大學叢書

微積分及微分方程

趙訪熊著

商務印書館出版

㊉(352282·1)

大學叢書 微積分及微分方程

著作者　趙訪熊

出版者　商務印書館
上海河南中路二一一號

發行者　三聯 中華 商務 開明 聯營聯合組織
中國圖書發行公司
北京絨線胡同六十六號

發行所　北京 上海 天津 各地分公司
三聯書店　中華書局
商務印書館　開明書店
聯營書店　各地分店

印刷者　商務印書館印刷廠

1951年8月初版
1951年10月再版
定價人民幣37,000元

(京)3001—5000

序

微積分的基本觀念是極限觀念。了解微積分必需了解極限觀念。正確的觀念是沒有代用品的。先入爲主的糊塗觀念常常是接受正確的觀念前必須剷除的障礙。本書重視並且正視極限觀念。首先建立貫數的極限觀念，進一步建立函數的極限觀念。建立了正確的極限觀念後，級數，微商，及定積分等觀念就很容易了解了。

本書理論方面注重比較嚴格的證明，遇有不能在本書證明的定理，則指出參考資料。應用方面，力求與實際結合，使同學逐漸培養解決實際問題的能力。

勉力试教有年.

本書教材著者在北京清華大學已試教過幾年。每星期演講五小時，可於一學年內講完。理工學院同學迫切需要矢量觀念。利用矢量可以使幾何及力學等問題簡單化明朗化。本書特設矢量分析章介紹矢量分析並應用於幾何，力學，及微分方程等問題。冪級數是一個重要的分析工具。本書特設冪級數章證明其主要定理並充分利用之。

謬誤之處，希望大家不吝指正。

一九五一年二月趙訪熊序於北京清華大學。

目　錄

微積分部

第一章　數的觀念

第二章　極　限

第三章 級 數

第四章 函 數

第五章　微　商

第六章　戴勞級數

第七章 積 分

第八章 定積分

第九章　重心及惰性力矩

第十章　矢量分析

第十一章 偏微商

第十二章 重積分

第十三章 冪級數

微分方程部

第十四章　一級微分方程

第十五章　常係數平直微分方程

第十六章 二級微分方程

第十七章 應用問題

微積分及微分方程

微積分部

第一章　數的觀念

語言是符號，符號是抽象的。一個名詞可以代表一樣東西，一個觀念，不過他本身並不是那一樣東西或是那一個觀念。一個名詞的意義，可以多多少少隨人，隨地，隨時代而變。他有生命。他的生命過程，像人的生命過程一樣，從出生，生長，變到衰老，死亡。

例如"刷子"這一個名詞是代表一類東西的名詞。我說"刷子"兩個字，我們現在可以想到板刷，大大小小的豬鬃牙刷，玻璃牙刷，自行車舖用的鐵絲刷，洗瓶刷，洗澡用的橡皮刷，油漆匠泥水匠用的刷子等等。不過刷子的意義並不是一個個別的特殊的刷子，而是現在我們所能想到的各種刷子的總名詞，是代表各種刷子的共同性質的抽象名詞。各種刷子有什麼共同性質呢？各種刷子形狀不一樣，大小不一樣，所用的材料不一樣，所以形狀，大小，材料都不是刷子的共同性質。不過刷子總是刷東西的，所以刷子的功用是所有刷子的一個共同性質。辭源的定義是"除垢之器也"。這個定義指出一種刷子的功用不過仍是太狹隘。例如刷石灰牆的刷子的功用就不是除垢，而

是拿石灰漿子刷上牆。辭源的定義祇顧到刷下去沒有顧到刷上來。

數學是思想的文字、他是抽象的科學。數字本身就是抽象的觀念。說一個"一"字,我們可以想到一個蘋果,一粒芝蔴,一個人,一個微生物,一個星球,一個宇宙。不過"一"字的意義並不是一個個別的特殊的一件東西,而是代表所能想像到的各種一件東西的共同性質的抽象名詞。數學是思想的文字,他有文字的抽象性,不過他比普通文字要精確些。數學是純粹科學。數學裏所用的名詞應有他永久不變的意義。任何主觀的,有因人而異的意義的名詞在數學裏是沒有地位的。現在中學內用的幾何課本跟兩千多年前歐幾里得(Euclid)所著的幾何課本內容上幾乎完全一樣。由此可見數學文字的優點了。

我們不預備化時間來研究數字本身是什麼東西。數學是研究物與物間關係的科學,不是研究物的本身的科學。我們要研究的是數與數間的關係。說明一個觀念需要用另一個比較簡單,比較原始的觀念。問題在從那兒說起。那一個觀念是最原始的,最容易被接受的?我們將用幾何方法來表現抽象的數字,用距離觀念當作原始的觀念來逐步說明各種數的性質。

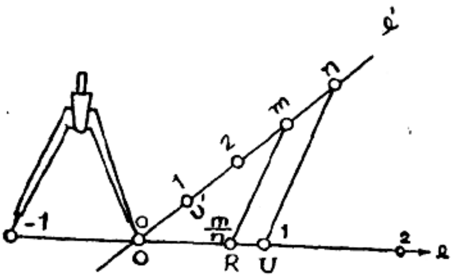

圖 1

1.1 點與數

任意作一直線 l。任意選此直線上一點 O 爲原點,又任選另一點 U 爲單位點。定

自原點O至單位點U之距離$\overline{OU}$爲"單位距離。"定自原點至單位點之方向爲此直線上之正向，其相反之方向則稱爲負向。名此種有原點及單位點之直線爲一"直線軸。"給定直線軸上之一點P，名有向距離OP與OU之商爲一個數，名爲P點之笛卡兒坐標。設OP爲正向，則P點之笛卡兒坐標爲一正數；設爲負向，則P點之笛卡兒坐標爲一負數。

順直線軸之正向，用兩腳規可作離原點之距離依次爲1個，2個，3個，……單位距離各點，其笛卡兒坐標依次爲正整數1，2，3，……；同法可順直線軸之負向作離原點之距離依次爲1個，2個，3個，……單位距離各點，其笛卡兒坐標依次爲負整數-1，-2，-3，……。原點之笛卡兒坐標爲整數0。此上各點之笛卡兒坐標均爲整數，名爲整數點。兩個不同的整數m及n有相對的大小。設$m<n$，則自相應整數點m至整數點n之方向爲正向。設所定正向爲自左至右，則m點在n點之左。

作另一直線軸l'與已有之直線軸l相交於原點O。定O爲l'之原點。選另一點U'爲l'直線軸之單位點。l軸上之單位點U與l'軸上之整數點$n(n\neq 0)$定一直線K。自l'上之整數點m作直線K'與K線平行。K'線與l軸相交於一點R。R點之笛卡兒坐標爲有理數或分數$\frac{m}{n}$。名R點爲有理點$\frac{m}{n}$。給定任何有理數$\frac{m}{n}$後，可用此法在直線軸上定出有理點$\frac{m}{n}$。

1.2 集合

任何多個元素組成之集體名爲"集合"(Set)簡稱爲"集"。設集

合內包含無窮多個元素，則名此集合為"無窮集" (Infinite Set)。設集合內僅包含有窮多個元素，則名此集合為"有窮集"(Finite Set)。設集合不包含任何元素則名為"空集" (Empty Set)。設集合所含之元素為數，則稱此集合為"數集"。設集合所含之元素為點，則稱此集合為"點集"。

例如本大學全體大學生組成一個有窮集。本大學學生會女生部內之男生組成一個空集。直線軸上全體整數點組成一個無窮點集。此點集內各點之笛卡兒坐標，即全體整數，組成一個無窮數集。

1.3 有理數

給定任何正整數 n，在直線軸上作下列無窮多個有理點：

$$R(n): \quad \frac{m}{n}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$$

此無窮點集 $R(n)$ 包含全體以 n 為分母之有理點。集內兩個鄰近點間之距離為 n 分之一個距離單位。 設 $n=1$，則 $R(1)$ 為全體整數點組成之點集，兩個鄰近點間之距離為一個距離單位。 設 $n=10^{10}$，則 $R(10^{10})$ 為全體有十位小數之十進位數組成之有理點集，兩個鄰近點間之距離為一百萬萬分之一個距離單位。設 $n=10^{100}$，則 $R(10^{100})$ 為全體有一百位小數之十進位數組成之有理點集，兩個鄰近點間之距離僅為 10^{100} 分之一距離單位，即一萬萬……萬（二十五個萬字）分之一距離單位。

一百萬萬分之一個距離單位是否是一個很短的距離？一萬萬……萬(二十五個萬字)分之一個距離單位是否是一個很短的距離？一百萬萬分之一是否是一個很小的數字？一萬萬……萬（二十五個萬

字）分之一是否是一個很小的數字？這些問題的唯一答案是一個反問：那一個距離算是很短？那一個正數算是很小？這些反問不可能有客觀的答案。

數的大小觀念是相對的，不是絕對的。兩個不同數相較，則一個數可大於或小於另一個數，而一個數本身是大或是小，在數學上無確定意義的。例如一粒芝蔴，一個蘋果，一頭牛，一個大象，一個洲，一個星球，一個宇宙均含數字一。一粒芝蔴很小，一個宇宙很大，而數字一本身則無所謂大或小也。又如一公釐，一公里，一光秒。一光年均含數字一。我們認爲一公釐很短（細菌學家亦許認爲很長），一光秒等於十八萬六千三百三十哩，故一光秒很長而一光年更長了（天文家亦許認爲不長），而數字一本身則無所謂長或短也。

"很大的數"及"很小的數"是沒有一定意義的名詞。同一個數，一個人認爲很大，另一個人可認爲很小。沒有一個正整數可以使大家公認爲很大，大到不可再大，因設 N 爲任何正整數，不論如何大，則 $N+1$ 仍是一個正整數而比 N 更大。無窮大 ∞ 僅是一個符號，一個方向，而不是一個數。同理沒有一個正數可以使大家公認爲很小，小到不可再小，因設 ϵ 爲任意給定之正數，不論如何小，$\frac{\epsilon}{2}$ 仍是一個正數而比 ϵ 更小。零比所有正數都小，不過零不是正數。在有些介紹微積分的書裏說到小到不可再小或是小到不可想像的正數，大到不可再大或是大到不可想像的正整數等等。這些觀念眞是不可想像的觀念，玄而不妙，在數學上是沒有意義的。

讓我們回到 $R(n)$ 無窮有理點集。集中兩個鄰近點的距離是 n 分之一距離單位。當 n 逐漸增大時，兩個鄰近點的距離 $\frac{1}{n}$ 逐漸縮小。我們應當避免很大及很小兩個主觀的名詞，所以我們不願意說："當

n 很大的時候，兩個鄰近點的距離$\frac{1}{n}$很小。"我們可以說："給定任意小正數 ε 後，我們找得出一個充分大正整數 N，使凡 $n \geqq N$ 之無窮有理點集 $R(n)$，其鄰近兩點之距離$\frac{1}{n}$小於已給定之正數 ε。"

證明是很容易的。給定任意小正數 ε 後，我們可任意選出一個大於$\frac{1}{\varepsilon}$之正整數 N。這個 N 已經充分大了，因設 $n \geqq N$，則有$\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon$。

我們用"任意小"代替了"很小"；用"充分大"代替了"很大"。茲再申說任意小及充分大的意義。ε 是任何人給定的一個正數。ε 是一個正數，不是零。數的大小本無絕對意義，惟選數者可選任何一個他在選定時主觀的認為很小的一個正數 ε。例如 ε 可等於$\frac{1}{10^{10}}$，或是$\frac{1}{10^{100}}$，或是$\frac{1}{10^{1001}}$。不過 ε 是一個定數，選定了不准後悔而中途要求更換。任何人選定任意小的一個正數 ε 後，我們就找得出一個充分大（指給定的 ε 說）的正整數 N，使凡 $n > N$ 之$\frac{1}{n}$均小於給定的 ε。

例如　給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{10}}$，我們可選 $N = 10^{10}$，

給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{100}}$，我們可選 $N = 10^{100}$，

給定 $\varepsilon = \frac{1}{10^{100}!}$，我們可選 $N = 10^{100}!$，

總結起來說我們說的那句話是一個公開挑戰。任何人可以應戰拿出他認為很小的一個正數 ε（不是零）來，我們保證可以找出一個充分大（不是無窮大）的正整數 N 使凡 $n > N$ 的$\frac{1}{n}$均小於他給定的 ε。我們的話是有確定意義的，可以滿足任何人的考驗。