任意小及充分大的意義。 ε 是任何人給定的一個正數。 ε 是一個正數，不是零。數的大小本無絕對意義，惟選數者可選任何一個他在選定時主觀的認為很小的一個正數 ε 。例如 ε 可等於 $\frac{1}{10^{10}}$ ，或是 $\frac{1}{10^{100}}$ ，或是 $\frac{1}{10^{1001}}$ 。不過 ε 是一個定數，選定了不准後悔而中途要求更換。任何人選定任意小的一個正數 ε 後，我們就找得出一個充分大（指給定的 ε 說）的正整數 N ，使凡 $n > N$ 之 $\frac{1}{n}$ 均小於給定的 ε 。

例如 給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{10}}$ ，我們可選 $N = 10^{10}$ ，

給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{100}}$ ，我們可選 $N = 10^{100}$ ，

給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{1001}}$ ，我們可選 $N = 10^{1001}$ 。

總結起來說我們說的那句話是一個公開挑戰。任何人可以應戰拿出他認為很小的一個正數 ε （不是零）來，我們保證可以找出一個充分大（不是無窮大）的正整數 N 使凡 $n > N$ 之 $\frac{1}{n}$ 均小於他給定的 ε 。我們的話是有確定意義的，可以滿足任何人的考驗。