中小学畢業生自学叢書

祘术指导

崔警吾編著

河南人民出版社

目　録

1　整数和整数四則运算

一　整数的產生

整数產生于人类实际的需要，在原始共產社会时代，人类在勞动实踐中認識了数。例如：当社会發展到游牧生活的时候，人們是由打獵獲得生活資料，得到了就是“有”，得不到就是“無”；如果得到的話，食量大的多分些，食量小的少分些。所以最初人类对自然界物体的感覺是从有、無（数的最初概念）而知道了多、少（数的次一概念），这是識数的开始。后來由于人类生活的發展，逐漸需要精确的計算，就進一步發覺了数，首先創造了个体一，然后有了类羣的出現，產生了自然数。比如認識到兩只手、兩只脚，都是兩个；3头牛和3头羊都是3个；4座山和4棵樹都是4个等。

以1个物体作标准，1个物体上添上1个物体是2个物体；2个物体上添上1个物体是3个物体；3个物体上添上1个物体是4个物体；……。表示这些物体个数的1、2、3、4、5……叫做整数，又叫做自然数（有头無尾的数）。“1”叫做整数的單位，很明顯的，含有兩个單位的数是2，含有3个單位的数是3，含有4个單位的数是4，……。因此每一个整数都是由若干个單位“1”組成的，也就是說由若干个單位1組成的数叫做整数。

二　記数法和命数法

（1）**記数法**　即用符号表示数的方法叫做記数法。記数用的符号叫做数字。現在各國公用的数字有十个，就是十个阿拉伯数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，叫公用数字。世界上公用的記数法是阿拉伯記数法，即用1、2、3、4、5、6、7、8、9、九个数和0將一个数目記出來。例如：四十二可以記做42；三百四十可以記做340；五千零六十可以記做5,060等。

（2）**命数法**　就是給数起个名字便于讀数的方法，也卽是定位的方法。記数的时候，数字所占的位置叫做数位，数位是从右向左排列的，排法如下：

京	兆	億	万	个
千京　百京　十京　京（万兆）	千兆　百兆　十兆　兆（万億）	千億　百億　十億　億（万万）	千万　百万　十万　万	千　百　十　个

每个数都有它自己的單位，个位的單位是一，十位的單位是一十，百位的單位是一百，千位的單位是一千等。讀数的方法是从左向右，每一位先讀数字，再讀数位。例如：136讀做一百三十六；2450讀做二千四百五十。讀較大的数，可以用撇節法，將数自右向左，每三位一撇。第一个撇的前面讀做千，第二个撇的前面讀做百万等。例如：425,316讀做四十二万五千三百一十六；1,700,264讀做一百七十万零二百六十四；600,000,000讀做六億。

注：進位的起源：（1）五進位，一只手有五个指头，数

数时常以五个、五个为一堆；（2）十進位，兩只手有十个指头，数数时常以十个、十个为一堆(十進位法最方便)；（3）二十進位，兩只手和兩只脚在一起共二十个指头；（4）十六進位，以春夏秋冬四季，东西南北四方合为 4 个 2 相乘積为16，而規定一斤为16兩，是自我國漢朝开始的。

三　加法和减法

（1）什么是加法

例題：第一小組有 8 人，第二小組有 9 人，問兩个小組共有几人？

要求出兩組共有的人数，就要把兩組的人数合并起來，寫成算式是：

$$\underset{\text{加数}}{8}\ \underset{\text{加号}}{+}\ \underset{\text{加数}}{9}\ \underset{\text{等号}}{=}\ \underset{\text{和数}}{17}\text{(人)}$$

定义：將若干个已知数合并起來求出它們的和的运算方法叫加法。

（2）加法的运算定律

①加法交換律　交換加数的位置，其和不变。如：$4+5=5+4=9$；$5+2+4=2+5+4=4+2+5=11$。寫成公式：$a+b=b+a$；$a+b+c=b+a+c=c+a+b$。

②加法結合律　若干个数相加，可任意結合，然后將和相加，其結果不变。如 $5+7+4=5+(7+4)=7+(5+4)=16$；$8+3+2+7=(8+2)+(3+7)=10+10$

＝20。寫成公式$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c)$。

（3）什么是減法

例題：某数加上5等于12，求某数。

因为某数加上5得12，所以从12里去掉5，就可以得到某数，寫成算式是：

12－5＝7
被減減等差
減
数号数号数

定义：已知兩个加数的和及其中的一个加数求另外一个加数的方法叫減法。

（4）減法的运算性質

①从一个数里減去几个数的和，可以从这个数里逐一減去各个数。如：$20-(5+8)=20-5-8=7$ 寫成公式：$a-(b+c+d+\cdots\cdots)=a-b-c-d\cdots\cdots$

②从一个数里減去兩个数的差，可以从这个数里，減去被減数，再加上減数。如：$15-(11-5)=15-11+5=4+5=9$ 寫成公式：$a-(b-c)=a-b+c$

（5）加減混合計算

例1：$9+8-6=17-6=11$　加号在前先算加。

例2：$9-6+8=3+8=11$　減号在前先算減，同時減数和加数交換位置，結果不变。

例3：$7-9+8=7+8-9=15-9=6$

減数大被減数小不夠減的时候，可將減数和加数的位置互相交換。

例 4：$43-36+57-64=(43+57)-(36+64)=100-100=0$ 在某种条件下，可將加数和减数分別相加，再計算其結果，是比較方便的。

四　乘法和除法

（1）什么是乘法

例題：一星期有 7 天，問三星期共有几天？

一星期有 7 天，三星期就是三个“7 天”，也就是三个 7 天連加的意思。

$7+7+7=21$（天）

这样如果星期数多了，連加起來就很麻煩，所以要采取一种簡便的方法來計算。寫成算式是：

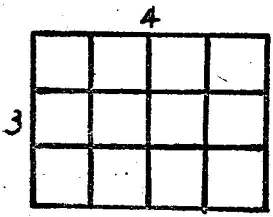
$7\times3=21$（天）

乘乘乘等積
数号数号数

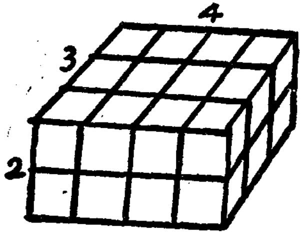
定义：求相同加数和的簡便算法叫乘法。

（2）乘法的运算定律

①**乘法交換律**　交換乘数的位置，其積不变。如：$4\times3=3\times4=12$；$3\times2\times5=2\times3\times5=5\times3\times2=30$。寫成公式：$a\times b=b\times a$；$a\times b\times c\times\cdots\cdots=b\times a\times c\times\cdots\cdots=c\times b\times a\times\cdots\cdots$。



②**乘法結合律**　几个乘数相乘，其中乘数可任意結合，其積不变。如：$4\times3\times2=4\times(3\times2)=3\times(2\times4)=24$；$12\times25$



$\times 4 = 12 \times (25 \times 4)$

$= 12 \times 100 = 1,200$

寫成公式：$a \times b \times c$

$= a \times (b \times c) = b \times (c \times a)$

③乘法分配律 几个数的和乘以某数，等于用某数分别乘各数后的和。如 $(5+3)\times 7 = 5\times 7 + 3\times 7 = 35 + 21 = 56$，寫成公式：$(a+b+c+\cdots\cdots)\times m = a\times m + b\times m + c\times m + \cdots\cdots$。乘法分配律同样可以適用于二数之差。如：$(8-5)\times 4 = 8\times 4 - 5\times 4 = 32 - 20 = 12$。寫成公式：$(a-b)\times m = a\times m - b\times m$

（3）什么是除法

例题：某数乘以 7 得28，求某数。

因为某数乘以 7 得28，所以把28平分为 7 等分，则其中的一分就是某数。寫成算式是：

28	÷	7	=	4
被除数	除号	除数	等号	商数

定义：已知兩个乘数的相乘積和其中的一个乘数，求另外一个乘数的方法叫除法。

（4）除法的运算性質

①用某数除几个数的和，可用該数分别除各数，然后加其所得的結果。如：$(30+18+12)\div 6 = 30\div 6 + 18\div 6 + 12\div 6 = 5 + 3 + 2 = 10$。寫成公式：$(a+b+c+\cdots\cdots)\div m = a$

$\div m+b\div m+c\div m+\cdots\cdots$。

②用某数除二数之差，可用某数分别除二数，然后从第一个得数减去第二个得数。如：$(20-10)\div5=20\div5-10\div5=4-2=2$。

寫成公式：$(a-b)\div m=a\div m-b\div m$

（5）乘除混合計算

例1：$8\times5\div4=40\div4=10$　乘号在前先算乘。

例2：$8\div4\times5=2\times5=10$　除号在前先算除；同时除数和乘数交换位置，結果不变。

例3：$8\div6\times3=8\times3\div6=24\div6=4$

除数除被除数除不尽或不能整除时，可將除数和乘数的位置，互相交换。

例4：$125\div25\times8\div4\div5\div2=125\times8\div25\div4\div5\div2=(125\times8)\div(25\times4\times5\times2)=1,000\div1,000=1$

在某种条件下，可將乘数和除数分别集中后，再計算其結果是比較方便的。

五　0与1的特性

（1）0的特性

①$\underbrace{0+0+0+\cdots\cdots+0}_{n个}=0$　0自加若干次仍得0。

②$m+0=0+m$　任何数加0等于任何数。

③$\underbrace{0-0-0-\cdots\cdots0}_{n个}=0$　0自減若干次仍得0。

④$m-0=m$　　任何数减0等于任何数：$0-m$無意义，因为在算術中减数不能大于被减数，所以0不能作被减数。

⑤$\underbrace{0\times0\times0\times\cdots\cdots\times0}_{n个}=0$　　0自乘若干次仍得0。

⑥$m\times0=0\times m=0$　　0乘任何数得0。

⑦$0\div m=0$　　任何数除0得0

⑧$m\div0$無意义，例如：$5\div0$是要求得一个商和0相乘得5，任何数和0相乘不能得5，所以得不出商，叫做無意义。$0\div0$不許可，因为$0\div0$是要求得一个商和0相乘得0，任何数和0相乘都是得0，要得不定商，它破坏了数学上的唯一性，所以叫做不許可。

（2）1的特性

①$m\times1=1\times m=m$　　1乘任何数得任何数

②$\underbrace{1\times1\times1\times\cdots\cdots\times1}_{n个}=1$　　1自乘若干次仍得1

③$m\div1=m$　1除任何数得任何数。

④$\underbrace{1\div1\div1\div\cdots\cdots\div1}_{n个}=1$　　1自除若干次仍得1

⑤1的倒数仍是1　　任何数除1得任何数的倒数。例如：$1\div5=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$即是5的倒数；$1\div4=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$即是4的倒数。

注：上面的m、n代表的是任何数。

六　四則合解及括号算

在算式中，如果是加減乘除混合計算，必須依照先乘除后加減的演算規則。为什么要先乘除后加減？这是來自社会生活实际問題，例如：若已知甲有兩羣羊，每羣羊有8只；乙有三羣羊，每羣羊有5只。要想知道甲乙二人共有的羊数，或相差的羊数，那就必須先算出甲的羊数是8只×2＝16只，乙的羊数是5只×3＝15只，然后才能相加或相減。所以在混合四則的算式中要先算乘除法后算加減法，这叫做先乘除后加減。

在加減乘除合解的算式中，如有括号，运算时必須由最內層括号依次向外脫去。最內層的括号常为括綫“————”，括綫之外是小括弧“(　　　)”，小括弧之外是中括弧“〔　　　〕”，中括弧之外是大括号“{　　　}”，無論括号的形狀怎样，無論在括号內或括号外均須依照先乘除后加減的規則运算。

例1：$12+18\div 6-3\times 2=?$

$$12+18\div 6-3\times 2=12+3-6=15-6=9$$

例2：$(64+36)\div 25+16=?$

$$(64+36)\div 25+16=100\div 25+16=4+16=20$$

例3：$[5+(120-65)\div 11]\times 5=?$

$$[5+(120-65)\div 11]\times 5$$
$$=[5+55\div 11]\times 5=10\times 5=50$$

例4：$\{[(16+4)-(12+8)]\times 2+9\}\div 9=?$

$$\{[(16+4)-(12+8)]\times 2+9\}\div 9$$
$$=\{[20-20]\times 2+9\}\div 9$$

$=\{0\times2+9\}\div9=9\div9=1$

例 5：$10-\{14-(18-11)+5-[4+(6-\overline{5+1})]\}=?$

$$10-\{14-(18-11)+5-[4+(6-\overline{5+1})]\}$$
$$=10-\{14-7+5-[4+(6-6)]\}$$
$$=10-\{12-[4+0]\}=10-\{12-4\}$$
$$=10-8=2$$

习 题 一

1. $14-17+18-12=?$

   提示：交换减数与加数的位置。

2. $15\div16\times160\times2\div5=?$

   提示：交换除数与乘数的位置。

3. $0\times5+0\div5=?$
4. $28+14\div7-5\times4=?$
5. $64-54\div6-5\times7+63\div9=?$
6. $240\div2\div3\div4=?$
7. $240\div(2\times3\times4)=?$
8. $(29-5)\div4\times6-5=?$
9. $(24-18\div3)\times7-5\times(3+4)=?$
10. $24-16\div[11+8\div2-(9-6\div3)]=?$
11. $(35-5\times4\div2)\times[15-(125\div25+10)]=?$
12. $17\times[(9-5)\div(6-2)]+17=?$
13. $\{[42-(16+6)]\times5-19\}\div9=?$

14. $87 \div \{8 + 7 \times [18 \div (5 + 1)]\} = ?$

15. $100 - \{[(6 \times 9 - 14) - 8] \times 4 - (16 + 12)\} = ?$

16. $9 - \{8 - (7 - 6) \times 4 + 5 - [4 - (4 - 2) \div 2] + 3\} = ?$

17. $\{[(\overline{16 - 4} \times 6) + 24] \div 8 + 2\} \times 10 = ?$

18. $9 + \{18 - [7 + (6 - \overline{5 - 4})] \div 2\} \div 12 = ?$

七 速 算 法

前面講过的三大定律（交換、結合、分配）和0与1的特性，我們要充分的利用这些知識，使它來帮助我們运算，以便对現实事物作更進一步的認識。这一方面的例子，在数学上到处皆是，以速算法表現得比較突出。三大定律和0与1的特性，对速算法的联系是極为密切的。前者为后者的理論基礎，后前为三者的具体应用。速算法的种类很多，現在僅就一般的，可以分为以下八个类型：

（1）利用加法的交換律与結合律

$$25 + 24 + 25 + 26 = (25 + 25) + (24 + 26)$$
$$= 50 + 50 = 100$$

$$69 + 18 + 50 + 62 - 9 = 69 - 50 - 19 + 18 + 62$$
$$= 69 - (50 + 19) + (18 + 62)$$
$$= 69 - 69 + 80 = 0 + 80 = 80$$

（2）利用乘法的交換律与結合律

$$25\times75\times125\times4\times8=(125\times8)\times(25\times4)\times75$$
$$=1,000\times100\times75=7,500,000$$

$$240\div4\times5\div2\div3\times2=240\div4\div2\div3\times5\times2$$
$$=240\div(4\times2\times3)\times(5\times2)$$
$$=240\div24\times10=10\times10=100$$

（3）利用乘法的分配律

$$26\times99=26\times(100-1)=26\times100-26=2,600-26$$
$$=2,574$$

$$245\times998=245\times(1,000-2)=245\times1,000-245\times2$$
$$=245,000-490=244,510$$

$$225\times102=225\times(100+2)=225\times100+225\times2$$
$$=22,500+450=22,950$$

（4）利用分配律的还原

$$9\times3+7\times3-16\times3=(9+7-16)\times3$$
$$=0\times3=0$$

$$36\div9+54\div9-72\div9=(36+54-72)\div9$$
$$=18\div9=2$$

（5）利用和或差來計算

$$549+996=549+996+4-4=549+1,000-4$$
$$=1,549-4=1,545$$

$$5,937-998=5,937-998+2-2$$
$$=(5,937+2)-(998+2)=5,939-1,000$$
$$=4,939$$

（6）以5、25、125来乘的

$225 \times 5 = 225 \times 10 \div 2 = 2,250 \div 2 = 1,125$

$76 \times 25 = 76 \times 100 \div 4 = 7,600 \div 4 = 1,900$

$125 \times 125 = 125 \times 1,000 \div 8 = 125,000 \div 8 = 15,625$

（7）以5、25、125来除的

$625 \div 5 = 625 \times 2 \div 10 = 1,250 \div 10 = 125$

$1,175 \div 25 = 1,175 \times 4 \div 100 = 4,700 \div 100 = 47$

$1,625 \div 125 = 1,625 \times 8 \div 1,000 = 13,000 \div 1,000 = 13$

（8）把除数分为一位数的連乘式

$4,235 \div 35 = 4,235 \div (5 \times 7) = 4,235 \div 5 \div 7 = 121$

$36,750 \div 105 = 36,750 \div (3 \times 5 \times 7) = 36,750 \div 3 \div 5 \div 7 = 350$

習 題 二

1. $12 + 14 + 16 + 18 = ?$
2. $25 \times 97 \times 4 = ?$
3. $726 \times 99 = ?$
4. $125 \times 992 = ?$
5. $425 \times 102 = ?$
6. $96 \times 73 - 96 \times 35 - 96 \times 28 = ?$
7. $7,876 - 998 = ?$
8. $3,858 + 995 = ?$
9. $3,928 \times 25 = ?$
10. $3,928 \times 125 = ?$
11. $7,145 \div 5 = ?$
12. $6,375 \div 25 = ?$

13. $105 \div 35 = ?$　　14. $78,750 \div 63 = ?$

15. $356 - 23 - 73 - -27 - 7 = ?$

八　和差積商的变化

（1）加数的变化引起和的变化

①任何一个加数增加一个数，而其他各加数不变，則它們的和也增加同一个数。

例如：$5+8=13$；$(5+4)+8=9+8=17$；$19-13=4$

②任何一个加数减少一个数，而其他各加数不变，則它們的和也减少同一个数。

例如：$5+8=13$；$(5-4)+8=1+8=9$；$13-9=4$

③任何一个加数增加一个数，而另一个加数减少同一个数，則它們的和不变。

例如：$5+8=13$；$(5+4)+(8-4)=9+4=13$

（2）被减数与减数的变化引起差的变化

①被减数增加（或减少）一个数，减数不变，則差也增加（或减少）同一个数。

例如：$13-8=5$；$(13+4)-8=17-8=9$；而$9-5=4$

$13-8=5$；$(13-4)-8=9-8=1$；而$5-1=4$

②减数增加（或减少）一个数，被减数不变，則差也减少（或增加）同一个数。