天津市数学研究成果选编

天 津 市 数 学 会

天津科学技术出版社

天津市数学研究成果选编

天津市数学会

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津市蓟县印刷厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本 787×1092毫米 1/16 印张 14 字数 336,000

一九八三年十二月第一版

一九八三年十二月第一次印刷

印数：1－4,900

书号：13212·59 定价：2.90元

前　　言

这本选编是在天津市数学会理事长吴大任教授指导下，由学术委员会编辑的。学术委员会主任胡国定教授和副主任周学光教授主持了论文的编选和审阅工作。

《选编》选入的是一九八一年十月间在天津市数学年会上宣读的部分论文，其中有基础理论文章，也有应用性文章，共28篇。作者中有著名的老数学家，更多的是中、青年数学工作者。由于篇幅所限，选编工作中难免有疏漏不妥之处，恳请读者批评指正。

按照惯例，选入文章以作者姓氏笔划为序。

国内许多专家参加了论文审阅工作，天津市科学技术协会学会部的同志积极支持本书的出版，在此我们向他们表示衷心的感谢。

天津市数学会

一九八三年三月

目　录

生灭过程理论的若干新进展

王　梓　坤

（南开大学）

一、定义与数字特征

设$X=\{x_t(\omega),\ t\geqslant 0\}$为定义在概率空间（$\Omega$，$F$，$P$）上的齐次可列马氏过程．状态空间$E$为全体非负整数，转移概率矩阵为$P(t)=(p_{ij}(t))$，$i$，$j\in E$．称它为生灭过程，如果当$t\to 0$时，有

$$\begin{cases} p_{ii+1}(t)=b_it+0(t), \\ p_{ii-1}(t)=a_it+0(t), \\ p_{ii}(t)=1-(a_i+b_i)t+0(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中常数$a_0\geqslant 0$，$a_i>0$（$i>0$），$b_i>0$（$i\geqslant 0$）。令$c_i=a_i+b_i$，称矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots \\ a_1 & -c_1 & b_1\cdots 0 & 0 & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots a_n & -c_n & b_n\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

为过程的密度矩阵．以下无特别声明时，恒设$a_0=0$，这时状态0为反射壁．还可以假定X为可分、可测、右下半连续的强马氏过程．由（1）知，如质点沿过程的轨道而运动，自状态i出发，下一步只能转移到$i-1$与$i+1$，概率分别为a_i/c_i与b_i/c_i．

生灭过程在物理、生物、医学、运筹学与工程技术等方面有许多应用；从理论上看，它的结构比较简单，所以在某些问题上可以取得彻底的结果，因而可以作为一般理论的先导．例如，关于间断型马氏过程的爆发问题（即第一个飞跃点有穷），就是从纯生过程开始研究的．关于生灭过程生动而有趣的介绍见〔13〕，建立在测度论上的系统论述见〔1〕．本文的目的在于综述生灭过程理论的一些新进展，侧重于国内所得的部分结果．

利用a_i、b_i，引进下列数字特征：

$$m_i=\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}},\ \left(m_0=\frac{1}{b_0},\ i\geqslant 0\right) \tag{3}$$

$$e_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}},\quad (i>0) \tag{4}$$

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i,\qquad S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i, \tag{5}$$

以及

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k}, \quad Z_n \uparrow Z. \tag{6}$$

它们有下列概率意义．以η_n表示过程首达状态n的时间，即

$$\eta_n(\omega) = \inf\ (t:\ t > 0,\ x_t(\omega) = n), \tag{7}$$

我们约定空集的下确界为∞．以P_i表示自i出发由$P(t)$所产生的概率，它对应的数学期望记为E_i．则有$m_i = E_i \eta_{i+1}$，$R = E_0 \eta$，$(\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n)$．这说明$m_i$是自$i$出发，首达$i+1$的平均时间，而$R$则是自0出发，首达附加状态$\infty$的平均时间．至于$e_i$与$S$则恰好有相反的意义，它们可分别直观地理解为：当$\infty$为反射壁时，自$i$到$i-1$与自$\infty$到0的平均时间．

以$p_k(m,n)$表自k出发，在到达n之前先到达m的概率，则当$m<k<n$时，有

$$p_k(m,n) = \frac{Z_n - Z_k}{Z_n - Z_m}, \qquad p_k(n,m) = \frac{Z_k - Z_m}{Z_n - Z_m}, \tag{8}$$

以$q_k(m)$表示自k出发，经有穷次跳跃而到达m的概率，则

$$q_k(m) = \begin{cases} (Z - Z_k)/(Z - Z_m), & k > m \\ 1, & k < m \\ a_k/c_k + b_k(Z - Z_{k+1})/c_k(Z - Z_k), & k = m \end{cases} \tag{9}$$

因此，当且只当$Z = \infty$时，嵌入马氏链的一切状态都是常返的．

二、积分型泛函的分布

许多实际问题（例如停留时间与首达时间等）可以化为下列形式：设$V(i) \geqslant 0$为定义在E上的不恒为0的函数，考虑随机积分型泛函

$$\xi^{(n)}(\omega) = \int_0^{\eta_n(\omega)} V[x_t(\omega)]dt \tag{10}$$

试求$\xi^{(n)}$的分布$F_{kn}(x) = P_k(\xi^{(n)} \leqslant x)$．为此，我们研究其拉普拉斯变换：对$\lambda > 0$，令

$$\varphi_{kn}(\lambda) = E_k \exp(-\lambda \xi^{(n)}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_{nk}(x) \tag{11}$$

它可以求出如下：

定理1 设$k<n$，有

$$\varphi_{kn}(\lambda) = b_k b_{k+1} \cdots b_{n-1} L_k(\lambda)/L_n(\lambda), \tag{12}$$

其中$L_m(\lambda)$是次数不超过m的多项式，由下列递推式给出：

$$\begin{cases} L_0(\lambda) = 1, \\ L_1(\lambda) = \lambda V(0) + b_0, \\ L_m(\lambda) = [\lambda V(m-1) + c_{m-1}] L_{m-1}(\lambda) - a_{m-1} b_{m-2} L_{m-2}(\lambda), \qquad (m > 1) \end{cases} \tag{13}$$

在（10）中令$n \to \infty$，以P_k—概率1，显然有

$$\xi^{(k)} < \xi^{(k+1)} < \cdots, \quad \xi^{(n)} \uparrow \xi = \int_0^\eta V(x_t)dt,$$

关于ξ的有穷性，有下列0－1律：

定理2 $P_k(\xi < \infty) = 0$或1，视$E_0\xi = \infty$或$E_0\xi < \infty$而定．

至于ξ的分布的拉普拉斯变换，可证明它是一代数方程组的唯一非平凡有界解〔1,3〕；

在某些情况下，可以由此找到此分布的表达式。例如，当$V(0)=1$，$V(i)=0$，$(i>0)$时，ξ化为首达∞以前在状态0的停留时间，这时

$$P_0(\xi\leqslant x)=\begin{cases}1-\exp\left(-x\Big/\sum_{i=0}^{\infty}g_i\right), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases} \tag{14}$$

其中 $g_0=1/b_0$，$g_i=a_ia_{i-1}\cdots a_1/b_ib_{i-1}\cdots b_1b_0$；

又 $E_0\xi=\sum_{i=0}^{\infty}g_i$.

现在将此例一般化。考虑$V(i)=U(i)$，而

$$U(i)=1,\quad (0\leqslant i<n);\qquad U(i)=0,\quad (i\geqslant n). \tag{15}$$

记

$$J_{nk}=\int_0^{\eta_{n+k}}U(x_t)dt, \tag{16}$$

它是(10)当$V=U$时的特例。J_{nk}是首达$n+k$之前，在诸状态(0，1，$\cdots$，$n-1$)中的停留时间，而J_{n0}则化为首达n的时间，即(7)中的η_n。它们的分布皆可求出如下。将(13)中的V改为U，得一组多项式$S_m(\lambda)$：

$$S_0(\lambda)=1,$$

$$S_1(\lambda)=\lambda+b_0, \tag{17}$$

$$S_i(\lambda)=(\lambda+c_{i-1})S_{i-1}(\lambda)-a_{i-1}b_{i-2}S_{i-2}(\lambda),\quad (1<i\leqslant n) \tag{18}$$

$$S_{n+i}(\lambda)=c_{n+i-1}S_{n+i-1}(\lambda)-a_{n+i-1}b_{n+i-2}S_{n+i-2}(\lambda),\quad (1\leqslant i\leqslant k) \tag{19}$$

可以证明：$S_m(\lambda)=0$的根皆为负数，而且都是单根。从而有分解式

$$\begin{aligned}S_m(\lambda)&=\prod_{i=1}^{m}(\lambda+\lambda_i^{(m)}),\quad (m\leqslant n)\\ &=\prod_{i=1}^{n}(\lambda+\lambda_i^{(m)}),\quad (n<m\leqslant n+k)\end{aligned} \tag{20}$$

其中$0<\lambda_1^{(m)}<\lambda_2^{(m)}<\cdots$.

自m出发，停留时间J_{nk}的分布函数记为

$$F_{mnk}(x)=P_m(J_{nk}\leqslant x),$$

因而首达n的时间η_n的分布函数为$F_{mn0}(x)$.

定理3 自m ($m<n$) 出发，停留时间J_{nk}的分布函数$F_{mnk}(x)$是混合指数型的，有密度为

$$f_{mnk}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_mb_{m+1}\cdots b_{n+k-1}S_m(-\lambda_i^{(n+k)})}{S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)})}e^{-\lambda_i^{(n+k)}x}, \tag{21}$$

其中$S_i(\lambda)$ $(i=m,\ n+k)$ 由(17)—(19)给出，S'表S的微商，

$$S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)})=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_j^{(n+k)}-\lambda_i^{(n+k)}), \tag{22}$$

特别，首达n的时间η_n有密度为$f_{mn0}(x)$.

下面讨论当$k\to\infty$时，$P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0J_{nk}}\leqslant x\right)$的极限。结果发现，极限分布依赖于(6)中的$Z$是否无穷。当$Z=\infty$时，嵌入马氏链（从而过程$X$本身）是常返的。

定理4　只有两种可能，此极限分布或者是指数型的，或者是混合指数的：

如$Z=\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty} P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0 J_{nk}}\leqslant x\right)=1-e^{-x}. \tag{23}$$

如$Z<\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty} P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0 J_{nk}}\leqslant x\right)=\int_0^x \sum_{j=1}^{n} A_{nj}e^{-a_{nj}t}dt, \tag{24}$$

其中A_{nj}、$a_{nj}>0$是常数，它们可以通过密度矩阵中的元a_i、b_i表达出来。参看〔2〕.

由此可知，如$Z=\infty$，极限分布不依赖于停留集（0，1，…$n-1$）中的元数n，而当$Z<\infty$时则反是.

以上诸定理的证明见〔1，2，3〕，有关问题也见〔14〕.

至此我们着重讨论了停留时间.关于一般的由（10）定义的$\xi^{(n)}$的深入研究见〔5〕，那里发现：自m出发，（$m<n$），$\xi^{(n)}$的分布仍是混合指数型的；此外还证明了极限分布必为无穷可分，即如对适当选择的常数$B_n>0$及a_n，如在弱收敛下有

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\frac{\xi^{(n)}-a_n}{B_n}\leqslant x\right)=G_0(x),$$

则概率分布函数$G_0(x)$是无穷可分的.在〔5〕中还得到了下列极限定理：

定理5

（1）若　$\dfrac{a_n}{b_n}\to 0$，　$\dfrac{V(n)}{b_n}\to c$（$n\to\infty$），则强大数定律成立，即

$$P_0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\xi^{(n)}-E_0\xi^{(n)}}{n}=0\right)=1;$$

（2）在上述条件下，如补设$c>0$，则中心极限定理成立，即

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\frac{\xi^{(n)}-E_0\xi^{(n)}}{\sqrt{D_0(\xi^{n})}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

以上都假定了开始状态$m<n$.如$m>n$，则由于在首达n以前缺乏象0那样的反射壁而发生新困难，葛余博对此作了研究。

三、构造问题

沿生灭过程轨道的运动可如下描述：设质点自$i(=x_0)$出发，在i停留一段时间τ_1，变量τ_1有参数为$c_i(=a_i+b_i)$的指数分布，接着跳跃到状态$x(\tau_1)$，

$$P_i\left(x(\tau_1)=i+1\right)=\frac{b_i}{c_i},\qquad P_i\left(x(\tau_1)=i-1\right)=\frac{a_i}{c_i},$$

然后在$x(\tau_1)$又停留一段时间，在τ_2时再作第二次跳跃，如此继续.于是得一列跳跃点

$$0<\tau_1<\tau_2<\cdots,\qquad \tau_n\uparrow\tau^1\leqslant\infty,$$

称τ^1为第一个飞跃点.易见$P_i(\tau^1=\eta)=1$；而且只有两种可能，$P_i(\tau^1=\infty)=1$或0，视$R=\infty$或$R<\infty$而定.这是多布鲁申证明的，可看成定理2当$V(i)\equiv 1$时的特例.

如果$R=\infty$，过程的轨道以概率1是阶梯函数；这时过程的概率性质包括$P(t)$完全由密度矩阵Q决定.如果$R<\infty$，则Q只决定过程在τ^1以前的转移性质，它不能回答在〔τ^1，$\tau^1+\varepsilon$）

中质点如何运动；为此必须再引进一些特征数来刻画在这段时间内质点的行为。由于$P_i(x(\tau_n)\to\infty)=1$，所以这些特征数的作用在于刻画质点在到达附加状态$\infty$后，如何返回到$E$中来。当它回到$E$中某状态$i$后，它又象上面所述的那样，继续前进。

所谓构造问题（或者Q问题），是说预先给出形如（2）的矩阵后，要求出一切生灭过程X，其密度矩阵为Q。我们称这种过程为Q—过程。或者，用分析的话说，要求出一切转移概率矩阵$P(t)$，它们满足（1）。用微分方程的术语，这相当于要求出

$$P'(t)=QP(t),\qquad P(0)=I \tag{25}$$

的全体解$P(t)$。这里I为恒等矩阵(δ_{ij})。

如上述，如用Q中的元按（3）（5）作出的$R=\infty$，则解是唯一的，此解即通常所谓的最小过程。以下总设$R<\infty$，可以用概率的方法构造出全部Q过程。结果发现：任一Q过程，或者是Doob过程，或者是一列Doob过程的极限。

所谓Doob过程的概率结构是：任取集中在E上的概率分布$\{d_i\}$，$d_i\geqslant 0$，$\sum_{i=0}^{\infty}d_i=1$。令$x(\tau^1)$的分布为$\{d_i\}$，于是当质点到达∞后，便以概率d_i立即回到状态i。Doob过程由Q及$\{d_i\}$决定，故记它为(Q,d)过程。

设$\{x_t(\omega),\ t\geqslant 0\}$为任一$Q$过程，令

$$\beta_1^{(n)}(\omega)=\inf\ (t:\ t\geqslant\tau^1,\ x_t(\omega)\leqslant n),$$

$$v_i^{(n)}=P(x(\beta_1^{(n)})=i).$$

现在定义此过程的一列新特征数p，q，r_n，$\{n\geqslant 0\}$如下：可以证明，存在极限

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}v_i^{(n)}c_{i0}}{\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n)}c_{i0}},\qquad q=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(n)}c_{n0}}{\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n)}c_{i0}},$$

其中$c_{m0}=(Z-Z_m)/Z=q_m(0)$〔见（9）〕。

如果一切$v_n^{(n)}=1\ (n\geqslant 0)$，定义$r_n=0\ (n\geqslant 0)$；如存在$k$，使$v_i^{(i)}=1$，$(i\leqslant k)$，但$v_{k+1}^{(k+1)}<1$，则先任取一正数$r_k$，并定义不依赖于$m$的

$$r_n=v_n^{(m)}r_k/v_k^{(m)},\qquad (m>\max(n,k))$$

p，q及$\{r_n\}$（除差一常数因子外）被Q过程所唯一决定，非负，而且满足条件

$$p+q=1, \tag{26}$$

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}r_iR_i<\infty,\qquad \text{如}\ p>0, \tag{27}$$

$$r_n=0,\qquad \text{如}\ p=0, \tag{28}$$

$$q=0,\qquad \text{如}\ S=\infty, \tag{29}$$

其中$R_i=\sum_{j=i}^{\infty}m_j$，$m_j$由（4）、$S$由（5）给出。下定理完满地解决了构造问题，它说明在全体Q过程与全体如上数列之间存在一一对应。

构造定理 设已给（2）形的矩阵Q，满足条件$R<\infty$，则下列结论成立：

(i) 任一Q过程$\{x_t(\omega),\ t\geqslant 0\}$的特征数列$p$，$q$，$r_n$，$(n\geqslant 0)$满足（26）—（29）。

(ii) 反之，设已给一列非负数p，q，r_n，（$n\geqslant 0$），满足(26)—(29)式，则存在唯一Q过程$\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$，它的特征数列重合于此已给数列；而且它的转移概率$p_{ij}(t)$满足

$$p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}(t), \tag{30}$$

这里$p_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q, V^{(n)})$过程的转移概率，而分布$V^{(n)}=(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$集中在（0，1，…，$n$）上，如下给出：

若 $p=0$，则令

$$v_j^{(n)}=0 \qquad (0\leqslant j<n), \qquad v_n^{(n)}=1$$

若$p>0$，则令

$$v_j^{(n)}=X_n r_j/A_n, \qquad (0\leqslant j<n)$$

$$v_n^{(n)}=Y_n+X_n\sum_{l=n}^{\infty}r_l c_{ln}/A_n \quad ,$$

其中$c_{ln}=q_l(n)$由（9）给出，又

$$0<A_n=\sum_{l=0}^{\infty}r_l c_{ln}<\infty,$$

$$X_n=\frac{pA_n(Z-Z_n)}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z}, \qquad Y_n=\frac{qA_0Z}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z}.$$

利用构造定理，可以顺利地解决过程的常返性、遍历性以及 0—1 律等问题详见〔1，6〕.

至于a_0可以大于0以及过程可以中断情况下的构造问题，则在〔1，4，9，15〕中完全解决.

上述构造方法的进一步发展见〔6，11〕.

四、其它进展

与生灭过程紧密相关的有双边生灭过程与广生灭过程，前者的状态空间为全体整数；后者则是这样的齐次可列马氏过程，从状态i出发，下一步可能向后跳跃到0，1，…$i-1$，但向前则只能到$i+1$.例如以x_t表示t时某汽车站的等车人数，一般地旅客是一次只新来一人，但汽车一到，则剩下的旅客数可能是0，1，…x_t-1，因而可视x_t为广生灭过程.张建康同志第一次系统地讨论了这类过程，引进了数字特征，研究了其积分型泛函的分布等问题.关于双边生灭过程的研究见〔6，7，10，12〕.近年来开展了齐次马氏过程的可逆性、有势性的研究，并引进了概率流的概念，在〔10，12〕中对生灭过程与双边生灭过程研究了这些问题，取得了相当多的新结果.薛行雄则研究了生灭过程与位势的关系，此外，关于多维生灭过程的研究还不多，这是一个很值得讨论的课题.

参考文献

〔1〕 王梓坤，生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，1980.
〔2〕 王梓坤，生灭过程停留时间与首达时间的分布，中国科学，1980，2，109—117.
〔3〕 王梓坤，On distributions of functionals of birth and death processes and their

applications in the theory of queues, *Scientia Sinica*, X, 1961, 160—170.

〔4〕 王梓坤、杨向群，中断生灭过程的构造，数学学报，21，1，1978，66—71.

〔5〕 吴荣，生灭过程的泛函分布，数学学报，24，3，1981，337—358.

〔6〕 杨向群，可列马尔科夫过程构造论，湖南科学技术出版社，1981.

〔7〕 杨向群，可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展，7，1964，397—424.

〔8〕 杨向群，关于生灭过程构造论的注记，数学学报，15，1965，173—187.

〔9〕 杨向群、王梓坤，中断生灭过程构造中的概率分析方法，南开大学学报（自然科学），1979，3，1—32.

〔10〕 钱敏、侯振挺等，可逆马尔可夫过程，湖南科学技术出版社，1979.

〔11〕 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978.

〔12〕 郭懋正、吴承训，双边生灭过程概率流的环流分解，中国科学，1981，3，271—281.

〔13〕 W. Feller, An Introduction to Probability and its Application, Vol Ⅰ，Ⅱ，1971.

〔14〕 Soloviev, A.D., Proceedings of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, 1972, 71—86.

〔15〕 杨超群，一类生灭过程，数学学报15（1965），9—31.

可列非齐次马氏链的分析模型及其应用

刘 文

（河北工学院）

§1. 马尔科夫链的分析模型

设

$$q_1, \ q_2, \ q_3, \ \cdots \tag{1}$$

$$_mP=\begin{pmatrix} _mp_{11} & _mp_{12} & _mp_{13} & \cdots \\ _mp_{21} & _mp_{22} & _mp_{23} & \cdots \\ _mp_{31} & _mp_{32} & _mp_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \ m=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

分别为马氏链的初始分布与转移概率矩阵（按照文献〔1〕中的记号）.取$\Omega=[0,1)$，其中的勒贝格可测集的全体及勒贝格测度为所考虑的概率空间.我们来构造Ω上的一列随机变量，使它组成以（1）为初始分布以（2）为转移概率矩阵的马氏链.

设（1）中的非零元素依次为

$$q_{n_k} \ (k=1,2,3,\cdots). \tag{3}$$

将$[0,1)$按（3）中各元素的比例分成可列个左闭右开区间（注：为方便起见，我们把有穷也算作可列），并依次记之为

$$\delta_{x_0} \ (x_0=n_1,n_2,n_3,\cdots)$$

即

$$\delta_{n_1}=[0,q_{n_1}), \ \ \delta_{n_2}=[q_{n_1},q_{n_1}+q_{n_2}), \ \cdots$$

这些区间都称为零阶δ区间.一般地，设$\delta_{x_0\cdots x_{n-1}}$是$n-1$阶$\delta$区间（$n\geqslant 1$），且$_{n-1}P$中第$x_{n-1}$行的非零元素依次为

$$_{n-1}p_{x_{n-1}m_k}, \ \ (k=1,2,3,\cdots) . \tag{4}$$

则按（4）中各元素的比例将$\delta_{x_0\cdots x_{n-1}}$分成可列个左闭右开区间，并依次记之为

$$\delta_{x_0\cdots x_{n-1}x_n} (x_n=m_k, \ \ k=1,2,3, \ \cdots)$$

用P表示勒贝格测度，则有

$$P(\delta_{x_0\cdots x_n})={}_{n-1}p_{x_{n-1}x_n} \cdot P(\delta_{x_0\cdots x_{n-1}}). \tag{5}$$

这样得到的区间叫n阶δ区间，如此继续下去，就可得出一切阶δ区间.考虑区间套

$$\delta_{x_0}\supset\delta_{x_0x_1}\supset\delta_{x_0x_1x_2}\supset\cdots,$$

令

$$\delta_{x_0x_1x_2\cdots}=\bigcap_{n=0}^{\infty}\delta_{x_0\cdots x_n}.$$

易知，对于每个$\omega\in[0,1)$都存在唯一的一列正整数$x_0, \ x_1, \ x_2, \ \cdots$，使得

$$\omega\in\delta_{x_0x_1x_2\cdots}. \tag{6}$$

于是（6）中δ的每个下标（也称为ω的下标）都是ω的函数：

$$x_n = x_n(\omega),\quad n = 0,1,2,\cdots$$

根据各阶δ区间的作法易证，$\{x_n\}$组成一马氏链，其初始分布与转移概率矩阵分别为（1）与（2），状态空间则为$E=\{1,2,3,\cdots\}$.

事实上，由（5）显然有

$$P(\delta x_0\cdots x_n) = P(\delta x_0)\prod_{k=0}^{n-1} {}_k p_{x_k x_{k+1}}, \tag{7}$$

于是对x_k的任意可能值i_k $(k=0,1,\cdots,n)$，有

$$\begin{aligned} &P(x_n(\omega)=i_n \mid x_0(\omega)=i_0,\ \cdots,\ x_{n-1}(\omega)=i_{n-1}) \\ &= \frac{P(x_0(\omega)=i_0,\ \cdots,\ x_n(\omega)=i_n)}{P(x_0(\omega)=i_0,\cdots,x_{n-1}(\omega)=i_{n-1})} = \frac{P(\delta i_0\cdots i_n)}{P(\delta i_0\cdots i_{n-1})} \\ &= \frac{P(\delta i_0)\prod_{k=0}^{n-1} {}_k p_{i_k i_{k+1}}}{P(\delta i_0)\prod_{k=0}^{n-2} {}_k p_{i_k i_{k+1}}} = {}_{n-1}p_{i_{n-1}i_n}. \end{aligned} \tag{8}$$

又

$$P(x_{n-1}(\omega)=i_{n-1}) = \sum_{a_k} P(\delta a_0\cdots a_{n-2}a_{n-1}) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &P(x_{n-1}(\omega)=i_{n-1},\ x_n(\omega)=i_n) \\ &= \sum_{a_k} P(\delta a_0\cdots a_{n-2}i_{n-1})\,{}_{n-1}p_{i_{n-1}i_n}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中$\sum\limits_{a_k}$表示对所有下标a_k的所有值求和.由（9）与（10）有

$$P(x_n(\omega)=i_n \mid x_{n-1}(\omega)=i_{n-1}) = {}_{n-1}p_{i_{n-1}i_n}. \tag{11}$$

由（8）与（11）即得

$$\begin{aligned} &P(x_n(\omega)=i_n \mid x_0(\omega)=i_0,\ \cdots,x_{n-1}(\omega)=i_{n-1}) \\ &= P(x_n(\omega)=i_n \mid x_{n-1}(\omega)=i_{n-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

又由零阶δ区间的作法有

$$P(x_0(\omega)=n_k) = q_{n_k}\ (k=1,2,3,\cdots), \tag{13}$$

其中q_{n_k}是（1）中诸非零元素.

由（11）—（13）知，$x_n(\omega)\ (n=0,1,2,\cdots)$是一马氏链，其初始分布与转移概率矩阵分别为（1）与（2）.证毕.

马尔科夫链的存在定理的证明，通常是通过验证由转移矩阵和初始分布所产生的有穷维分布族的相容性，把问题归结为柯尔莫果洛夫关于一般随机过程的存在定理.大家知道，柯氏的这个定理涉及到建立无穷维乘积空间上的测度，是相当困难的.本节的讨论实际上是给出马尔科夫链（未必齐次）的存在定理的一种简单的构造性证明，在我们构造的模型中，马氏链无非是定义在区间[0,1)上的一列初等函数（见文献[2]，p.90），在特殊情况下（例如在有限链的情况），它是一列阶梯函数.

§2. 奇异单调函数的构造

本节中我们要将上节构造的马氏链的分析模型和关于转移概率的强极限定理应用于函数

论，给出构造奇异单调函数的一个相当普遍的方法.为叙述上的方便，我们就上节构造的模型的一个特殊情况来说明.

设

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_m \tag{1}$$

是一概率分布，且$q_k>0$ $(k=1,2,\cdots,m)$；

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots\cdots p_{mm} \end{pmatrix} \tag{2}$$

是一转移矩阵，且

$$p_{ij}>0\ (i,j=1,2,\cdots,m).$$

将区间$[0,1]$依次分为长为$q_1,q_2,\cdots,q_m$的闭区间：

$$\delta_1=[0,q_1],\ \ \delta_2=[q_1,q_1+q_2],\ \ \cdots,\delta_m=[q_1+\cdots+q_{m-1},1],$$

这些区间都称为一阶δ区间.一般地说，设

$$\delta_{x_1\cdots x_n}(x_i=1,2,\cdots,m;\ i=1,2,\cdots,n)$$

是n阶δ区间，则按矩阵P中第x_n行各元素的比例将$\delta_{x_1\cdots x_n}$分成m个区间，并依次记之为

$$\delta_{x_1\cdots x_nx_{n+1}}(x_{n+1}=1,2,\cdots,m),$$

用P表示勒贝格测度，则有

$$P(\delta_{x_1\cdots x_nx_{n+1}})=P(\delta_{x_1\cdots x_n})\cdot p_{x_nx_{n+1}}. \tag{3}$$

这样得到的区间就叫$n+1$阶δ区间，如此继续下去就可得出一切阶δ区间.由（3）可得

$$P(\delta_{x_1\cdots x_n})=P(\delta_{x_1})\prod_{k=1}^{n-1}p_{x_kx_{k+1}}. \tag{4}$$

易知，对于任一个由不大于m的正整数所组成的无限序列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots \tag{5}$$

区间套

$$\delta_{x_1}\supset\delta_{x_1x_2}\supset\delta_{x_1x_2x_3}\cdots$$

有唯一的一个公共点ω，将这个点记为

$$\omega=\delta_{x_1x_2x_3}\cdots=\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_{x_1\cdots x_n}, \tag{6}$$

显然对于每个$\omega\in[0,1]$，都存在由不大于m的正整数所组成的无限序列（5），使（6）成立，如果ω不是δ区间的端点，或者$\omega=0$或1，则相应于ω的序列（5）是唯一的；如果ω是δ区间的端点，且$\omega\neq0$与1，则相应于ω的序列（5）有两个，其中一个末尾各数字恒为1，另一个末尾各数字恒为m.为确定起见，我们约定相应于ω的序列（5）取末尾各数字恒为1的形式，于是（6）中的每个下标都是ω的函数，记为

$$x_n=x_n(\omega),\ \ n=1,2,3,\cdots$$

根据各阶δ区间的作法易证，$\{x_n\}$组成一马氏链，其初始分布与转移概率矩阵分别为（1）与（2），状态空间则为$E=\{1,2,\cdots,m\}$.

设$k,l\in E$，$S(k,n)$是ω由（6）表示时，其前n个下标

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

中数字k的个数，$A(k,l,n)$是（6）的下标偶序列

$$(x_1,x_2),\ (x_2,x_3),\ \cdots,(x_n,x_{n+1})$$

中偶(k,l)的个数.设

$$A=\{\omega \mid \lim_{n\to\infty}S(k,n)=\infty \text{且} \lim_{n\to\infty}\frac{A(k,l,n)}{S(k,n)}=p_{kl}\},$$

根据马氏链的理论（参见〔1〕），有

$$P(A)=1. \tag{7}$$

设

$$R(r)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

是另一转移矩阵，其中

$$r_{kl}=r,\quad (0<r<1)$$

$$r_{kj}=\frac{(1-r)p_{kj}}{1-p_{kl}},\quad (j\neq l)$$

$$r_{ij}=p_{ij},\ i\neq k,\ j=1,2,\cdots,m$$

和由P引进各阶δ区间类似，由$R(r)$可引进各阶$\varDelta$区间$\varDelta_{x_1\cdots x_n}$，其中1阶$\varDelta$区间与一阶$\delta$区间相同，即

$$\varDelta_k=\delta_k,\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

与（4）类似，有

$$P(\varDelta_{x_1\cdots x_n})=P(\delta_{x_1})\prod_{k=1}^{n-1}r_{x_k x_{k+1}} \tag{8}$$

与（6）类似，每个$\omega\in[0,1]$可表为

$$\omega=\varDelta_{x_1x_2x_3\cdots}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\varDelta_{x_1\cdots x_n}. \tag{9}$$

设$\omega\in[0,1]$且由（6）表示，令

$$f_r(\delta_{x_1x_2x_3\cdots})=\varDelta_{x_1x_2x_3\cdots}, \tag{10}$$

易知f_r是$[0,1]$上的严格单增的连续函数，且

$$f_r(\delta^+_{x_1\cdots x_n})-f_r(\delta^-_{x_1\cdots x_n})=P(\varDelta_{x_1\cdots x_n}), \tag{11}$$

其中$\delta^-_{x_1\cdots x_n}$与$\delta^+_{x_1\cdots x_n}$分别表示$\delta_{x_1\cdots x_n}$的左、右端点，设 $\delta_{x_1\cdots x_n}$是包含ω的n阶区间，由（4），（8）与（11）有

$$\lambda_n=\frac{f_r(\delta^+_{x_1\cdots x_{n+1}})-f_r(\delta^-_{x_1\cdots x_{n+1}})}{\delta^+_{x_1\cdots x_{n+1}}-\delta^-_{x_1\cdots x_{n+1}}}=\frac{P(\varDelta_{x_1\cdots x_{n+1}})}{P(\delta_{x_1\cdots x_{n+1}})}$$

$$=\left(\frac{r}{p_{kl}}\right)^{A(k,l,n)}\left(\frac{1-r}{1-p_{kl}}\right)^{S(k,n)-A(k,l,n)}. \tag{12}$$

设f_r的可微点的全体为$B(r)$，令

$$H=A\cap B(r),$$

则由（7）及勒贝格关于单调函数几乎处处可微的定理有

$$P(H)=1.$$

设$\omega \in H$，则由（12）有[4]

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = f'(\omega). \tag{13}$$

由于$\omega \in A$，故

$$\lim_{n\to\infty} S(k,n) = \infty, \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(k,l,n)}{S(k,n)} = p_{kl}. \tag{15}$$

于是由（12），（14），（15）有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[S(k,n)]{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{p_{kl}}\right)^{\frac{A(k,l,n)}{S(k,n)}}\left(\frac{1-r}{1-p_{kl}}\right)^{1-\frac{A(k,l,n)}{S(k,n)}}$$

$$= \left(\frac{r}{p_{kl}}\right)^{p_{kl}}\left(\frac{1-r}{1-p_{kl}}\right)^{1-p_{kl}} \tag{16}$$

如果

$$\left(\frac{r}{p_{kl}}\right)^{p_{kl}}\left(\frac{1-r}{1-p_{kl}}\right)^{1-p_{kl}} > 1,$$

则由（16）有

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,$$

这与（13）矛盾.故必须有

$$\left(\frac{r}{p_{kl}}\right)^{p_{kl}}\left(\frac{1-r}{1-p_{kl}}\right)^{1-p_{kl}} \leqslant 1. \tag{17}$$

易证（17）式中的等号仅当$r = p_{kl}$时成立，于是由（16）与（17）有，当$0<r<1$且$r \neq p_{kl}$时，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[S(k,n)]{\lambda_n} < 1,$$

于是由（13）即得$f'_r(\omega) = 0$，从而$f_r(\omega)$是奇异单调函数.证毕.

参 考 文 献

〔1〕 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

〔2〕 P.R. Halmos，测度论，王建华译，科学出版社，1965.

〔3〕 刘文，关于可列齐次马氏链转移概率的强大数定律，数学学报，21（1978），232—242.

〔4〕 E.W. Hobson, Theory of Functions of Real Variable, Vol. Ⅱ, *New York*, 1957, 403.

强大数定律中的纯分析方法

刘　文

（河北工学院）

本人[1] 提出过研究概率论中的强极限定理的一种新的纯分析方法（参见[2]）．这种方法的要点是，取$\Omega=[0,1]$、其中的Lebesgue可测集的全体和Lebesgue测度为所考虑的概率空间，在$[0,1]$上引入适当的单调函数，然后应用关于单调函数几乎处处可微的Lebesgue定理来证明某些极限几乎处处存在．本文的目的是要进一步阐明这种方法，并得出Borel强大数定律的一种新的类型的推广．

基本引理　设$0<p<1$，$\{a_n\}$是非负数列，$\{b_n\}$是正数列，如果存在$\alpha_K\in(0,p)$，$\beta_K\in(p,1)$，且$\alpha_K\to p$，$\beta_K\to p$，使得对一切K．

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\alpha_K}{p}\right)^{\frac{a_n}{b_n}}\left(\frac{1-\alpha_K}{1-p}\right)^{1-\frac{a_n}{b_n}}\leqslant 1, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\beta_K}{p}\right)^{\frac{a_n}{b_n}}\left(\frac{1-\beta_K}{1-p}\right)^{1-\frac{a_n}{b_n}}\leqslant 1. \tag{2}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=p. \tag{3}$$

证　由(1)式有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\alpha_K(1-p)}{p(1-\alpha_K)}\right]^{\frac{a_n}{b_n}}\leqslant\frac{1-p}{1-\alpha_K}. \tag{4}$$

由于$0<\alpha_K<p$，故有

$$\frac{\alpha_K(1-p)}{p(1-\alpha_K)}<1,\quad\frac{1-p}{1-\alpha_K}<1,$$

于是由(4)式有

$$\left[\frac{\alpha_K(1-p)}{p(1-\alpha_K)}\right]^{\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}}\leqslant\frac{1-p}{1-\alpha_K},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}\ln\frac{\alpha_K(1-p)}{p(1-\alpha_K)}\leqslant\ln\frac{1-p}{1-\alpha_K},$$

即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}\geqslant\frac{\ln\frac{1-p}{1-\alpha_K}}{\ln\frac{\alpha_K(1-p)}{p(1-\alpha_K)}}. \tag{5}$$

由洛必大法则有