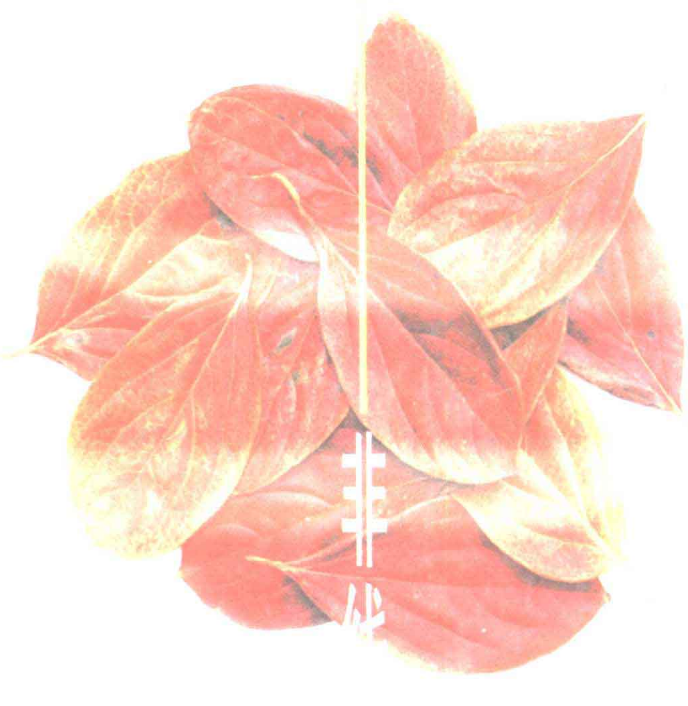
郭大钧　著



非线性分析中的半序方法

郭大钧 著

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路 16 号 邮编 250002）

山东科学技术出版社发行

（济南市玉函路 16 号 电话 2064651）

山东人民印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 1/16 开本 16.25 印张 365 千字

2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—1000

ISBN 7—5331—2555—X

O·74 定价 26.00 元

图书在版编目(CIP)数据

非线性分析中的半序方法/郭大钧著. - 济南：山东科学技术出版社，2000.3
ISBN 7-5331-2555-X

Ⅰ. 非… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 非线性-泛函分析-编序
Ⅳ. O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 60751 号

著者的话

各种各样的非线性问题已日益引起人们的广泛重视. 非线性分析已成为现代数学中的重要研究方向之一. 常用的研究非线性问题的方法(例如拓扑方法, 变分方法等)大都要求问题本身具有连续性和紧性. 但是, 目前在理论上和应用中出现的大量非线性问题是缺乏紧性或缺乏连续性的. 例如, 无穷维空间中的微分方程和积分方程、无界域上的各种方程大都不具有紧性, 而与脉冲、突变、断裂等问题相联系的方程大都不具有连续性. 自 80 年代初以来, 我和我的学生孙经先、杜一宏、孙勇、周德堂、刘兆理等诸位博士利用半序方法来研究缺乏紧性或缺乏连续性的非线性问题, 获得了一系列的新结果, 主要有:(一) 在完全不考虑紧性条件的情况下, 仅使用有关序的某种不等式, 获得了增算子、减算子以及混合单调算子不动点的存在唯一性以及迭代序列的收敛性, 并应用于无界区域上的非线性积分方程. (二) 在完全不考虑连续性条件的情况下, 仅使用很弱的弱紧性条件, 获得了关于增算子的若干新的不动点定理, 并应用于右端具有间断项的非线性微分方程. (三) 将半序方法系统地应用于 Banach 空间非线性积分—微分方程(包括脉冲型方程). 正是由于这些成果, 我们的研究项目《非线性分析中的半序方法》获 1993 年国家教委科技进步二等奖. 现以我们自己的工作为主, 加上若干国外数学家在这方面所获得的结果, 写成这本书. 本书可作为综合性大学和高等师范院校有关专业的研究生教材, 也可供有关教师和科技工作者进行科研时参考.

本书在写作过程中, 得到国家自然科学基金和国家教委博士点专项科研基金的资助, 特致谢意.

限于作者水平, 书中不妥、错误之处在所难免, 敬请读者指正.

郭大钧

1997 年 8 月于山东大学南院

目　录

第一章 预备知识

本章属于预备知识，介绍后面要用到的一些基本概念和结论，包括中值定理、非紧性测度、严格集压缩映像的不动点、Zorn 引理以及凸集分离定理等. 在本章中，E 恒表某实 Banach 空间，θ 表 E 的零元，R_+ 表一切非负实数所成的集.

1.1 中值定理

记 $J=[a, b]$，是一有限闭区间.

定理 1.1.1(中值定理) 设 $x\in C[J, E]$，且除去至多可数集 $\Gamma\subset[a, b]$外，当 $t\in[a, b]\setminus\Gamma$时，$x(t)$右可微(即右导数 $x'_+(t)$存在)，则

$$x(b)-x(a)\in(b-a)\overline{\mathrm{co}}\{x'_+(t): t\in[a, b]\setminus\Gamma\}. \qquad (1.1.1)$$

证 记 $\Gamma=\{p_k: k=1, 2, 3, \cdots\}$，$D=\{x'_+(t): t\in[a, b]\setminus\Gamma\}$. 任给 $\varepsilon>0$，令 $T=\{t\in[a, b]: d(x(t)-x(a), (t-a)\mathrm{co}D)\leqslant(t-a)\varepsilon+\varepsilon\sum\limits_{p_k<t}2^{-k}\}$，其中$d(\cdot,\cdot)$表点到集的距离. 显然，$a\in T$，故 T 不空. 令 $\lambda=\sup T$. 下证 $\lambda\in T$，事实上，设 $t_n\in T$，$t_n\to\lambda(t_n\leqslant\lambda)$. 于是，存在 $\xi_n\in\mathrm{co}D$ 使

$$\begin{aligned}\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\| &< (t_n-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t_n}2^{-k}+\frac{1}{n}\\ &\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}\qquad(n=1, 2, 3, \cdots)\end{aligned}\qquad (1.1.2)$$

由此，注意到$\{\|x(t_n)\|\}$的有界性，即知存在常数 $M>0$ 使

$$\|\xi_n\|\leqslant M\qquad(n=1, 2, 3, \cdots). \qquad (1.1.3)$$

由(1.1.2)式和(1.1.3)式，知

$$\begin{aligned}&d(x(\lambda)-x(a), (\lambda-a)\mathrm{co}D)\leqslant\|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi_n\|\\ &\leqslant\|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n\|+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+(\lambda-t_n)\|\xi_n\|\\ &<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}+\|x(\lambda)-x(t_n)\|+M(\lambda-t_n)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad(n=1, 2, 3, \cdots).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$取极限，得

$$d(x(\lambda)-x(a), (\lambda-a)\mathrm{co}D)\leqslant(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}, \qquad (1.1.4)$$

故 $\lambda\in T$. 再证 $\lambda=b$. 若不然，$\lambda<b$. 如果 $\lambda\in\Gamma$，则 $\lambda=p_m$(对某个 m). 由(1.1.4)式，可取 $\xi\in\mathrm{co}D$ 使

$$\| x(\lambda) - x(a) - (\lambda - a)\xi \| < (\lambda - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda} 2^{-k} + \frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

再取 $\delta > 0$，使 $\lambda + \delta < b$ 且

$$\| x(\lambda + \delta) - x(\lambda) \| < \frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}, \qquad \delta \| \xi \| < \frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned} & d(x(\lambda + \delta) - x(a), (\lambda + \delta - a)\mathrm{co}D) \leqslant \| x(\lambda + \delta) - x(a) - (\lambda + \delta - a)\xi \| \\ & \leqslant \| x(\lambda) - x(a) - (\lambda - a)\xi \| + \| x(\lambda + \delta) - x(\lambda) \| + \delta \| \xi \| \\ & < (\lambda - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda} 2^{-k} + \varepsilon 2^{-m} < (\lambda + \delta - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda + \delta} 2^{-k}, \end{aligned}$$

从而 $\lambda + \delta \in T$，此与 $\lambda = \sup T$ 矛盾．若 $\lambda \notin \Gamma$，则 $x'_+(\lambda)$存在，且 $x'_+(\lambda) \in \mathrm{co}D$．取 $\delta > 0$使 $\lambda + \delta < b$ 且

$$\| x(\lambda + \delta) - x(\lambda) - \delta x'_+(\lambda) \| < \frac{\varepsilon\delta}{2}. \tag{1.1.5}$$

由(1.1.4)式，可取 $\xi \in \mathrm{co}D$ 使

$$\| x(\lambda) - x(a) - (\lambda - a)\xi \| < (\lambda - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda} 2^{-k} + \frac{\varepsilon\delta}{2}. \tag{1.1.6}$$

于是，根据(1.1.5)式和(1.1.6)式，得

$$\begin{aligned} & d(x(\lambda + \delta) - x(a), (\lambda + \delta - a)\mathrm{co}D) \\ & \leqslant \left\| x(\lambda + \delta) - x(a) - (\lambda + \delta - a)\left(\frac{\delta}{\lambda + \delta - a} x'_+(\lambda) + \frac{\lambda - a}{\lambda + \delta - a}\xi\right) \right\| \\ & = \| x(\lambda + \delta) - x(a) - \delta x'_+(\lambda) - (\lambda - a)\xi \| \\ & \leqslant \| x(\lambda + \delta) - x(\lambda) - \delta x'_+(\lambda) \| + \| x(\lambda) - x(a) - (\lambda - a)\xi \| \\ & < \frac{\varepsilon\delta}{2} + (\lambda - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda} 2^{-k} + \frac{\varepsilon\delta}{2} \leqslant (\lambda + \delta - a)\varepsilon + \varepsilon \sum_{p_k < \lambda + \delta} 2^{-k}, \end{aligned}$$

故 $\lambda + \delta \in T$，也与 $\lambda = \sup T$ 矛盾．由此可知，$\lambda = b$．于是

$$d(x(b) - x(a), (b - a)\mathrm{co}D) \leqslant (b - a)\varepsilon + \varepsilon.$$

再注意到 $\varepsilon > 0$ 的任意性，即得(1.1.1)式． □

系 1.1.1 设 $x \in [J, E]$，且除去至多可数集 $\Gamma \subset [a, b]$外，当 $t \in [a, b] \setminus \Gamma$ 时 $x(t)$右可微．若存在常数 $M \geqslant 0$ 使 $\| x'_+(t) \| \leqslant M$，$\forall t \in [a, b] \setminus \Gamma$，则

$$\| x(b) - x(a) \| \leqslant M(b - a). \tag{1.1.7}$$

特别，若 $x'_+(t) = \theta$，$\forall t \in [a, b] \setminus \Gamma$，则 $x(t)$是常元素，即 $x(t) \equiv x_0 \in E$，$\forall t \in [a, b]$．

对于左可微的情形，类似的结论成立．

定理 1.1.2(中值定理) 设 $x \in C[J, E]$，且除去至多可数集 $\Gamma \subset [a, b]$外，当 $t \in [a, b] \setminus \Gamma$ 时，$x(t)$左可微(即左导数 $x'_-(t)$存在)，则

$$x(b) - x(a) \in (b - a)\,\overline{\mathrm{co}}\{x'_-(t) : t \in [a, b] \setminus \Gamma\}. \tag{1.1.8}$$

证 在区间 $J^* = \{-t : t \in J\} = [-b, -a]$上考察函数 $x^*(t) = -x(-t)$，即可将定理 1.1.2 化为定理 1.1.1 的情形，从而定理 1.1.2 可从定理 1.1.1 推出．当然，定

理 1.1.2 也可仿定理 1.1.1 直接证明，这时只需代替 T 和 $\sup T$ 而考虑 $T^* = \{t\in[a, b]: d(x(b)-x(t), (b-t)\mathrm{co}D^*)\leqslant(b-t)\varepsilon+\varepsilon\sum\limits_{p_k>t}2^{-k}\}$ 及 $\lambda^*=\inf T^*$ 即可，这里 $D^*=\{x'_-(t): t\in[a, b]\setminus\Gamma\}$. □

系 1.1.2 设 $x\in C[J, E]$，且除去至多可数集 $\Gamma\subset[a, b]$ 外，当 $t\in[a, b]\setminus\Gamma$ 时 $x(t)$ 左可微. 若存在常数 $M\geqslant 0$ 使 $\|x'_-(t)\|\leqslant M$, $\forall t\in[a, b]\setminus\Gamma$, 则(1.1.7)式成立. 特别，若 $x'_-(t)=\theta$, $\forall t\in[a, b]\setminus\Gamma$, 则 $x(t)\equiv x_0\in E$, $\forall t\in[a, b]$.

1.2 非紧性测度

定义 1.2.1 设 S 是 E 中有界集，令

$\alpha(S)=\inf\{\delta>0: S$ 可表为有限个集的并：$S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$，使每个 S_i 的直径 $\mathrm{diam}(S_i)\leqslant\delta\}$.

显然，$0\leqslant\alpha(S)<\infty$. $\alpha(S)$ 叫做 S 的 kuratowski 非紧性测度，简称非紧性测度.

定理 1.2.1 非紧性测度具有下列性质(S, T 表 E 中有界集，a 表实数)：

(i) $\alpha(S)=0\Longleftrightarrow S$ 是相对紧集.

(ii) $S\subset T\Longrightarrow\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$.

(iii) $\alpha(\bar{S})=\alpha(S)$.

(iv) $\alpha(S\cup T)=\max\alpha\{(S), \alpha(T)\}$.

(v) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，其中 $aS=\{x: x=az, z\in S\}$.

(vi) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$，其中 $S+T=\{x: x=y+z, y\in S, z\in T\}$.

(vii) $\alpha(\overline{\mathrm{co}}S)=\alpha(S)$.

(viii) $|\alpha(S)-\alpha(T)|\leqslant 2d_h(S, T)$，其中 $d_h(S, T)$ 表集 S 和 T 之间的Hausdorff 距离，即

$$d_h(S, T) = \max\{\sup_{x\in S}d(x, T), \sup_{x\in T}d(x, S)\},$$

这里 $d(\cdot,\cdot)$ 表点到集的距离.

证 性质(i)和(ii)是显然的.

(iii)：由 $S\subset\bar{S}$ 及(ii)知 $\alpha(S)\leqslant\alpha(\bar{S})$. 另一方面，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在分解 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$，使 $\mathrm{diam}(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 由于 $\bar{S}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bar{S}_i$，而 $\mathrm{diam}(\bar{S}_i)=\mathrm{diam}(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon$，故 $\alpha(\bar{S})\leqslant\alpha(S)+\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(\bar{S})\leqslant\alpha(S)$.

(iv)：令 $\eta=\max\{\alpha(S), \alpha(T)\}$. 由(ii)知 $\eta\leqslant\alpha(S\cup T)$. 另一方面，任给 $\varepsilon>0$，存在分解 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$ 及 $T=\bigcup\limits_{j=1}^{n}T_j$，使 $\mathrm{diam}(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon\leqslant\eta+\varepsilon$, $\mathrm{diam}(T_j)<\alpha(T)+\varepsilon\leqslant\eta+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$. 由 $S\cup T=(\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i)\cup(\bigcup\limits_{j=1}^{n}T_j)$ 即知 $\alpha(S\cup T)\leqslant\eta+\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(S\cup T)\leqslant\eta$.

(v)：$a=0$ 时 $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$ 显然成立. 下设 $a\neq 0$，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在分解 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$ 使得 $\mathrm{diam}(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 显然有 $aS=\bigcup\limits_{i=1}^{m}(aS_i)$,

$\mathrm{diam}(aS_i)=|a|\mathrm{diam}(S_i)<|a|\alpha(S)+|a|\varepsilon$，故 $\alpha(aS)\leqslant|a|\alpha(S)+|a|\varepsilon$．再根据 ε 的任意性，得 $\alpha(aS)\leqslant|a|\alpha(S)$．另一方面，利用此结果，又有 $\alpha(S)=\alpha(a^{-1}\cdot aS)\leqslant|a^{-1}|\alpha(aS)=|a|^{-1}\alpha(aS)$，从而 $\alpha(aS)\geqslant|a|\alpha(S)$．

(vi)：任给 $\varepsilon>0$，存在分解 $S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$ 及 $T=\bigcup_{j=1}^{n}T_j$，使 $\mathrm{diam}(S_i)<\alpha(S)+\varepsilon$，$\mathrm{diam}(T_j)<\alpha(T)+\varepsilon$．令 $V_{ij}=\{x:\ x=y+z,\ y\in S_i,\ z\in T_j\}$．显然，$S+T=\bigcup_{i,j}V_{ij}$，$\mathrm{diam}(V_{ij})\leqslant\mathrm{diam}(S_i)+\mathrm{diam}(T_j)<\alpha(S)+\alpha(T)+2\varepsilon$，故 $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)+2\varepsilon$．再由 ε 的任意性即得 $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$．

(vii)：由(iii)，只需证 $\alpha(\mathrm{co}S)=\alpha(S)$．这又只需证明 $\alpha(\mathrm{co}S)\leqslant\alpha(S)$．任取 $a_1>\alpha(S)$．于是，存在某分解 $S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$ 使得 $\mathrm{diam}(S_i)<a_1(i=1,2,\cdots,m)$．取 $0<a_2<a_1$ 使 $\mathrm{diam}(S_i)<a_2(i=1,2,\cdots,m)$．于是

$$\mathrm{diam}(\mathrm{co}S_i)=\mathrm{diam}(S_i)<a_2\qquad(i=1,2,\cdots,m).\tag{1.2.1}$$

令 $D=\{\lambda:\ \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m),\ \lambda_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m;\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\}$，则 D 是 R^m 中有界闭集．对 $\lambda\in D$，定义 E 的子集 $X(\lambda)$ 如下：$X(\lambda)=\{x:\ x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_i,\ x_i\in\mathrm{co}S_i,\ i=1,2,\cdots,m\}$．对 $X(\lambda)$ 中任二元素 $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_i$ 和 $y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iy_i\ (x_i,\ y_i\in\mathrm{co}S_i)$，由(1.2.1)式知

$$\|x-y\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\|x_i-y_i\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathrm{diam}(S_i)<a_2,$$

由此可知

$$\mathrm{diam}(X(\lambda))\leqslant a_2,\qquad\forall\lambda\in D.\tag{1.2.2}$$

令 $X(D)=\bigcup_{\lambda\in D}X(\lambda)$．我们证明

$$X(D)=\mathrm{co}S.\tag{1.2.3}$$

显然 $S\subset X(D)\subset\mathrm{co}S$．因此，要证(1.2.3)式只需证明 $X(D)$ 是凸集即可．设 $x\in X(D)$，$y\in X(D)$．则 $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_i$，$y=\sum_{i=1}^{m}\mu_iy_i$，其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in D$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\in D$，$x_i,\ y_i\in\mathrm{co}S_i(i=1,2,\cdots,m)$．考察点 $z=hx+(1-h)y$，其中 $0<h<1$．易知 $z=\sum_{i=1}^{m}\upsilon_iz_i$，这里

$$\upsilon_i=h\lambda_i+(1-h)\mu_i,$$

$$z_i=\frac{h\lambda_i}{h\lambda_i+(1-h)\mu_i}x_i+\frac{(1-h)\mu_i}{h\lambda_i+(1-h)h\mu_i}y_i.$$

显然 $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_m)\in D$，$z_i\in\mathrm{co}S_i$，故 $z\in X(D)$．因此 $X(D)$ 是凸集，(1.2.3)式获证．

令 $\eta=\frac{1}{2}(a_1-a_2)$．对 $\lambda\in D$，用 $X_\eta(\lambda)$ 表 $X(\lambda)$ 的 η—邻域，即 $X_\eta(\lambda)=\{x\in E:$

$\inf_{z \in X(\lambda)} \| x - z \| < \eta \}$. 由于 S 有界，故 $\mathrm{co}S$ 有界. 于是，易知存在 $\delta > 0$，使 $X(\mu) \subset X_\eta(\lambda)$ 对于一切 $\lambda \in D$，$\mu \in D$，$\| \mu - \lambda \| < \delta$ 均成立. 由于 D 是 R^m 中紧集，故存在分解 $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$，$\mathrm{diam}(D_j) < \delta (j = 1, 2, \cdots, n)$. 取定 $\lambda_j \in D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$. 于是有

$$X(\lambda) \subset X_\eta(\lambda_j), \qquad \forall \lambda \in D_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.2.4}$$

令 $X(D_j) = \bigcup_{\lambda \in D_j} X(\lambda)$. 由(1.2.3)式知 $\mathrm{co}S = \bigcup_{j=1}^{n} X(D_j)$. 又由(1.2.4)式和(1.2.2)式知

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}(X(D_j)) &\leqslant \mathrm{diam}(X_\eta(\lambda_j)) \leqslant \mathrm{diam}(X(\lambda_j)) + 2\eta \\ &\leqslant a_2 + 2\eta = a_1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

故 $\alpha(\mathrm{co}S) \leqslant a_1$. 再根据 a_1 的任意性($a_1 > \alpha(S)$)，即得 $\alpha(\mathrm{co}S) \leqslant \alpha(S)$.

(viii)：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在分解 $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ 使得 $\mathrm{diam}(S_i) < \alpha(S) + \varepsilon (i = 1, 2, \cdots, m)$. 令 $\eta = \alpha_h(S, T) + \varepsilon$ 及 $T_i = \{ y \in T$：存在 $x \in S_i$ 使 $\| x - y \| < \eta \}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 由于 $\alpha_h(S, T) < \eta$，我们有 $T = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$. 另一方面，显然，

$$\mathrm{diam}(T_i) \leqslant 2\eta + \mathrm{diam}(S_i) < 2\alpha_h(S, T) + \alpha(S) + 3\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

故

$$\alpha(T) < 2\alpha_h(S, T) + \alpha(S) + 3\varepsilon.$$

类似地，可证

$$\alpha(S) < 2\alpha_h(S, T) + \alpha(T) + 3\varepsilon.$$

由此可证

$$| \alpha(S) - \alpha(T) | < 2\alpha_h(S, T) + 3\varepsilon.$$

再根据 ε 的任意性，即得 $| \alpha(S) - \alpha(T) | \leqslant 2\alpha_h(S, T)$.

证完. □

注 1.2.1 (a) 易知性质(v)的如下推广成立：$\alpha(\Lambda S) = (\sup_{\lambda \in \Lambda} | \lambda |) \alpha(S)$，其中 Λ 是某有界实数集，$\Lambda S = \{ \lambda x : x \in S, \lambda \in \Lambda \}$. (b) 由性质(viii)知：非紧性测度关于集的 Hausdorff 距离是一致连续的.

记 $J = [a, b]$. 众所周知，空间 $C[J, E]$ 中的范数为 $\| x \|_c = \max_{t \in J} \| x(t) \|$，而空间 $C^m[J, E] = \{ x : x : J \to E$ 使得 x 的 m 阶导数在 J 上存在且连续$\}$ 的范数为 $\| x \|_m = \max\{ \| x \|_c, \| x' \|_c, \cdots, \| x^{(m)} \|_c \}$. 特别，$m = 1$ 时，$C^1[J, E]$ 中的范数是 $\| x \|_1 = \max\{ \| x \|_c, \| x' \|_c \}$. 对于某些 $x : J \to E$ 组成的函数族 H，记 $H(t) = \{ x(t) : x \in H \} \subset E (t \in J)$，$H(J) = \bigcup_{t \in J} H(t)$.

定理 1.2.2 设 $H \subset C[J, E]$ 是有界的、等度连续的，则 $\alpha(H(t))$ 在 J 上连续，且

$$\alpha\left(\left\{ \int_J x(t) \mathrm{d}t : x \in H \right\} \right) \leqslant \int_J \alpha(H(t)) \mathrm{d}t. \tag{1.2.5}$$

证 任给 $\varepsilon > 0$. 由 H 的等度连续性知，存在 $\delta > 0$ 使得当 $| t - t' | < \delta (t, t' \in J)$ 时，$\| x(t) - x(t') \| < \varepsilon$ 对一切 $x \in H$ 均成立，从而 $\alpha_h(H(t), H(t')) \leqslant \varepsilon$. 于是，由定理 1.2.1 性质(viii)知 $| \alpha(H(t) - \alpha H(t')) | \leqslant 2\varepsilon$，当 $| t - t' | < \delta$ 时. 故 $\alpha(H(t))$ 是 J 上连

续函数.

下证(1.2.5)式. 任给 J 的一个等分法: $a=t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_m=b$, 这里 $t_i=a+i\Delta t$, $\Delta t=\dfrac{b-a}{m}$. 由 H 的等度连续性知, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $m>N$ 时, 有

$$\|x(t_i)-x(t)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in H,\quad t\in J_i=[t_{i-1},t_i]\quad (i=1,2,\cdots,m).$$

于是

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}x(t_i)\Delta t-\int_J x(t)\mathrm{d}t\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{m}\int_{J_i}[x(t_i)-x(t)]\mathrm{d}t\right\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\int_{J_i}\|x(t_i)-x(t)\|\mathrm{d}t<\varepsilon(b-a),\qquad \forall x\in H,\ m>N.$$

故

$$\alpha_h\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}x(t_i)\Delta t: x\in H\right\},\left\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\right\}\right)\leqslant\varepsilon(b-a),\qquad \forall m>N.$$

由此, 根据定理 1.2.1 性质(viii), 得

$$\left|\alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}x(t_i)\Delta t: x\in H\right\}\right)-\alpha\left(\left\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\right\}\right)\right|\leqslant 2\varepsilon(b-a),\qquad \forall m>N.$$

由此可知

$$\lim_{m\to\infty}\alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}x(t_i)\Delta t: x\in H\right\}\right)=\alpha\left(\left\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\right\}\right).\tag{1.2.6}$$

另一方面, 根据定理 1.2.1 性质(v)和(vi), 我们有

$$\alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}x(t_i)\Delta t: x\in H\right\}\right)\leqslant\Delta t\sum_{i=1}^{m}\alpha(\{x(t_i): x\in H\})$$

$$=\Delta t\sum_{i=1}^{m}\alpha(H(t_i)).\tag{1.2.7}$$

又, 显然

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha(H(t_i))\Delta t=\int_J\alpha(H(t))\mathrm{d}t.\tag{1.2.8}$$

于是, 由(1.2.6)-(1.2.8)诸式即得(1.2.5)式. □

当 H 不是等度连续时, 我们有下面的定理(它的证明, 请参看 Heinz[1]):

定理 1.2.3 设 H 是由可数个强可测函数 $x: J\to E$ 所成的集. 又设存在函数 $M\in L[J,R_+]$ 使得 $\|x(t)\|\leqslant M(t)\ a.e.\ t\in J$ 对一切 $x\in H$ 成立, 则 $\alpha(H(t))\in L[J,R_+]$, 并且

$$\alpha\left(\left\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\right\}\right)\leqslant 2\int_J\alpha(H(t))\mathrm{d}t.\tag{1.2.9}$$

系 1.2.1 若 $H\subset C[J,E]$ 是可数的、有界的, 则 $\alpha(H(t))\in L[J,R_+]$, 且(1.2.9)式成立.

下面, 用 α_c 和 α_m 分别表空间 $C[J,E]$ 和空间 $C^m[J,E]$ 中的非紧性测度($m=1,2,3,\cdots$).

定理 1.2.4 设 $H\subset C[J, E]$是有界的、等度连续的，则(a) $\alpha_c(H)=\alpha(H(J))$，(b) $\alpha(H(J))=\max\limits_{t\in J}\alpha(H(t))$.

证 先证 $\alpha(H(J))\leqslant\alpha_c(H)$. 任给 $\varepsilon>0$，存在分解 $H=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H_i$ 使得

$$\operatorname{diam}(H_i)<\alpha_c(H)+\varepsilon \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{1.2.10}$$

由于 H 是等度连续的，可将 J 分成有限个小闭区间 $J_j(j=1, 2, \cdots, n)$使得

$$\|x(t)-x(t')\|<\varepsilon, \quad \forall x\in H, \quad t, t'\in J_j(j=1, 2, \cdots, n). \tag{1.2.11}$$

令 $S_{ij}=\{x(t): x\in H_i, t\in J_j\}$. 则 $H(J)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n}S_{ij}$. 对于 $x, y\in H_i$ 和 $t, t'\in J_j$，由(1.2.10)和(1.2.11)知

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t')\|&\leqslant\|x(t)-y(t)\|+\|y(t)-y(t')\|\\&\leqslant\operatorname{diam}(H_i)+\varepsilon<\alpha_c(H)+2\varepsilon\end{aligned}$$

故 $\alpha(H(J))\leqslant\alpha_c(H)+2\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性即得 $\alpha(H(J))\leqslant\alpha_c(H)$. 再证 $\alpha_c(H)\leqslant\alpha(H(J))$. 任给 $\varepsilon>0$. 由 H 的等度连续性, 可用有限个邻域 $V(t_i)(i=1, 2, \cdots, n)$覆盖 J 使得当 $t\in V(t_i)$时对一切 $x\in H$ 均有 $\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, n)$. 另一方面，存在分解 $H(J)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}T_j$ 使得

$$\operatorname{diam}(T_j)<\alpha(H(J))+\varepsilon \qquad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{1.2.12}$$

用 P 表从$\{1, 2, \cdots, n\}$到$\{1, 2, \cdots, m\}$的所有映像 μ: $i\to\mu(i)$所成的集. 显然，P 是有限集. 对 $\mu\in P$，令 $L_\mu=\{x\in H: x(t_i)\in T_{\mu(i)}, i=1, 2, \cdots, n\}$. 很明显，$H=\bigcup\limits_{\mu\in P}L_\mu$. 对于任何 $x, y\in L_\mu$ 以及 $t\in J$，存在 i 使得 $t\in V(t_i)$且由(1.2.12)式知

$$\|x(t_i)-y(t_i)\|\leqslant\operatorname{diam}(T_{\mu(i)})<\alpha(H(J))+\varepsilon,$$

$$\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon, \qquad \|y(t)-y(t_i)\|<\varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\|&\leqslant\|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\|+\|y(t_i)-y(t)\|\\&<\alpha(H(J))+3\varepsilon\end{aligned}$$

于是 $\operatorname{diam}(L_\mu)\leqslant\alpha(H(J))+3\varepsilon$，因此 $\alpha_c(H)\leqslant\alpha(H(J))+3\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha_c(H)\leqslant\alpha(H(J))$. 于是结论(a)获证.

下证(b). 首先，由定理 1.2.2 知 $\alpha(H(t))$是 J 上连续函数，故$\max\limits_{t\in J}\alpha(H(t))$存在. 由于对任何 $t\in J$，$H(t)\subset H(J)$，故$\max\limits_{t\in J}\alpha(H(t))\leqslant\alpha(H(J))$. 另一方面，对于任给的 $\varepsilon>0$，根据 H 的等度连续性，可用有限个邻域 $V(t_i)(i=1, 2, \cdots, n)$来覆盖 J 使得当 $t\in V(t_i)$时 $\|x(t)-x(t_i)\|<\varepsilon$ 对一切$x\in H$ 均成立$(i=1, 2, \cdots, n)$. 易知，对每个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$，存在分解 $H=\bigcup\limits_{j=1}^{m}H_j^{(i)}$ (m 不依赖于i)，使得 $H(t_i)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}H_j^{(i)}(t_i)$ 且

$$\operatorname{diam}(H_j^{(i)}(t_i))<\alpha(H(t_i))+\varepsilon \qquad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{1.2.13}$$

令 $B_{ij}=H_j^{(i)}(V(t_i))$. 显然，$H(J)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_{ij}$. 对于 $x, y\in H_j^{(i)}$ 和$t, t'\in V(t_i)$，我们有

$$\|x(t)-y(t')\|\leqslant\|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-y(t_i)\|+\|y(t_i)-y(t')\|$$

$$< \mathrm{diam}(H_j^{(i)}(t_i)) + 2\varepsilon,$$

从而，由(1.2.13)得

$$\mathrm{diam}(B_{ij}) \leqslant \alpha(H(t_i)) + 3\varepsilon \leqslant \max_{t\in J}\alpha(H(t)) + 3\varepsilon.$$

由此可知，$\alpha(H(J))\leqslant\max_{t\in J}\alpha(H(t))+3\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性即得

$$\alpha(H(J)) \leqslant \max_{t\in J}\alpha(H(t)).$$ □

系 1.2.2 设 D 是 E 中有界集且映像 $f: J\times D\to E$ 有界，若 $f(t, x)$ 关于 t 是一致连续的，则

$$\alpha(f(J\times S)) = \max_{t\in J}\alpha(f(t, S)), \qquad \forall S\subset D. \tag{1.2.14}$$

证 令 $\varphi_x(t)=f(t, x)$，$H=\{\varphi_x: x\in S\}$. 显然，$H\subset C[J, E]$且 H 是有界的、等度连续的，故根据定理 1.2.4 结论(b)，有

$$\alpha(H(J)) = \max_{t\in J}\alpha(H(t)),$$

此即(1.2.14)式. □

定理 1.2.5 (Ascoli - Arzela) 集 $H\subset C[J, E]$相对紧的充分必要条件是：H 是等度连续的，并且，对每个 $t\in J$，集 $H(t)$是 E 中的相对紧集.

证 必要性：设 H 是$C[J, E]$中相对紧集. 显然，对每个 $t\in J$，$H(t)$是 E 中相对紧集. 任给 $\varepsilon>0$. 根据 Hausdorff 定理，存在有限集 $H_0=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}\subset H$ 使得H_0 是 H 的 ε—网，即对任何 $x\in H$ 必有$x_i\in H_0$，使得 $\|x-x_i\|_c<\varepsilon$. 由于 $x_i(t)(i=1, 2, \cdots, m)$在 J 上是一致连续的，故必有 $\delta>0$ 存在，使当$|t-t'|<\delta(t, t'\in J)$时，恒有 $\|x_i(t)-x_i(t')\|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 于是，对任何 $x\in H$ 及任何$t, t'\in J$ 满足 $|t-t'|<\delta$，取 $x_i\in H_0$ 使 $\|x-x_i\|_c<\varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(t')\| &\leqslant \|x(t)-x_i(t)\| + \|x_i(t)-x_i(t')\| + \|x_i(t')-x(t')\| \\ &\leqslant 2\|x-x_i\|_c + \|x_i(t)-x_i(t')\| < 3\varepsilon\end{aligned}$$

由此可知，H 是等度连续的.

充分性：设 H 是等度连续的，并且，对每个 $t\in J$，$H(t)$是 E 中相对紧集. 易知 H 是$C[J, E]$中有界集. 由定理 1.2.1(i)知 $\alpha(H(t))=0$，$\forall t\in J$. 于是，根据定理 1.2.4，我们有 $\alpha_c(H)=\max_{t\in J}\alpha(H(t))=0$. 由此，再利用定理 1.2.1(i)，即知 H 是$C[J, E]$中相对紧集. □

对 $H\subset C^m[J, E]$，记 $H^{(k)}=\{x^{(k)}: x\in H\}$，$H^{(k)}(t)=\{x^{(k)}(t): x\in H\}$，$H^{(k)}(J)=\bigcup_{t\in J}H^{(k)}(t)(k=1, 2, \cdots, m)$. 常用 $k=1$，即 $H'=\{x': x\in H\}$，$H'(t)=\{x'(t): x\in H\}$和 $H'(J)=\{x'(t): x\in H, t\in J\}$.

引理 1.2.1 设 H 是$C^1[J, E]$中有界集，则

$$\alpha_1(H)\geqslant\alpha(H(J)), \qquad \alpha_1(H)\geqslant\frac{1}{2}\alpha(H'(J)). \tag{1.2.15}$$

证 先证(1.2.15)的第一个不等式. 由于 H 是$C^1[J, E]$中有界集，故将 H 视为$C[J, E]$中的集时，它必是有界的、等度连续的，从而，根据定理 1.2.4(a)知 $\alpha_c(H)=\alpha(H(J))$. 另一方面，由于 $x\in C^1[J, E]$时有 $\|x\|_c\leqslant\|x\|_1$，故易知 $\alpha_c(H)\leqslant$

$\alpha_1(H)$. 于是 $\alpha_1(H) \geqslant \alpha(H(J))$.

下证(1.2.15)的第二个不等式. 任给 $\varepsilon>0$. 存在分解 $H=\bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$，使得 $\operatorname{diam}(H_i)<\alpha_1(H)+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 取 $x_i \in H_i(i=1, 2, \cdots, m)$. 由于 $x'_i(t)$在 J 上一致连续，故可将 J 分成有限个子区间$J=\bigcup\limits_{j=1}^{n} J_j$，$J_j=[t_{j-1}, t_j](j=1, 2, \cdots, n; t_0=a, t_n=b)$，使得当 $t, s \in J_j(j=1, 2, \cdots, n)$时，恒有 $\|x'_i(t)-x'_i(s)\|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 令 $V_{ij}=\{x'(t): x \in H_i, t \in J_j\}$. 显然 $H'(J)=\bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{ij}$. 当 $x, y \in H_i, t, s \in J_j$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|x'(t)-y'(s)\| &\leqslant \|x'(t)-x'_i(t)\|+\|x'_i(t)-x'_i(s)\|+\|x'_i(s)-y'_i(s)\| \\ &\leqslant 2\operatorname{diam}(H_i)+\varepsilon<2\alpha_1(H)+3\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\operatorname{diam}(V_{ij})<2\alpha_1(H)+3\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$. 由此可知$\alpha(H'(J)) \leqslant 2\alpha_1(H)+3\varepsilon$. 再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(H'(J)) \leqslant 2\alpha_1(H)$. □

注 1.2.2 类似地，可证：若 H 是$C^m[J, E]$中有界集，则

$$\alpha_m(H) \geqslant \alpha(H(J)), \quad \alpha_m(H) \geqslant \alpha(H'(J)), \quad \cdots,$$

$$\alpha_m(H) \geqslant \alpha(H^{(m-1)}(J)), \quad \alpha_m(H) \geqslant \frac{1}{2}\alpha(H^{(m)}(J)). \tag{1.2.16}$$

定理 1.2.6 设 H 是$C^1[J, E]$中有界集，且 H'是等度连续的，则

$$\begin{aligned}\alpha_1(H) &= \max\{\alpha(H(J)), \alpha(H'(J))\} \\ &= \max\{\max_{t \in J}\alpha(H(t)), \max_{t \in J}\alpha(H'(t))\}.\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

证 先证

$$\alpha_1(H) \geqslant \max\{\alpha(H(J)), \alpha(H'(J))\}. \tag{1.2.18}$$

根据(1.2.15)式，只需证 $\alpha_1(H) \geqslant \alpha(H'(J))$. 任给 $\varepsilon>0$. 存在分解 $H=\bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$，使 $\operatorname{diam}(H_i)<\alpha_1(H)+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 由 H'的等度连续性，可将 J 分成有限个小闭区间$J_j(j=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$\|x'(t)-x'(s)\|<\varepsilon, \ \forall x \in H, \ t, s \in J_j(j=1, 2, \cdots, n).$$

令 $S_{ij}=\{x'(t): x \in H_i, t \in J_j\}$，则 $H'(J)=\bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_{ij}$. 对于 $x, y \in H_i, t, s \in J_j$ 我们有

$$\begin{aligned}\|x'(t)-y'(s)\| &\leqslant \|x'(t)-y'(t)\|+\|y'(t)-y'(s)\| \\ &\leqslant \operatorname{diam}(H_i)+\|y'(t)-y'(s)\|<\alpha_1(H)+2\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\operatorname{diam}(S_{ij}) \leqslant \alpha_1(H)+2\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$. 由此可知 $\alpha(H'(J)) \leqslant \alpha_1(H)+2\varepsilon$，再根据 ε 的任意性，即得 $\alpha(H'(J)) \leqslant \alpha_1(H)$. 故(1.2.18)式成立.

再证

$$\alpha_1(H) \leqslant \max\{\max_{t \in J}\alpha(H(t)), \max_{t \in J}\alpha(H'(t))\}. \tag{1.2.19}$$

首先注意，由于函数族 H 和 H'都在J 上有界且等度连续，故根据定理 1.2.2 知$\alpha(H(t))$和 $\alpha(H'(t))$都是 J 上连续函数，因此$\max\limits_{t \in J}\alpha(H(t))$和$\max\limits_{t \in J}\alpha(H'(t))$都存在. 任给 $\varepsilon>0$，由 H 和H'的等度连续性，可将 J 分成有限个子闭区间$J_j=[t_{j-1}, t_j](j=1,$

2, …, n)($t_0=a$, $t_n=b$)，使得当 $t\in J_j$ 时，对一切 $x\in H$ 均有 $\|x(t)-x(t_j)\|<\varepsilon$ 和 $\|x'(t)-x'(t_j)\|<\varepsilon(j=1, 2, \cdots, n)$. 令 $B=\bigcup_{j=1}^{n}[H(t_j)\cup H'(t_j)]$. 存在分解 $B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$，使得 $\operatorname{diam}(B_i)<\alpha(B)+\varepsilon(i=1, 2, \cdots, m)$. 用 P 表从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的所有映像 μ：$j\to\mu(j)$ 所成的集. 显然 P 是有限集. 对于 μ，$\upsilon\in P$，令 $S_{\mu,\upsilon}=\{x\in H: x(t_j)\in B_{\mu(j)}, x'(t_j)\in B_{\upsilon(j)}, j=1, 2, \cdots, n\}$. 我们有 $H=\bigcup_{\mu,\upsilon\in P}S_{\mu,\upsilon}$. 对 x，$y\in S_{\mu,\upsilon}$ 和 $t\in J_j(j=1, 2, \cdots, n)$，有

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &\leqslant \|x(t)-x(t_j)\|+\|x(t_j)-y(t_j)\|+\|y(t_j)-y(t)\|\\ &\leqslant \operatorname{diam}(B_{\mu(j)})+2\varepsilon<\alpha(B)+3\varepsilon,\\ \|x'(t)-y'(t)\| &\leqslant \|x'(t)-x'(t_j)\|+\|x'(t_j)-y'(t_j)\|+\|y'(t_j)-y'(t)\|\\ &\leqslant \operatorname{diam}(B_{\upsilon(j)})+2\varepsilon<\alpha(B)+3\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\operatorname{diam}(S_{\mu,\upsilon})\leqslant\alpha(B)+3\varepsilon$. 由此知 $\alpha_1(B)\leqslant\alpha(B)+3\varepsilon$. 根据定理 1.2.1(iv)，我们有

$$\alpha(B)=\max_{j=1,2,\cdots,n}\{\alpha(H(t_j)), \alpha(H'(t_j))\}.$$

由此知

$$\alpha(H_1)\leqslant\max\{\max_{t\in J}\alpha(H(t)), \max_{t\in J}\alpha(H'(t))\}+3\varepsilon$$

再根据 ε 的任意性即知(1.2.19)式成立.

另外，由于对一切 $t\in J$ 有 $H(t)\subset H(J)$ 和 $H'(t)\subset H'(J)$，故显然有

$$\max\{\max_{t\in J}\alpha(H(t)), \max_{t\in J}\alpha(H'(t))\}\leqslant\max\{\alpha(H(J)), \alpha(H'(J))\} \tag{1.2.20}$$

最后，根据(1.2.18)，(1.2.19)和(1.2.20)三式，即知(1.2.17)式成立．证完. □

注 1.2.3 类似地，可证：若 H 是 $C^m[J, E]$ 中有界集，且 $H^{(m)}$ 是等度连续的，则

$$\begin{aligned}\alpha_m(H)&=\max\{\alpha(H(J)), \alpha(H'(J)), \cdots, \alpha(H^{(m)}(J))\}\\ &=\max\{\max_{t\in J}\alpha(H(t)), \max_{t\in J}\alpha(H'(t)), \cdots, \max_{t\in J}\alpha(H^{(m)}(t))\}\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

定理 1.2.7 集 $H\subset C^1[J, E]$ 相对紧的充分必要条件是：(a) H' 是等度连续的，并且，对每个 $t\in J$，$H'(t)$ 是 E 中相对紧集；(b) 存在 $t_0\in J$ 使 $H(t_0)$ 是 E 中相对紧集.

证 必要性：设 H 是 $C^1[J, E]$ 中相对紧集，则 H 和 H' 都是 $C[J, E]$ 中相对紧集，从而，由定理 1.2.5 知条件(a)和(b)必满足.

充分性：设条件(a)和(b)满足. 由于 H' 等度连续且 $H'(a)$ 有界，易知 H' 是 $C[J, E]$ 中有界集，从而，根据系 1.1.1 知 H 是等度连续的. 再由 $H((t_0)$ 的有界性即知 H 是 $C[J, E]$ 中有界集. 故 H 是 $C^1[J, E]$ 中有界集. 对 t，$t'\in J$，$t>t'$，根据定理 1.2.2，我们有

$$\alpha(\{x(t)-x(t'): x\in H\})=\alpha\left(\left\{\int_{t'}^{t}x'(s)\mathrm{d}s: x\in H\right\}\right)\leqslant\int_{t'}^{t}H'(s)\mathrm{d}s=0$$

从而，由定理 1.2.1(vi)，得

$$|\alpha(H(t))-\alpha(H(t'))|\leqslant\alpha(\{x(t)-x(t'): x\in H\})=0.$$

故 $\alpha(H(t)=\alpha(H(t'))$，$\forall t$，$t'\in J$. 但由条件(b)知 $\alpha(H(t_0))=0$，因此 $\alpha(H(t))=0$，$\forall t\in J$. 于是，根据定理 1.2.6，得

$$\alpha_1(H) = \max\{\max_{t\in J}\alpha(H(t)),\ \max_{t\in J}\alpha(H'(t))\} = 0.$$

由此可知，H 是 $C^1[J,\ E]$中相对紧集. □

注 1.1.4 类似地，可证：集 $H\subset C^m[J,\ E]$相对紧的充分必要条件是：(a) $H^{(m)}$是等度连续的，并且，对每个 $t\in J$，$H^{(m)}(t)$是 E 中相对紧集；(b) 对每个 $k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$，存在 $t_k\in J$ 使得$H^{(k)}(t_k)$是 E 中相对紧集$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$，这里 $H^{(0)}=H$.

1.3 严格集压缩映像的不动点

定义 1.3.1 设 $D\subset E$. A：$D\to E$ 是一个映像(或称算子).

(a) 如果 A 是连续的，而且是紧的(即 A 将D 中任何有界集S 映成E 中相对紧集$A(S)$)，则称 A 是**全连续算子**.

(b) 如果 A 是连续的、有界的，并且存在常数 $k\geqslant 0$，使对 D 中任何有界集S，有 $\alpha(A(S))\leqslant k\alpha(S)$，这里 α 表E 中非紧性测度，则称 A 是**k－集压缩映像**. 特别，$k<1$ 时的 k－集压缩映像称为**严格集压缩映像**.

(c) 如果 A 是连续的、有界的，并且对任何非相对紧的有界集 $S\subset D$，都满足 $\alpha(A(S))<\alpha(S)$，则称 A 是**凝聚映像**.

显然，全连续映像必是严格集压缩映像，而严格集压缩映像必是凝聚映像. 但可以举例说明，反之不成立.

引理 1.3.1 设 Ω 是E 中一个凸开集，且 $x_0\in\Omega$. 假定连续映像 A：$\bar{\Omega}\to\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ 表 Ω 的闭包)具有下述性质：

$$C\subset\bar{\Omega}\ \text{可数},\quad C\subset\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(C))\Longrightarrow C\ \text{相对紧}. \tag{1.3.1}$$

那末，A 在$\bar{\Omega}$ 中必有不动点.

证 定义

$$D_0=\{x_0\},\ D_n=\mathrm{co}(\{x_0\}\cup A(D_{n-1}))\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{1.3.2}$$

由归纳法易知：每个 $D_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$都是 E 中相对紧集，并且

$$D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_{n-1}\subset D_n\subset\cdots\subset\bar{\Omega}. \tag{1.3.3}$$

于是，每个 D_n 都是可分的，从而，存在可数集 C_n，使得$\overline{C_n}=\overline{D_n}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. 令 $D=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n$ 和 $C=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n$. 由(1.3.2)式和(1.3.3)式，我们有

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{co}(\{x_0\}\cup A(D_{n-1}))=\mathrm{co}(\{x_0\})\cup A(D)). \tag{1.3.4}$$

另一方面，由(1.3.3)式知

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{D_n}}=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n}=\bar{D},\qquad \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{D_n}}=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{C_n}}=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n}=\bar{C}. \tag{1.3.5}$$

于是，根据(1.3.4)式和(1.3.5)式，得

$$\begin{aligned}C\subset\bar{C}&=\bar{D}=\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(D))=\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(\bar{D}))\\&=\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(\bar{C}))=\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(C)).\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

因为 D 是可数集．故由(1.3.6)式并利用条件(1.3.1)式即知 $\bar{C}$ 是 E 中紧集，从而 $\bar{D}$ 是 E 中紧集．由于 $x_0\in D$，故 $\bar{D}$ 非空．由(1.3.6)式又知 $A(\bar{D})\subset\bar{D}$．于是，根据 Schauder 不动点定理即知 A 在 $\bar{D}$ 中有不动点． □

定理 1.3.1 (Mönch)　设 D 是 E 中一个闭凸集，并且 $x_0\in D$．假定连续映像 $A: D\to D$ 具有下述性质：

$$C\subset D \text{ 可数}, \quad C\subset \overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(C))\Longrightarrow C \text{ 相对紧}. \tag{1.3.7}$$

那末，A 在 D 中必有不动点．

证　由 Dugundji 延拓定理(见 Dugundji[1])，存在连续映像 $A_1: E\to D$ 使得当 $x\in D$ 时恒有 $A_1x=Ax$．现设 $C\subset E$ 可数且

$$C\subset \overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A_1(C)) \tag{1.3.8}$$

由于 $A_1(C)\subset D$，故由(1.3.8)式知 $C\subset D$，从而 $A_1(C)=A(C)$．于是由条件(1.3.7)式推知 C 是 E 中相对紧集．现在，将引理 1.3.1 应用于 A_1 和 $\Omega=E$，得知 A_1 在 E 中必有不动点 x^*．因为 $A_1x^*\in D$，故 $x^*\doteq A_1x^*\in D$，从而 $A_1x^*=Ax^*$，$x^*=Ax^*$． □

定理 1.3.2 (Daher)　设 D 是 E 中一个非空有界凸闭集．假定连续映像 $A: D\to D$ 具有性质：

$$C\subset D \text{ 可数}, \quad \text{非相对紧} \Longrightarrow \alpha(A(C))<\alpha(C). \tag{1.3.9}$$

那末，A 在 D 中必有不动点．

证　根据定理 1.3.1，我们只需证明条件(1.3.9)式蕴含条件(1.3.7)式．取 $x_0\in D$，并设可数集 $C\subset D$ 满足 $C\subset\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(C))$．于是，我们有

$$\alpha(C)\leqslant\alpha(\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup A(C)))=\alpha(A(C)).$$

由(1.3.9)式即知 C 相对紧． □

定理 1.3.3 (Sadovskii)　设 D 是 E 中一个非空有界凸闭集．如果映像 $A: D\to D$ 是凝聚的，则 A 在 D 中必有不动点．

证　定理 1.3.3 是定理 1.3.2 的直接推论． □

定理 1.3.4 (Darbo)　设 D 是 E 中一个非空有界凸闭集．如果映像 $A: D\to D$ 是严格集压缩的，则 A 在 D 中必有不动点．

证　定理 1.3.4 是定理 1.3.3 的直接推论． □

下面介绍严格集压缩映像的不动点指数概念．先证明一个要用到的引理．

引理 1.3.2　设 $\{S_n\}$ 是 E 中一串非空有界闭集，并且 $S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$．如果当 $n\to\infty$ 时 $\alpha(S_n)\to 0$，那末，集 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 必是 E 中非空紧集．

证　显然只需证明如下结论：对任何 $x_n\in S_n(n=1, 2, 3, \cdots)$，都必有子列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$，使得 $x_{n_i}\to x_0\in S$ $(i\to\infty)$．(事实上，由于 $x_0\in S$，故 S_0 非空．又，对于任何序列 $\{z_n\}\subset S$，必有 $z_n\in S_n(n=1, 2, 3, \cdots)$．从而根据所述结论知，存在子列 $z_{n_i}\to z_0\in S$．故 S 是紧集)．

S_n 具有分解 $S_n=\bigcup\limits_{i=1}^{i_n}S_i^{(n)}$ 使得 $\mathrm{diam}(S_i^{(n)})<\alpha(S_n)+\dfrac{1}{n}(i=1, 2, \cdots, i_n)$．因 $\{x_n\}$