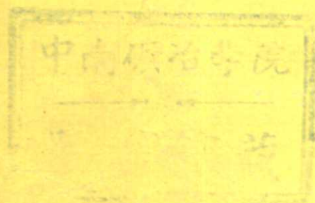


博 奕 论

〔日〕宫泽光一 著



上海科学技术出版社

博 奕 論

〔日〕宮澤光一 著

張 毓 椿 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共分四章,第一章博弈的构造,重点介绍效用函数概念,作为以后的准备。第二、三章二人零和博弈,分别就纯策略和混合策略的范围进行了扼要的讨论,最后一章非零和博弈,对合作博弈及 Nash 理论作了一般性的介绍。本书可供数学工作者,经济工作者及科学研究人员作参考。

现代应用数学丛书

博 奕 論

原书名 ゲームの理論

原著者 [日] 宮澤 光 一

原出版社 岩波书店, 1958

译者 張 毓 椿

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出003号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 2 22/32 字数 62,000

1963年5月第1版 1963年5月第1次印刷

印数 1—6,050

统一书号: 13119 · 322

定 价: (十四) 0.48 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册，分成 A、B 兩組，各編有序号。現在把原来同一題目分成兩册或三册的加以合并，整理成 42 种，不另分組編号，陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的，写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最新发展状况，并对全书內容作一些評價，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

1928 年 von Neumann 在論文 “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele” (Math. Annalen, vol. 100) 中的想法，到 1944 年在他和 Morgenstern 合著的 “Theory of Games and Economic Behavior” 一书以及該书 1947 年的第二版中形成了 2 人零和博弈的理論。从此出发，以 n 人博弈的結構分析为中心，建立了完整的体系。这一理論所研究的不是魯賓遜飄流在无人島上的行动，而是现实社会中彼此相互影响的各种活动的合理規律。当然可以想象，这一理論对于人类与自然界的斗争，社会經濟活动，軍事作战等方面都能应用。但是，从实际問題中抽象出来的博弈理論，在应用于实际問題时，由于现实情况远較博弈模型为复杂，因此还有很大困难。所以在开始时，博弈論似乎并没有重大的现实意义。

尽管如此，人們把难以掌握的竞争活动的本质加以抽象化，終究是一项重要的成果。自从 1947 年到現在，又过去十余年了。在这期間，随着科学技术的迅速发展，博弈論也越来越与现实問題相接近。由于大型电子計算机的建立，高速計算工具的发展使复杂的博弈問題逐步具备求解的可能性。

1950 年出版了 “Contributions to the Theory of Games” 第 1 卷 (Annals of Math. Studies, Princeton)，1953 年出版了第 2 卷，1957 年出版了第 3 卷，現在第 4 卷亦已出版。特別是，由于最近运筹学的迅速发展，正表明博弈論在逐步發揮它的真正作用。此外，在 1957 年末，Luce 和 Raiffa 合写了 “Games and Decisions” 一书，其中有詳細的文献目录，大有参考价值。

在博弈論正取得显著发展的时期，这本小册子的問世似乎是

适时的。作者认为 2 人零和博弈是最基本的, 所以是要写的一个重点。但如不先明确效用的理论, 就似乎很难讲透, 因此先对效用作了简洁的介绍。

要想从基本的一直介绍到现代成果, 即使仅就 2 人博弈而论也要占去很多的篇幅, 何况 n 人博弈与非零和博弈的研究已远较 1947 年时期有了更大的发展。如果不接触到这些内容, 又显示不出反映现代博弈理论的意图。因此, 这里仅对博弈论中的合作关系以及 Nash 的理论作了一般性的介绍, 开始接触到近代的理论。

最后, 希望通过数学家和实际工作者的合作, 大大促进博弈论的研究。

宫泽光一

1958 年 1 月

目 录

出版說明

序

第1章 博弈的构造	1
§1 博弈的規則	1
§2 博弈的树	2
§3 优序	5
§4 效用函数	8
§5 博弈的展开型及正規型	13
第2章 2人零和博弈 I (純策略范围)	18
§6 2人零和博弈	18
§7 矩陣博弈的解	20
§8 完全信息博弈	25
第3章 2人零和博弈 II (混合策略的引入)	29
§9 混合策略	29
§10 矩陣博弈的基本定理	34
§11 矩陣博弈的基本解	39
§12 2人无限零和博弈	50
第4章 非零和博弈	58
§13 非合作 n 人博弈	58
§14 合作 2 人博弈	65
§15 交涉 2 人博弈	71
参考文献	80

第1章 博弈的构造

§1 博弈的规则

考虑由几个行动主体参加的竞争。各主体都希望根据自己选定的方式来决定使自己能收到最大效果的行动方针。所谓竞争，其意义就是各主体行动的结果不仅取决于自己的行动，而且还取决于其他主体的行动。同时，各主体的目的必须是互不相容或相互对抗的。在这种情况下，各主体的最好行动是什么，以及当各主体采取了在某种意义下最好的行动时，事态通过怎样的形式才能稳定，所有这些问题用数学方法来加以阐明，这就是 von Neumann 和 Morgenstern^[7] 所创始的博弈理论。为此，有必要将支配竞争的因素加以抽象化，并将这些因素的相互关系表为数学模型。由于室内游戏可看作是竞争的最简单例子，在此试先把它博弈模型化。

博弈是以几组规则作为特征的。它的规则中首先是指出参加博弈的主体（称为局中人）的数目，同时要指出步法（move）的序列。步法有两种：(i) 某特定局中人在允许的选择事项（alternatives）中决定选择其中一个而得的步法（如在奕棋中走一步棋子），(ii) 不由局中人而由某一特定的机遇装置机械地从选择事项中选定一项的步法（如在桥牌游戏中分给各局中人一定的牌数）。前者称为人的步法（personal move），后者称为机遇步法（chance move）。在人的步法时，选出的选择事项称为着（choice），在机遇步法中出现的选择事项称为运（outcome）。

博弈的规则构成如下：对于步法，要求（a）指出是人的步法还是机遇步法；（b）若是人的步法，指出哪个局中人所选择的步法

以及当时允许选择事项的集合是什么；(c)若是机遇步法，指明可能出现的运的集合以及各运能出现的概率。象这样，若直到第 $(k-1)$ ($k>1$)步法以前的所有步法都已经指明时，下一步对于作为前 $(k-1)$ 个步法的着和运的函数的第 k 步法，要指出：(a)第 k 步法是人的步法还是机遇步法；(b)若为机遇步法，可能出现的运的集合和运出现的概率如何；(c)若为人的步法，可选择事项的集合如何，是哪个局中人的步法，另外还要指出局中人选择这一着时，一切能够获得的关于前 $(k-1)$ 个步法中所实现的着和运的信息。

最后，博弈的规则还要指出每个步法作为着与运的函数，博弈在何时終了，博弈在終了时，其成果是甚么。这里总假定博弈经过有限次的步法終了。根据以上的博弈规则，博弈到終了的某一次具体实现称为局(play)。

§2 博弈的树

博弈可用图形表示。设局中人 i 的某个步法允许在三个选择事项中进行选取。将各选择事项用由同一点出发，方向向上而端点在同一水平上的线段表示，此时这个步法的状态如图2.1。但是各步法用图2.1的图形表现时，博弈步法的意义是不明显的。博弈各个步法的意义主要在于它和其他步法的结合关系。因此各步法除用图2.1表示外，还必须表示各步法的着或者运与其他步法的结合关系。这样，博弈可用图2.2所示依次向上的线段的连接体表示之。在此，各支点只由一个分支与低一级的一个支点连接，最低的支点只有一个，它表示第一步法。这样的图形称为**博弈的树**(game tree)。各等高排列的支点表示各个步法，由下而上顺次称为第一步法，第二步法等等。各支点所标的数字 $1, 2, \dots, n$ 表示其步

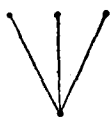


图 2.1

法是人的步法,且分别为局中人 1, 2, $\dots$, n 的步法。支点所标的数字若是 0, 则表示其为机遇步法。这样,在这个树上,分支终点的各点(即由此不再有分支的点称为树的**顶点**)表示博弈的终结。

我們根据博弈的树来看一下图 2.2 所表示的博弈。第一步法是机遇步法,在此处假定由指定的机遇装置得出的运是 b 。第二

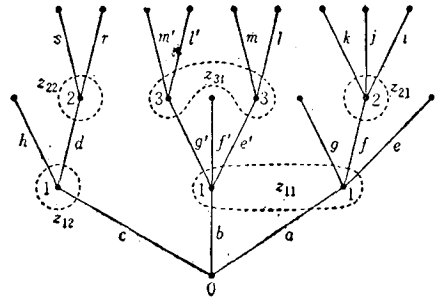


图 2.2

步法是局中人 1 的步法。若局中人选取 f' , 则局终结。若局中人 1 选取 e' , 则第三步法是局中人 3 的步法,在此,局中人 3 选取 l 或 m 而局终结。

这样,博弈的各局在博弈树上就表现为由最低的唯一的一个支点出发,经一些路线而到达各分支的顶点,而且这样的路线和博弈树的顶点是一一对应的。因此,博弈的可能的局的数目,就等于博弈树的顶点的数目。例如图 2.2 的树所表示的博弈,其局的总数是 13。

其次,各局中人在选择他的步法时,根据博弈的规则,对于以前局中的过程持有一定的信息。这信息也希望能在图上表示。我們看一下图 2.2,把相当于人的步法的支点全体的集合分成用点线围成的子集合 z_{11} , z_{12} , z_{21} , z_{22} 和 z_{31} 。这些子集合 z_{ij} 的全体用 Z 表示。例如支点集合 z_{11} 的意义是:局中人 1 知道第一步法取 a 或 b 时,第二步法是局中人 1 的步法,但是他所知道的也仅限于此,因为他不能知道第一步法到底取 a 还是取 b ,所以也不知道自己现在位于第二步法的哪一点上,也就是说,他还不能判断自己位于集合 z_{11} 所含两个支点中的哪一个上。但这时局中人 1 知道在此

步法上自己可选取的事项是 e, f 和 g 三个。在集合 z_{11} 的另一支点, 有用 e', f', g' 表示的可选取的分支, 作为选择事项来说, 规定 $e=e', f=f', g=g'$ 。这里对另一个选择事项标以“'”, 只是为了表示它是由不同的支点生出的。 z_{11} 含有两个支点, 如前所述, 在第二步法, 局中人 1 仅知道第一步法取 a 或 b , 但究竟取其中的哪一个是不知道的, 从而局中人 1 不能判断 e 和 e', f 和 f', g 和 g' 。也就是说, 他只知道现在或是位于分支 a 的终止支点, 要在 e, f, g 中进行选择, 或是位于分支 b 的终止支点, 要在 e', f', g' 中进行选择。支点集合 z_{12} 仅有一个支点, 这是说局中人 1 完全知道第一步法取 c , 第二步法是局中人 1 的步法, 并且同时表示位于这个步法的局中人 1 的可选择事项是 d 或 h 。其他集合 z_{ij} 所表示的意义也相同。

这样, 对应于人的步法的支点全体的集合所分成的子集合 z_{ij} , 可以表示博弈规则所给出的信息。这种集合 z_{ij} 称为**信息集合** (information set)。信息集合中所含的支点愈多, 信息愈少; 支点愈少, 信息愈多。例如信息集合 z_{21} 仅含有一个支点, 所以这时, 在此步法的局中人 2 完全知道第一步法取 a , 第二步法取 f , 现在自己是处于第三步法上, 且将从 i, j, k 中进行选择。也就是信息集合 z_{21} 表示了局中人 2 知道自己位于这个步法, 以及关于局的以前过程的完全信息。若某个博弈的所有信息集合都只有一个支点, 这种博弈特别地称为**完全信息博弈** (perfect-information game) (如象棋, 围棋等)。

博弈树中对应于人的步法支点全体的集合的任一分割 $Z = \{z_{ij}\}$, 要使其具有信息集合的性质, 必须满足一定的条件。我们要求的条件是: (1) 信息集合 z_{ij} 所含的各支点属于同一局中人 i 的步法; (2) 同一集合中各支点分出的分支数目相等; (3) 任何信息集合 z_{ij} 不能含有一个局的两个不同步法的支点, 也就是, 设 v_1

含于 z_{ij} 中, 若支点 v_2 可由 v_1 沿着博弈树的一条路线到达, 则 v_2 不含于 z_{ij} 中。(另外必须注意, 将博弈规则表现在树上的方法可以不止一种。)

最后考虑作为博弈构成的另一要素, 即各局结果所带来的局的成果。随着博弈规则的不同, 可能有各种不同的成果。例如财物的输赢, 或单纯决定胜负等等。博弈树的各顶点是局的可能终局点, 这些点指出了相应的博弈的局。一般, 以 t 表示这些博弈树的顶点。博弈规则还要求指出顶点集合 $\{t\}$ 与可能的成果集合 $\Omega = \{\omega\}$ 之间的一一对应关系, 用 $\omega(t)$ 表示。

这样, 我们可列出局中人数为 n 的博弈(称为 n 人博弈)的规则如下:

- (i) 表示出各步法到其他步法的连接关系的树。
- (ii) 相当于机遇集合的支点和相当于人的步法的支点, 以及后一集合的信息集合分割。
- (iii) 相当于机遇步法的支点 0 的所有可能运(即分支)的集合(表现在博弈树上), 以及其上的概率分布。
- (iv) 给出含于信息集合中各支点上的可能着(即分支)的集合(表现在博弈树上)。
- (v) 给出成果集合 Ω , 以及各局(即博弈树的各顶点 t)与 Ω 中元素对应的函数 $\omega(t)$ 。

§3 优 序

我们在前节叙述了博弈的规则可用博弈树来表示, 可是并未谈到博弈中局中人的作用。当然在提到人的步法是哪个局中人的步法时必须提出局中人来, 但没有涉及作为能使局进行的原动力, 即局中人的行动意图。只有明确了这个问题, 博弈才可以进行。事实上, 对于同一规则的博弈, 如果参加博弈的局中人的行动方针

不同,則竞争結果將有很大的差异。因此必須討論各局中人对于局的成果的擇优形式的問題。

設 Ω 是成果 ω 的集合, 机遇裝置使其中有限个元素 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 出現的概率为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ (在此 $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$)。或者將概率分布称为賭 (gamble), 用 F 或 $F = \sum p_i \omega_i$ 表示。特別給元素 ω 出現的概率为 1 的賭, 用 ω 表示。令 Ψ 为賭的全体的集合, 同时假定某个特定的主体对于 Ψ 的各元素的賭, 有滿足下面条件的优序关系 $\succeq$:

条件 (i) (a) 对任意的 $F_1, F_2 \in \Psi$,

$F_1 \succeq F_2$ 或者 $F_2 \succeq F_1$; (两者也可同时成立。)

(b) $F_1 \succeq F_2$ 且 $F_2 \succeq F_3$, 則 $F_1 \succeq F_3$ 。

此处关系 $F_1 \succeq F_2$ (或者写作 $F_2 \preceq F_1$) 或者表示选取的 F_1 比 F_2 好, 或者表示 F_1 和 F_2 沒有差別。若 $F_1 \succeq F_2$ 而不是 $F_2 \succeq F_1$, 則选取的 F_1 比 F_2 好, 用 $F_1 \succ F_2$ 表示。若 $F_1 \succeq F_2$ 且 $F_2 \succeq F_1$, 則 F_1 和 F_2 沒有差別, 用 $F_1 \sim F_2$ 表示之。

很明显下面的各关系 (1) 至 (3) 是成立的:

(1) 关系“ $\sim$ ”是等价关系。

(2) 对任意的 $F_1, F_2 \in \Psi$, 关系 $F_1 \succ F_2, F_2 \succ F_1$ 或 $F_1 \sim F_2$ 中必有一个成立。

(3) 若 $F_1 \succ F_2$ 且 $F_2 \succeq F_3$, 則 $F_1 \succ F_3$ 。

有限个賭 F_j ($j=1, 2, \dots, k$), 可以按下面的意义組合起来:
設

$$F_j = \sum_i p_{ij} \omega_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, k),$$

σ_j ($j=1, \dots, k$) 是滿足 $\sigma_j \geq 0, \sum \sigma_j = 1$ 的任意实数。 F_j ($j=1, \dots, k$) 的組合用 $\sum \sigma_j F_j$ 表示, 用下式 (3.1) 定义所給的賭:

$$\sum_j \sigma_j F_j = \sum_i \sum_j (\sigma_j p_{ij}) \omega_{ij}. \quad (3.1)$$

由 $\omega_{ij} \in \Omega$, $\sigma_i p_{ij} \geq 0$, $\sum_i \sum_j (\sigma_i p_{ij}) = 1$, 容易看出它是賭。

联系着賭的組合, 假定下面条件:

条件(ii) 設 $F, G, H \in \mathcal{P}$, $0 < \rho \leq 1$, 若 $F \preceq G$, 則

$$\rho F + (1-\rho)H \preceq \rho G + (1-\rho)H \quad (3.2)$$

(在此 $\preceq$ 表示, 若 $F < G$, 則 (3.2) 也是 $<$, 若 $F \sim G$, 則 (3.2) 也是 $\sim$)。

条件(iii) 对于 $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{P}$, 若 $F_1 < F_2 < F_3$, 則存在 $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$ 的实数 λ, μ , 满足下面条件:

$$\lambda F_1 + (1-\lambda)F_3 < F_2, \quad (3.3)$$

$$\mu F_1 + (1-\mu)F_3 > F_2. \quad (3.4)$$

关于賭的优序关系在以上条件(i)至(iii)的假定下, 得出下面的諸結果。

定理 3.1 若 $F \sim F'$, $G \sim G'$, 則对于任意实数 ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, 下面关系成立:

$$\rho F + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G'. \quad (3.5)$$

証明 由条件(ii),

$$\rho F + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G,$$

且

$$\rho F' + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G'.$$

所以由关系(1)推知(3.5)成立。

証毕

定理 3.2 若 $F < G$ 且 $0 \leq \sigma < \rho \leq 1$, 則

$$\rho F + (1-\rho)G < \sigma F + (1-\sigma)G. \quad (3.6)$$

証明 如果 $\sigma \neq 0$, $\rho \neq 1$, 則可作如下的变换:

$$\begin{aligned} \rho F + (1-\rho)G &= (\rho - \sigma)F \\ &\quad + \{1 - (\rho - \sigma)\} \left\{ \frac{\sigma}{1 - (\rho - \sigma)} F + \frac{1 - \rho}{1 - (\rho - \sigma)} G \right\}, \\ \sigma F + (1-\sigma)G &= (\rho - \sigma)G \\ &\quad + \{1 - (\rho - \sigma)\} \left\{ \frac{\sigma}{1 - (\rho - \sigma)} F + \frac{1 - \rho}{1 - (\rho - \sigma)} G \right\}. \end{aligned}$$

因此由条件(ii)推知(3.6)成立。而当 $\sigma=0$ 且 $\rho=1$ 时, (3.6) 显然成立。

証毕

定理 3.3 若 $F_1 < F_2$ 且 $F_1 < G < F_2$, 则存在唯一的实数 ρ , $0 < \rho < 1$, 使

$$\rho F_1 + (1-\rho) F_2 \sim G. \quad (3.7)$$

証明 由定理 3.2 和实数的性质, 存在唯一的实数 ρ_0 , 满足下面条件:

$$\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2 < G, \text{ 当 } 1 \geq \lambda > \rho_0 \text{ 时}, \quad (3.8)$$

$$\mu F_1 + (1-\mu) F_2 > G, \text{ 当 } 0 \leq \mu < \rho_0 \text{ 时}. \quad (3.9)$$

所以若存在使(3.7)成立的实数 ρ , 那么这个数非是 ρ_0 不可。现在証明

$$H \equiv \rho_0 F_1 + (1-\rho_0) F_2 \sim G. \quad (3.10)$$

若(3.10)不成立, 则 $H < G$ 或 $H > G$ 。现设 $H < G$, 那末取 $0 < \mu < \rho_0$ 的任意实数 μ , 由(3.9),

$$K \equiv \mu F_1 + (1-\mu) F_2 > G. \quad (3.11)$$

所以 $H < G < K$, 由条件(iii), 存在实数 λ , $0 < \lambda < 1$, 使

$$\lambda H + (1-\lambda) K < G,$$

即

$$[\lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda)] F_1 + \{1 - [\lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda)]\} F_2 < G. \quad (3.12)$$

但 $0 < \lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda) < \rho_0$, 因而(3.12)的成立和 ρ_0 的性质(3.9)相矛盾, 故不可能是 $H < G$ 。同样也可証明不可能是 $H > G$ 。从而(3.10)成立。

証毕

§4 效用函数

本节探讨在第3节中所述的赌的优序关系如何用数的大小表示的问题。

定义 4.1 所谓某主体的**效用**(utility)(或**效用函数**) U , 是定

又在成果集合 $\Omega = \{\omega\}$ 上的有界实函数, 对于任意的两个赌 $F_1 = \sum p_{1i}\omega_{1i}$ 和 $F_2 = \sum p_{2j}\omega_{2j}$, 关系 $F_1 \preceq F_2$ 与

$$\sum_i \rho_{1i} U(\omega_{1i}) \leq \sum_j \rho_{2j} U(\omega_{2j}) \quad (4.1)$$

等价。

对于任意的赌 $F = \sum p_i \omega_i$, 数值 $\sum p_i U(\omega_i)$ 称为 F 的**期望效用**(expected utility), 或者简称为赌 F 的效用, 用 $U(F)$ 表示。所以(4.1)的条件可写为 $U(F_1) \leq U(F_2)$ 。

问题在于这样性质的效用函数 U 是否存在, 如果存在的话又有多少个, 以及它们之间成立怎样的关系。为了证明存在定理的方便, 按照下面的顺序进行思考。首先, 明显地成立着下面的定理:

定理 4.1 设 Ω 上的效用函数 U 存在, 并设 α, β 为任意实数。对于 $\alpha > 0$, 函数

$$U' = \alpha U + \beta \quad (4.2)$$

也是效用函数。(这个效用函数 U' 称为效用函数 U 用正一次变换所得的效用函数。)

由定理 4.1 可直接推出下面的系:

系 4.1 当效用函数存在, 若 F, G 是两个赌, 且 $F \prec G$, 则对于任意两个实数 a, b ($a < b$), 存在效用函数 U , 使得

$$U(F) = a, \quad U(G) = b.$$

定理 4.1 是说效用的任意增线性函数仍是效用。下面定理 4.2 是说它的逆定理也成立, 即任意的两个效用函数, 互为增线性函数, 亦即一个是另一个的正一次变换。

定理 4.2 设 U 和 U' 是 Ω 上的两个效用函数, 则存在两个实数 α, β , 且 $\alpha > 0$, 使

$$U' = \alpha U + \beta. \quad (4.3)$$

证明 首先证明对于任意的三个成果 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$, 下面的恒等式(4.4)成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U(\omega_1) & U(\omega_2) & U(\omega_3) \\ U'(\omega_1) & U'(\omega_2) & U'(\omega_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

若成果 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 中有任意两个相等, 则(4.4)左边的行列式有二列相等, 从而(4.4)成立。如果不是这样, 不失一般性, 假定 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, 则由定理 3.3 可知, 存在着实数 $\rho, 0 < \rho < 1$, 使

$$\rho\omega_1 + (1-\rho)\omega_3 \sim \omega_2.$$

由此, 根据效用函数的定义,

$$\begin{aligned} 1 &= \rho \cdot 1 + (1-\rho) \cdot 1, \\ U(\omega_2) &= \rho U(\omega_1) + (1-\rho)U(\omega_3), \\ U'(\omega_2) &= \rho U'(\omega_1) + (1-\rho)U'(\omega_3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

从而(4.4)左边行列式的第 2 列是第 1 列与第 3 列的线性组合, 所以(4.4)成立。

现在将 ω_1, ω_2 看作是任意的固定的 $\omega_1 < \omega_2$ 的成果, 对任意的成果 $\omega_3 \in \Omega$, 展开等式(4.4), 可得下面的等式:

$$\begin{aligned} [U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)] - U(\omega_3)[U'(\omega_2) \\ - U'(\omega_1)] + U'(\omega_3)[U(\omega_2) - U(\omega_1)] = 0, \end{aligned}$$

因此关系式

$$\begin{aligned} U'(\omega_3) &= \frac{U'(\omega_2) - U'(\omega_1)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} U(\omega_3) \\ &\quad - \frac{U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

对任意的 $\omega_3 \in \Omega$ 都成立, 同时(4.6)右边 $U(\omega_3)$ 的系数的分子分母都是正的, 所以定理得证。 証毕

由定理 4.2 可直接得出下面的系。

系 4.2 若 Ω 上的二个效用函数 U 及 U' , 对 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 < \omega_2$, 有

$$U(\omega_1) = U'(\omega_1) \text{ 且 } U(\omega_2) = U'(\omega_2),$$