SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学
自习与辅导

初中几何
（第二册）

曹根福 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

初中几何

（第二册）

曹根福 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

初 中 几 何

(第 二 册)

曹根福 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 87,000

1985 年 5 月第 1 版 1985 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—360,000

统一书号:13119·1222 定价:0.61 元

前　言

本书是配合现行初三年级学习几何的自习参考读物，内容包括相似形与圆两部分．本书不重复教材中的内容，而是通过“学习指导与例题”来揭示课本内容的涵义，帮助读者加深理解，并通过例题讲清解题的常用方法．

“基本练习题”是为了帮助读者理解和消化课本内容，并通过一定数量的练习使之较熟练掌握基本思考方法．“自我检查题”是让读者自己验证对基础知识的掌握水平．“单元综合练习题”目的是使读者对本章主要知识得到进一步巩固和提高．“总复习题”是初中几何的系统复习练习，目的是提高读者分析问题与解决问题的能力．

在编写中，为引起读者注意，对一些有一定难度的练习题作了提示；对有特种意义的例题、习题作了说明；对一些综合性的问题提出了进一步的思考要求．

限于编者水平，对本书的缺点和错误恳切希望读者批评指正．

本书由李大元同志负责审稿，并提出了不少修改意见，在此致谢！

作　者　1983年1月

目　　录

前言
第一章　相似形……………………………………………… 1
一、成比例的线段…………………………………………… 1
二、相似形……………………………………………………12
三、位似图形…………………………………………………28
四、综合练习题………………………………………………33
第二章　圆……………………………………………………36
一、圆的基本性质……………………………………………36
二、直线与圆的位置关系……………………………………49
三、圆与圆的位置关系………………………………………59
四、正多边形和圆……………………………………………67
五、点的轨迹…………………………………………………72
六、综合练习题………………………………………………81
总复习题………………………………………………………93
答案与提示……………………………………………………102

第一章 相 似 形

本章内容分为两部分：成比例的线段；相似形.

成比例线段是学习相似形的准备. 对这部分知识，我们一定要掌握好，特别要重视比例线段的各种灵活变换.

相似形中最简单的是相似三角形. 相似三角形的判定、性质是研究相似多边形的基础，因为多边形可以分解成若干个三角形，通过三角形相似就可以研究多边形相似. 所以，相似三角形是这章内容的重点.

一、成比例的线段

本节内容主要有线段的度量、成比例线段及比例的性质，这些内容是解决相似形有关习题的不可缺少的工具.

学习指导与例题

线段的长度与线段的量数是相近而又完全不同的两个概念. 它们之间有以下两点主要区别：

线段的长度是一定的，不因长度单位不同而有所改变；线段的长度是名数.

线段的量数是随着不同的单位而改变；量数是不名

数.

两条线段的比是两条以同一长度单位度量的线段的量数的比，即线段的比是数的比，这就是说，两条线段的比与所用度量单位无关. 对线段 a、b 来说，若 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{2}{3}$ 是线段 a、b 的比值，不能错认为 $a=2$，$b=3$.

线段是形的基本概念，量数是数的基本概念. 几何图形的相似性，通过数的运算来解决. 这是研究几何图形的一种形数结合的方法.

比例的性质由一条基本定理推出.

比例的基本定理可简述为

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

即等比式等价于等积式，反之亦然. 这条性质在实际解题中还有以下几点要掌握：等积式 $ad=bc$ 推等比式不是唯一的，从 $ad=bc$ 可得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$. 这些比例式中任意挑选一个，可以根据反比、更比定理推得其余三个. 因 $ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，故证明四条线段成比例，可改为证明四条线段组成的相应等积式；三角形、平行四边形的面积可看作两条特定线段的乘积，由此从面积相等，可以转化成比例式，这是证明线段成比例的一种方法.

关于合比、分比、合分比定理，不仅要熟悉基本比例式，还要根据反比、更比定理掌握基本比例式的各种变形，从而在实际证题中，可根据结论有目的地进行比例变换. 如在 $\frac{a}{b}\neq 1$ 的前提下，

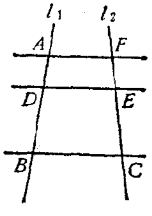
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}\\ \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}\\ \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}\end{cases}\xrightarrow[\longleftarrow]{\text{更比、反比定理}}\begin{cases}\dfrac{b}{a\pm b}=\dfrac{d}{c\pm d}\\ \dfrac{a\pm b}{c\pm d}=\dfrac{b}{d}\\ \dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}\end{cases}$$

在证题中要注意上面逆向"$\Leftarrow$"推理的应用.

等比定理"$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}\ (b+d+\cdots+n\neq 0)\Rightarrow \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$"的结论，也可换成$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{c}{d}$，即$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}$可等于等比式中的任意一个比.

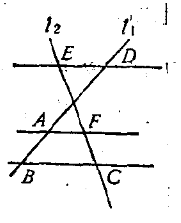
等比定理证明方法是设等比的值为k，然后通过运算证明$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}$也等于$k$. 这是比例式证明中常用方法之一.

平行线分线段成比例定理是平行线等分线段定理的推广. 它有两种情况:



$AF\parallel BC\parallel DE$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{FE}{EC}\\ \dfrac{AD}{FE}=\dfrac{DB}{EC}\end{matrix}$$



$DE\parallel AF\parallel BC$

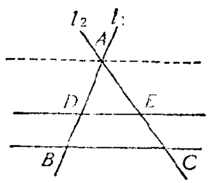
$$\Rightarrow\begin{matrix}\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{EF}{FC}\\ \dfrac{DA}{EF}=\dfrac{AB}{FC}\end{matrix}$$

上述比例式一定要熟练掌握，尤其是在第二种情况中比

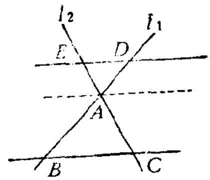
例式不要写错．进一步还要掌握应用比例性质，经变换后可能得到的各种比例式．例如，在第一种情况，还有 $\frac{AB}{DB}=\frac{FC}{EC}$，$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{FC}$，$\frac{AD}{AB}=\frac{FE}{FC}$ 等．

当 $\frac{AD}{DB}=\frac{FE}{EC}=1$ 时，定理就是平行线等分线段定理．

在上述两图中，当 A 与 F 重合(或者说 AF 通过 l_1、l_2 的交点)时，得到两个特例：



$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$



$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

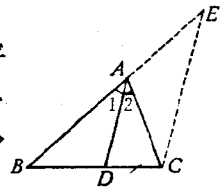
这实际上即是平行线分线段成比例定理的推论．

上面推论的逆定理是说"$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$"．它的证明方法是采用间接证法——同一法．同一法证题的具体步骤如下：(1) 作出符合所证命题结论的图形；(2) 证明所作的图形符合已知条件；(3) 根据图形的唯一性，确定所作图形与已知图形同一；(4) 判定命题为真．

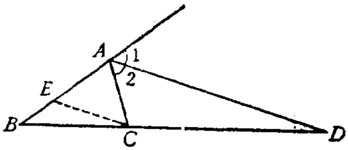
推论的逆定理指出，线段成比例可推出两直线平行．这为我们证明两直线平行添加了一个重要手段．

除平行线分线段成比例外，还有三角形内角平分线分对边所得的两条线段和这个角两边对应成比例，这就是三角形内角平分线性质定理．它的证明是这样的：如图，在 $\triangle ABC$

中，$\angle 1=\angle 2$，$CE \parallel AD \Rightarrow AE=AC$，$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

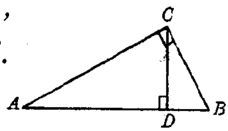


用同样的方法，可证得三角形外角平分线的性质定理："$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 外角平分线 AD 交 BC 的延长线于点 $D \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$". 请读者自己完成证明.



三角形内外角平分线性质定理的逆命题都成立(参见例 8). 三角形内外角平分线性质定理及其逆定理在证明中应用甚广.

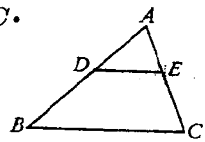
例 1 已知：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=1$，$\angle ACB=90°$，$CD \perp AB$.



求：$\frac{CD}{AB}$ 的值.

解：$\because$ $\angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=1$，$CD \perp AB$，$\therefore$ $CD \cdot AB=2S_{\triangle ABC}=AC \cdot BC=2$，而 $AB^2=AC^2+CB^2=5$，

$\therefore$ $\frac{CD}{AB}=\frac{2}{AB^2}=\frac{2}{5}$.



例 2 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，D 点在 AB 上，E 在 AC 上. 且 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

求证：(1) $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$；(2) $\frac{AB+AC}{AB-AC}=\frac{AD+AE}{AD-AE}$.

证明：(1) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB-AD}{AD}=$

$$\frac{AC-AE}{AE}\Rightarrow\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}.$$

(2) $\because$ $AB>AC$, 故由合分比定理，要证

$$\frac{AB+AC}{AB-AC}=\frac{AD+AE}{AD-AE},\ \text{只要证}\quad\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}.$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}.$$

$\therefore$ 本题得证.

【说明】 在有关线段成比例的证明题中，要熟悉比例的性质及根据性质进行比例式的各种变换. 在变换比例式时，要根据图形、题设、结论的要求，通过分析从"已知"逐步推向结论，避免盲目变换.

例 3 已知：$x\neq0$，且 $x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$.

求：$\dfrac{x+2y-5z}{x-2y+5z}$ 的值.

解： $\because$ $x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$，即 $\dfrac{x}{\frac{1}{5}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z}{\frac{1}{4}}$，

又 $\because x\neq0$，$\therefore$ 可设 $\dfrac{x}{\frac{1}{5}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z}{\frac{1}{4}}=k(k\neq0)$，

于是 $x=\frac{1}{5}k$，$y=\frac{2}{3}k$，$z=\frac{1}{4}k$，

$$\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}=\frac{\frac{1}{5}k+\frac{4}{3}k-\frac{5}{4}k}{\frac{1}{5}k-\frac{4}{3}k+\frac{5}{4}k}=\frac{12+80-75}{12-80+75}=\frac{17}{7}.$$

例 4 已知：$a:b:c=3:5:7$，且 $b+c-a=27$.

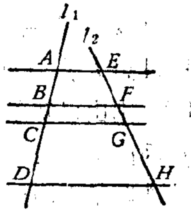
求：a、b、c 的值.

解： $\because$ $a:b:c=3:5:7$，$\therefore$ 可设 $a=3k$，$b=5k$，$c=7k$. 又 $\because$ $b+c-a=27$，$\therefore$ $5k+7k-3k=27$，$k=3$. 由

此得

$$a=9,\ b=15,\ c=21.$$

【说明】 如果命题条件中有连比式，设比例常数为k往往是有效的．例3中，k在最后求比值时被约去；例4中，据关系式$b+c-a=27$解出k的值，再求a、b、c.



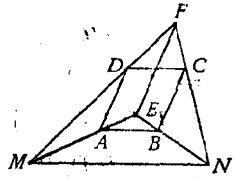
例5 已知：如图，直线l_1、l_2与直线AE、BF、CG、DH都相交，且$AE\parallel BF\parallel CG\parallel DH$，$\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{2}{3}$.

求：$CD:GH$的值.

解：$AE\parallel BF\parallel CG\parallel DH\Rightarrow\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{BC}{FG}=\dfrac{CD}{GH}$.

$\because\ \dfrac{AB}{EF}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore\ \dfrac{CD}{GH}=\dfrac{2}{3}$.

若例5的条件不变，你能求$AC:EG$和$BD:FH$的值吗？请试一试.



例6 已知：如图，$CD\parallel AB\parallel MN$，且$EF\parallel BC$.

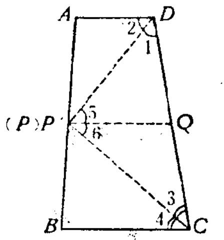
求证：$AD\parallel EF$.

分析：要证$AD\parallel EF$，只要证$\dfrac{FD}{DM}=\dfrac{EA}{AM}$. 这可由已知的两组平行线及平行线分线段成比例定理的推论推出.

证明：

$$\left.\begin{array}{l}DC\parallel MN\Rightarrow\dfrac{FD}{DM}=\dfrac{FC}{CN}\\[2mm] AB\parallel MN\Rightarrow\dfrac{EA}{AM}=\dfrac{EB}{BN}\\[2mm] EF\parallel BC\Rightarrow\dfrac{EB}{BN}=\dfrac{FC}{CN}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{FD}{DM}=\dfrac{EA}{AM}\Rightarrow AD\parallel EF.$$

例 7 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD+BC=CD$，且 $\angle D$、$\angle C$ 的平分线交于 P 点.



求证：点 P 在腰 AB 上.

分析：直接证明 P 点在 AB 上有困难. 设想 P 点在 AB 上，过 P 作 $PQ /\!/ AD$，则由已知条件推知 Q 是 CD 的中点，因而 P 也必是 AB 的中点. 由于中点及角平分线的唯一性，本题采用同一法证明.

证明：(1) 取 AB 的中点 P'，连 $P'D$、$P'C$.

(2) 设 CD 的中点为 Q，连 $P'Q$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P'Q=\frac{1}{2}(AD+BC)\\ CD=AD+BC\end{array}\right\}\Rightarrow P'Q=DQ=CQ\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow\angle 1=\angle 5,\ \angle 3=\angle 6\\ \qquad P'Q /\!/ AD /\!/ BC\Rightarrow\angle 2=\angle 5,\ \angle 4=\angle 6\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$

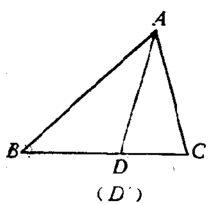
$\Rightarrow P'D$、$P'C$ 分别平分 $\angle D$、$\angle C$.

(3) 故 $P'D$、$P'C$ 分别与 PD、PC 重合 $\Rightarrow P'$ 与 P 重合.

(4) $\therefore$ P 点在 AB 上.

【说明】 证明中的(1)、(2)、(3)、(4) 即是前述的同一法证题的四个步骤. 请自己用同一法证明："等腰三角形底边上的高是顶角平分线".

例 8 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，D 在 BC 边上，且 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.



求证：AD 平分 $\angle BAC$.

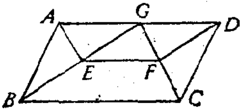
证明：作 $\angle BAC$ 的平分线 AD'.

$$\left.\begin{aligned}\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}\\ \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}$$

$\Rightarrow D'C=DC\Rightarrow D'$ 与 D 重合 $\Rightarrow AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线.

【说明】 本例即是内角平分线性质定理的逆命题，以后可作定理用.它也是用同一法证明的.

例 9 已知：如图，$\square ABCD$ 中，G 是 AD 的中点，$\angle BAG$ 平分线交 BG 于 E，$\angle CDG$ 平分线交 CG 于 F，连 EF.



求证：$EF\parallel BC$.

证明：

$$\left.\begin{aligned}AE\text{平分}\angle BAG\Rightarrow\frac{GA}{AB}=\frac{GE}{EB}\\ DF\text{平分}\angle CDG\Rightarrow\frac{GD}{DC}=\frac{GF}{FC}\\ \square ABCD\Rightarrow AB=CD\\ G\text{为}AD\text{中点}\Rightarrow AG=GD\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{GE}{EB}=\frac{GF}{FC}\Rightarrow EF\parallel BC.$$

【说明】 若将本例的条件与结论调整如下：已知 $\square ABCD$ 中，G 为 AB 的中点，$\angle BAG$ 的平分线交 BG 于 E，点 F 在 CG 上，且 $EF\parallel BC$，求证 DF 平分 $\angle CDG$. 你能证明其结果正确吗？

基本练习题

1. 设线段 l 为长度单位，在下列各种情况下，求线段 a 和 b 的比：

(1) a 含有 l 的 6 倍，b 含有 l 的 0.5 倍；

(2) a 含有 l 的 4.8 倍，b 含有 l 的 28.4 倍；

(3) a 含有 l 的 $3\sqrt{3}$ 倍，b 含有 l 的 $9\sqrt{2}$ 倍；

(4) l 含有 a 的 2 倍，l 含有 b 的 3 倍.

2. 已知：$(\sqrt{3}+\sqrt{2})a=(\sqrt{3}-\sqrt{2})b$，求下列各式比值：

(1) $\dfrac{a+b}{b}$；　(2) $\dfrac{b-a}{a}$；　(3) $\dfrac{b+a}{b-a}$.

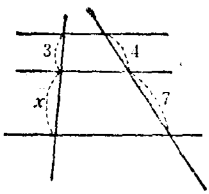
3. 已知：点 K 分线段 AB 的比为 $m:n$（即 $AK:KB=m:n$），(1) 求 $AB:AK$；(2) 求 $AB:KB$；(3) 当 $AB=72$ cm，$m:n=5:3$ 时，求 AK、KB 的长.

4. 已知：K 是 AB 延长线上一点，且使 $AK:KB=5:3$，(1) 求 $AK:AB$；(2) 当 $AB=141$ 时，求 AK、KB 的长.

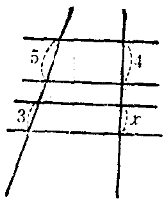
5. 用同一长度单位度量 a、b、c、d 四条线段所得的量数分别为 $2\sqrt{3}$、$2\sqrt{2}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，试判断这四条线段是否成比例.

6. 已知线段 $a=30$ cm，$b=6$ 尺，$c=15$ 寸，$d=36$ 寸，判断这四条线段是否成比例.

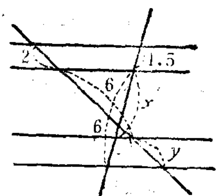
7. 下图中，两条直线被若干条平行线相截，求图中 x、y 的长度：



①



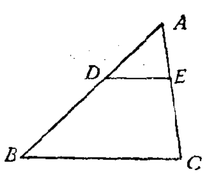
②



③

$x=$____；　$x=$____；　$x=$____；$y=$____.

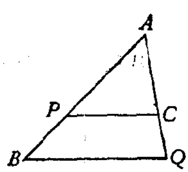
8. 下图中，设 $DE\parallel BC$，$AB=15$，$AC=10$，$DE=5$，$AE=4$. 求 AD、BC 的长度.



第 8 题

$AD=$__；

$BC=$__.



第 9 题

9. 已知：如图，$\frac{AP}{PB}=\frac{2}{1}$，$\frac{AQ}{CQ}=\frac{3}{1}$。

求证：$PC \parallel BQ$.

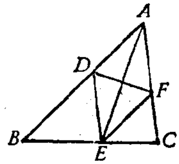
10. 在$\triangle ABC$中，AD为$\angle A$的平分线，

(1) 设$AB=12$，$AC=8$，$BC=10$，求BD和DC；

(2) 设$BD:DC=3:2$，$AB+AC=25$，求AB和AC；

(3) 设$AB:AC=3:2$，$BD-DC=3$，求BC.

11. 已知：如图，菱形$ADEF$的顶点D、E、F分别在$\triangle ABC$的边AB、BC、CA上，且$AB=14$ cm，$BC=12$ cm，$AC=10$ cm．求BE和EC的长.



第11题

12. 已知：在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\angle B$，$\angle C$的平分线BE、CF相交于O，AO的延长线交BC于D．求：$AO:OD$.

13. 已知：线段a、b、c，求作线段x，使

(1) $\frac{2a}{b}=\frac{c}{x}$；(2) $\frac{b}{a}=\frac{x}{b}$；(3) $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$.

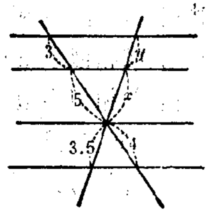
自我检查题

1. 解下列各题：

(1) 已知a、b、c、d四线段成比例，$a=2$ cm，$b=2\sqrt{2}$ cm，$c=5\sqrt{6}$ cm，求c、b、a的第四比例项d.

(2) 已知线段a、b、c、d满足$a:b:c:d=2:3:5:7$，求$\frac{a+b+c+d}{b+c}$及$\frac{c+a+d}{d-a+b}$的值.

(3) 已知线段d是线段a、b、c的第四比例项，求证线段a、d的比例中项等于b、c的比例中项.



(4) 已知线段x、y，满足$(x^2+y^2):xy=13:6$，求$x:y$.

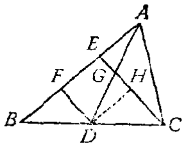
2. 如图，二直线被四条平行线相截，则$x=$____；$y=$____.

3. 已知：如图，$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，$AE=EF=$

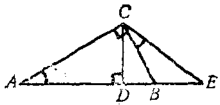
FB, CE 交 AD 于 G. 求: $FD:GO$.

[提示] 过 D 作 $DH\parallel AB$.

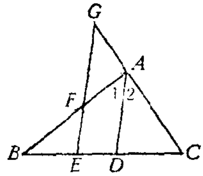
4. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 延长 AB 到 E, 使 $\angle A=\angle BCE$, $CD\perp AB$, $CD=3$ cm, $DE=4$ cm. 求: $DB:BE$.



第 3 题



第 4 题



第 5 题

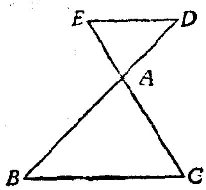
5. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle 1=\angle 2$, $GE\parallel AD$. 求证. $BE:CE=BF:CG$.

二、相 似 形

本节内容从定义相似多边形开始, 重点研究相似三角形, 然后通过三角形的相似, 再研究多边形的相似.

学习指导与例题

相似多边形的定义简要的讲, 可归纳为三点: 边数相同; 对应角相等; 对应边成比例. 相似多边形对应边的比称为相似比(或相似系数). 相似比 k 的大小反映着两个相似多边形大小的差异, 当 $k=1$ 时, 相似多边形成为全等多边形.



相似三角形判定定理的预备定理, 本身就是判定三角形相似的重要定理之一.

如左图, 若直线 ED 和 $\triangle ABC$ 的一边 BC 平行, 并与