高等学校教学用書

微積分学教程

第二卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育出版社

高等学校教学用書

微積分学教程

第二卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著
北京大学高等数学教研組譯

高等教育出版社

本書原由商务印書館出版，自 1956 年12月起改由本社出版。

微積分学教程

第二卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研組譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·237　開本 850×1168 1/32　印張 8 4/16　字數 230,000
一九五四年二月商務初版（共印 12,800）
一九五六年十二月北京新一版
一九五七年 六月北京第二次印刷
印數 7,501—11,500　定價（8）¥ 0.95

俄中名詞對照表

А

Абелевы интегралы 亞貝耳積分
Абеля подстановка 亞貝耳替換
аддитивная функция промежутка 有可加性的區間函數
аддитивность длины дуги 可加性,弧長的
—площади 可加性,面積的
—объёма 可加性,體積的
алгебраическая часть интеграла, выделение 代數部分分出法,積分的
Архимедова спираль 阿基米德螺線
астроида 星形線

Б

Барроу 巴若
Бернулли Иоганн 約翰伯努里
бесконечно малых элементов суммирование 無窮小元素求和法
биномиальный дифференциал, интегрирование 二項式的微分的積分法
Био и Савар закон 必歐與薩瓦爾的定律
Бонне формула 波內公式

В

Валлиса формула 瓦理斯公式
Вивиани кривая 維維亞尼曲線
винтовая линия 螺旋線
выделение алгебраической части интеграла 分離法,積分的代數部分的
—рациональной части интеграла 分離法,積分的有理部分的
вычисление интегралов $\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)dx$ 計算法,積分$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)dx$的
вычисление определённых интегралов, интегральные суммы 定積分的計算法,積分和
———, интегрирование по частям 定積分的計算法,分部積分法
———, основная формула интегрального исчисления 定積分的計算法,積分學的基本公式
———,подстановка 定積分的計算法,替換

Г

гипербола 雙曲線
гиперболические функции, сопоставление с тригонометрическими 雙曲線函數,與三角函數之比較
—подстановки 雙曲線替換
гипоциклоида 圓內旋輪線
гладкая кривая 圓滑的曲線
—поверхность 圓滑的曲面
Гульдина теоремы 古魯金定理

Д

Дарбу 達布
—интегралы, верхний и нижний 達布積分,上與下
——как пределы 達布積分視為極限
—суммы, верхняя и нижняя 達布和數,上與下
—теорема 達布定理
Декартов лист 笛卡兒葉形線
Дирихле 狄銳西勒
—функция 狄銳西勒函數

—на кривой 方向,曲線上的
натуральное уравнение кривой 本性方程,曲線的
начальное значение величины 開始值,變量的
начальные условия 初始條件
неопределённый интеграл 不定積分
——,геометрическое истолкование 不定積分的幾何解釋
——,свойства 不定積分的性質
——,существование 不定積分的存在性
——,таблица 不定積分表
неопределённых коэффициентов метод 未定係數法
нечётная функция, интеграл по симметричному промежутку 奇函數在對稱區間上的積分
Ньютон 牛頓
Ньютона и Лейбница теорема 牛頓和萊不尼慈的定理

О

объём тела 物體的體積
——как предел 物體的體積視爲極限
——по поперечным сечениям 物體的體積用截斷面求值
——,аддитивность 物體的體積的可加性
——,выражение интегралом 物體的體積的積分表達式
——,условие существования 物體的體積的存在條件
определённым интеграл в собственном смысле 定積分,通常意義下的
——,вычисление с помощью интегральных сумм 定積分,利用積分和的計算法
——,вычисление с помощью первообразной 定積分利用原函數的計算法
——,свойства 定積分的性質
——,схема применения 定積分應用的大意
——,условия существования 定積分的存在條件
ориентированный промежуток 定了向的區間
основная последовательность разбиений промежутка 基本敍列,分區間的
формула интегрального исчисления 基本公式,積分學的
Остроградского метод выделения рациональной части интеграла 奥斯特洛格拉得斯基關於積分的有理部分之分出法
—формула 奥斯特洛格拉得斯基公式

П

парабола 拋物線
первообразная функция 原函數
——,восстановление с помощью определённого интеграла 原函數用定積分還原
периодическая функция интеграл по периоду 週期函數在週期區間上的積分
площадь криволинейной трапеции 曲線梯形的面積
———как первообразная 曲線梯形的面積視爲原函數
———предел суммы 曲線梯形的面積視爲和的極限
—плоской фигуры 平面圖形的面積
———,аддитивность 平面圖形的面積的可加性
———внутренняя, внешняя 平面圖形的面積,內與外
———выражение интегралом 平面圖形的面積的積分表達式
———как предел 平面圖形的面積看作極限
———,условия существования 平面圖形的面積的存在條件
—поверхности вращения 面積,旋轉面的

площадь цилиндрической поверхности 面積，柱面的

подинтегральная функция 被積函數

подстановка (замена переменной) 替換(換元)

—Абела 替換,亞貝耳

—гиперболическая 替換,雙曲線

—дробно-линейная 替換,線性分式

—тригонометрическая 替換,三角

—Эйлера 替換,歐拉

полиномы Лежандра 多項式,勒讓德

правильная дробь, разложение на простые 眞分式展成部分分式

пределы интеграла нижний и верхний 積分限,上與下

приведения формулы для биномиальных дифференциалов 化簡公式,二項微分的

———интегралов от $\sin^\nu x \cos^\mu x$ 化簡公式, $\sin^\nu x \cos^\mu x$ 的積分的

——для определённых интегралов 化簡公式,定積分的

приближённое вычисление интегралов собственных 近似計算,通常積分的

простые дроби 部分分式

——интегрирование 部分分式的積分法

——разложение правильной дроби 部分分式,眞分式的展開

прямоугольников формула 多邊形公式

——,дополнительный член 多邊形公式的餘項

псевдо-эллиптические интегралы 僞橢圓積分

Пуассон 布窪松

Пуассона формула 布窪松公式

P

рационализация подинтегрального выражения 有理化,被積函數的

рациональная часть интеграла, выделение 有理部分的分離法,積分的

Риман 黎曼

Риманова (интегральная) сумма 黎曼(積分)和數

C

Симпсона формула 辛卜生公式

——,дополнительный член 辛卜生公式的餘項

спрямляемая дуга кривой 求長法，曲線弧的

среднее значение, теорема 中值定理

——,связь с формулой Лагранжа 中値定理與拉格朗日公式的聯繫

——,вторая теорема 中値定理,第二

——,обобщённая теорема 中値定理，推廣的

статический момент кривой 靜力矩,曲線的

——,плоской фигуры 靜力矩，平面圖形的

——поверхности вращения 靜力矩,旋轉面的

——,тела 靜力矩,物體的

——цилиндрической поверхности 靜力矩,柱面的

сфера (полусфера) 球(半球)

T

тор 環面

Торичелли 托里拆里

трактриса 曳物線

трапеций формула 梯形公式

——,дополнительный член 梯形公式的餘項

тригонометрические подстановки 三角替換

——функций, связь с гиперболическими функциями 三角函數與雙曲線函數的聯繫

Тэйлора формула, дополнительный член 泰樂公式的餘項

У

улитка 蝸線
уникурсальная кривая 有理曲線

Ф

Фейер 費葉

Ц

циклоида 旋輪線
центр тяжести кривой 重心,曲線的
—— плоской фигуры 重心,平面圖形的
—— поверхности вращения 重心,旋轉面的
——,тела 重心,物體
—— цилиндрической поверхности 重心,柱面的
цепная линия 懸鏈線
цилиндрический отрезок 圓柱弓形體

Ч

Чебышев 且白雪夫
чётная функция, интеграл по симметричному промежутку 偶函數在對稱區間上的積分

Ш

шаровой пояс 球帶

Э

эвольвента круга 漸伸線,圓的
—цепной линии 漸伸線,懸鏈線的
эволюта, натуральное уравнение 漸屈線的本性方程
Эйлер 歐拉
Эйлеровы подстановки 歐拉替換
эллипс 橢圓
эллиптические интегралы 橢圓積分
——, *1-го, 2-го, 3-го рода* 橢圓積分,第一、第二、第三類
——, В форме Лежандра 橢圓積分,勒讓德形式下的
—— полные 橢圓積分,完全
эпициклоида 圓外旋輪線
Эрмит 額爾米特

第一分册目录

第八章　原函数(不定积分)

第九章　定积分

第十章 积分学在几何学、力学与物理学中的应用

第八章　原函數(不定積分)

§ 1　不定積分與它的計算的最簡單方法

251. 原函數(即不定積分)的概念　在科學與技術的許多問題中，我們所需要的不是由給定的函數求它的微商，相反地，是要由一個函數的已知微商還原出這個函數。在第 91 目中，假定已知運動的方程 $s=$ $=s(t)$，即是，路程隨時間的變化而變化的規律，我們用微分法先得出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然後找出加速度 $a=\frac{dv}{dt}$。但實際上，時常需要解決反面的問題：已給定加速度 a 是時間 t 的函數，$a=a(t)$，要求確定速度 v 與所通過的路程 s 依賴於 t 的關係。這樣，就需要由函數 $a=a(t)$ 還原出一個函數 $v=v(t)$，它的微商就是 a，然後，知道了函數 v，再求一個函數 $s=s(t)$，而它的微商就是 v。

我們給出下面的定義：

如果在給定的整個區間上，$f(x)$ 是函數 $F(x)$ 的微商，或 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx^{*},$$

那麽，在所給定的區間上，函數 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函數或 $f(x)$ 的積分。

求一個函數的所有的原函數，叫做求積分，這是積分學的問題之一；可以看出，這個問題是微分學的基本問題的反面。

* 在這情形下也可說函數 $F(x)$ 是微分表达式 $f(x)dx$ 的原函數(或積分)。

定理 如果在某一個區間$\mathscr{X}$(有窮的或無窮的,閉的或非閉的)上,函數$F(x)$是$f(x)$的一個原函數,那麽,函數$F(x)+C$也是$f(x)$的一個原函數,其中C是任意常數。相反地,在這區間上$f(x)$的每一個原函數可表示成這種形式。

證明只要限於$\mathscr{X}$是有窮閉區間$[a, b]$的情形就够了

$F(x)$與$F(x)+C$同是$f(x)$的原函數,這個情形是十分明顯的,因爲$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。

現在設$\Phi(x)$是函數$f(x)$的任何一個原函數,於是在區間$[a,b]$上

$$\Phi'(x)=f(x).$$

因爲函數$F(x)$與$\Phi(x)$在所考慮的區間上有相同的微商,所以它們只相差一個常數[126, 系理]:

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

這就是所要證明的。

由定理推知,爲要知道給定函數$f(x)$的所有的原函數,只要求出它的一個原函數$F(x)$就够了,因爲它們彼此之間只差一個常數項。

由此,表達式$F(x)+C$是微商爲$f(x)$或微分爲$f(x)dx$的函數的一般形狀,其中C是任意常數。這表達式稱爲$f(x)$的不定積分,用記號

$$\int f(x)dx$$

來表示,這個記號中已暗含有任意常數。乘積$f(x)dx$稱爲被積表達式,函數$f(x)$稱爲被積函數。

例題 設$f(x)=x^2$;不難看出,這個函數的不定積分是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

這很容易用反面的演算——微分法——來驗證。

我們提醒讀者注意,在"積分"記號$\int$下寫的是所要求原函數的微分,而不是微商(在我們的例題裏是x^2dx,而不是x^2)。以後在[282]中將要闡明,這樣的記法是有歷史根據的;而且它還表現着許多優點,因

而它的保存是十分合理的。

從不定積分的定義直接推出下列的一些性質:

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$,

即是,記號 d 與 $\int$,當前者位於後者的前面時,可互相消去。

2. 因為 $F(x)$ 是函數 $F'(x)$ 的一個原函數,我們有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

這式子可以改寫為

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

由此可見,在 $F(x)$ 前面的記號 d 與 $\int$,當 d 在 $\int$ 後面的時候,也可把它們消去,但必須在 $F(x)$ 後加上一個任意常數。

回到我們一開始就提出來的那個力學問題上,現在我們可以寫

$$v=\int a(t)dt$$

與

$$s=\int v(t)dt.$$

為了明確起見,假定我們要討論的運動是等加速運動,例如,在重力作用下的運動;這時 $a=g$ (沿鉛垂線向下的方向為正方向),並且,不難了解

$$v=\int g\,dt=gt+C.$$

我們得到了速度 v 的表達式,在這表達式中,除時間 t 外,還包含有一個任意常數 C。在同一時刻,對於不同的 C 的值,我們將得到速度的不同的值;因此,對於問題的完全解決,我們已有的數據是不够的。為要得出問題的完全確定的解決,需要知道在某一時刻速度的數值才够。例如,設我們已知,在 $t=t_0$ 時速度 $v=v_0$;我們把這些值代入所求得的速度的表達式中

$$v_0=gt_0+C,$$

由此

$$C=v_0-gt_0,$$

現在我們的解就有了完全確定的形狀

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

其次，我們求得路程 s 的表達式

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(用微分法容易驗證，原函數可以取這樣的形式)。例如，假定在 $t=t_0$ 時路程 $s=s_0$ 給定，我們就可以確定未知的新的常數 C'；求得 $C'=s_0$ 之後，我們寫出解的最後的形狀

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

習慣上稱值 t_0, s_0, v_0 爲量 t, s 與 v 的開始值。

我們知道，函數 $y=F(x)$ 的微商給出對應圖形的切線的斜率。因此，可以這樣來解釋求給定函數 $f(x)$ 的原函數 $F(x)$ 的問題：要找出一條曲線 $y=F(x)$，使它的切線斜率適合給定的變化規律

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x).$$

如果 $y=F(x)$ 是這些曲線之一，那麼，所有其餘的曲線可以從它的平行於 y 軸的簡單位移(移動的距離 C 是任意的)中得到(圖 1)。爲要從這曲線族中得出特殊的一條個別曲線，例如只需給出這曲線應當通過的一點 (x_0, y_0) 就够；開始條件 $y_0=F(x_0)+C$ 就給出 $C=y_0-F(x_0)$。

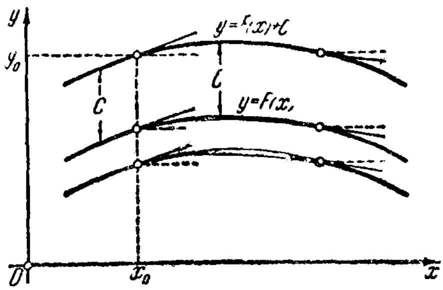

圖 1

252. **積分與面積定義問題** 把原函數解釋作曲線圖形的面積是更爲重要的。因爲在歷史上原函數的概念與面積的定義是極緊密地聯系着的，所以我們就在這兒來講述這個問題(這兒只利用平面圖形的面積的直覺的表示，而把這個問題的精確提法留到第十章去講)。

設給定在區間 $[a,b]$ 上只取正(或非負)值的連續函數 $y=f(x)$。考慮限制在曲線 $y=f(x)$ 下，x 軸上及兩縱線 $x=a$ 與 $x=b$ 之間的圖形 $ABCD$(圖 2)；我們把類似的圖形叫做曲線梯形。想要確定這圖形的面積 P 的值，我們研究變動圖形 $AMND$ 的面積的性質，這變動圖形包含在開始縱線 $x=a$ 以及跟區間 $[a,b]$ 上任意選出的 x 值相對應的縱線之間。當 x 改變時，這個面積將隨之而變，並且對應於每一 x 有它的一個完全確定的值，於是曲線梯形 $AMND$ 的面積是 x 的某一函數；我們用 $P(x)$ 表示它。

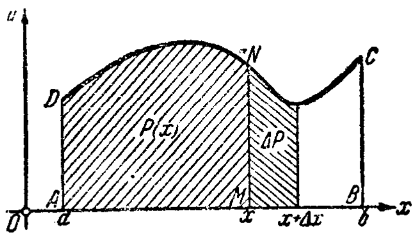

圖 2

我們首先提出求函數 $P(x)$ 的微商的問題。為了這個目的，我們給 x 添上某一個(比方說，正的)改變量 Δx；此時面積 $P(x)$ 將獲得改變量 ΔP。

以 m 及 M 分別表示在區間 $[x, x+\Delta x]$ 上函數 $f(x)$ 的最小值與最大值 [84]，並將面積 ΔP 與底為 Δx，高為 m 及 M 的矩形的面積加以比較。顯然

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

由此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

如果 $\Delta x \to 0$，那麼，由於連續性，m 與 M 趨於 $f(x)$，因而

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

這樣，我們就得到一個有名的定理（通常叫做牛頓-萊不尼慈定理）*：變動面積 $P(x)$ 對有窮的橫坐標 x 的微商等於有窮的縱坐標

* 其實，這個定理——雖然是在另一種形式裏——已為牛頓的老師巴若 (Is. Barow) 發表過了。

$y=f(x)$。

換句話說，變動面積 $P(x)$ 是給定函數 $y=f(x)$ 的原函數。由於當 $x=a$ 時這個原函數變爲 0 這一特點，使得它與原函數族中其他的原函數有所不同。因此，如果已知函數 $f(x)$ 的任何一個原函數 $F(x)$，則按前一目中的定理就有

$$P(x)=F(x)+C,$$

那麼，令 $x=a$，就容易定出常數 C

$$0=F(a)+C,\text{ 於是 } C=-F(a).$$

最後

$$P(x)=F(x)-F(a).$$

特別地，要求得整個曲線梯形 $ABCD$ 的面積 P，需要取 $x=b$：

$$P=F(b)-F(a).$$

作爲例子，我們求界限在拋物線 $y=ax^2$ 下，x 軸上及對應於給定橫坐標 x 的縱坐標之間的圖形的面積 $P(x)$（圖 3）；因爲拋物線交 x 軸於坐標軸的原點，所以，在這兒 x 的開始值爲 0。容易找出函數 $f(x)=ax^2$ 的原函數：$F(x)=\frac{ax^3}{3}$。當 $x=0$ 時這個函數恰好變爲 0，所以

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

［比較 32, 4)］。

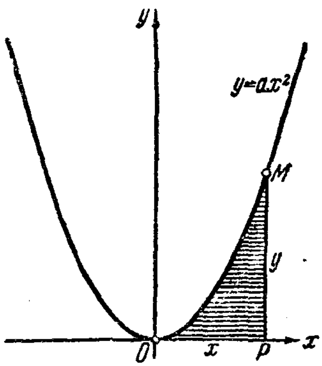

圖 3

由於在計算積分與求平面圖形的面積之間有聯系，通常習慣於把積分計算本身叫作求積。

爲了把以上所講的全部事實推廣到也取負值的函數的情形，只要約定把圖形中位於 x 軸下面那一部分的面積的值算爲負值就行了。

這樣，在區間 $[a, b]$ 上不管怎樣的連續函數 $f(x)$，讀者總可以把它的原函數想像成給定函數的圖形所劃出的變動面積的形式。可是，

把這個幾何的解釋就認爲是原函數存在性的證明，當然是不可以的。因爲面積概念本身還不是有根據的。

在下章[293]中，我們可以對下面的重要事實給出嚴格的並且純粹分析的證明，這個事實就是：**每個在給定區間上的連續函數 $f(x)$ 都有在這區間上的原函數。**這個斷言我們現在就加以採用。

在本章中我們只講到連續函數的原函數。如果實際給出的函數有間斷點，那麼我們將只在它連續的區間上考慮它。因此，承認了上述斷言之後，我們就無須每次預先講明積分的存在性：我們所考慮的積分總是存在的。

253. **基本積分表** 微分學中的每個公式，這公式建立着某一函數 $F(x)$ 的微商是 $f(x)$，直接導出相當的積分學中的公式

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

選出第 94 目中計算初等函數的微商的那些公式，也選出後來(對於雙曲函數)推出的一些公式之後，現在我們就可作出下面的積分表：

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$

3. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad (\mu \neq -1).$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C.$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

$\int e^x dx = e^x + C.$