山东师范大学数学系主编

大学本科函授教材

常微分方程

庄　万　黄启宇　丛树凡
金　均　张有训　李学敏　编

华东地区省(市)属师范大学协编教材

山东科学技术出版社

大学本科函授教材

常微分方程

华东地区七所师范大学函授教材协作编写组

山东师范大学数学系　主编

庄　万　黄启宇　丛树凡
金　均　张有训　李学敏　编

山东科学技术出版社

一九八八年·济南

内 容 提 要

全书分为六章，内容是：基本概念；一阶微分方程的初等积分法；微分方程的基本理论；二阶微分方程；微分方程组；定性与稳定性理论简介。

本书主要作为专科起点的数学专业本科生的函授教材，也可作为师范院校数学专业、师专数学科的常微分方程教材或参考书和自学者用书。

大学本科函授教材

常 微 分 方 程

华东地区七所师范大学函授教材协作编写组

山东师范大学数学系 主编

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路）

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 14.75 印张 304 千字

1988 年 1 月第 1 版 1988 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—7,500

ISBN 7—5331—0215—0/O·21

定价 3.45 元

出版说明

为了改变长期以来高等师范院校数学专业专科起点的本科函授缺乏合适教材的状况，提高函授教育的质量，华东地区七所师范大学：山东师范大学、上海师范大学、江西师范大学、安徽师范大学、南京师范大学、浙江师范大学及福建师范大学的数学系联合编写了高等师范院校数学专业本科函授教材。按照教育部颁发的数学专业本科函授教学大纲，结合函授教育的特点，首先编写了《数学分析选论》、《复变函数论》、《实变函数与泛函分析》、《近世代数》、《微分几何》、《概率统计》、《常微分方程》等七本教材。这套教材内容系统性强，论证严谨，条理清晰，深入浅出，便于自学。每章章前有提要，章后有小结，并配有复习题，有助于学生通过练习加深理解。

这套教材也可作为大专院校的在校本科生、业余大学的教材或教学参考书，也可供广大青年自学参考之用。

华东地区七所师范大学
函授教材协作编写组
一九八七年十月

前　　言

本书是根据华东地区七所师范大学系主任协作会议的决议，按照教育部于1984年颁发的中学教师进修高师本科数学专业《常微分方程》教学大纲，由山东师范大学主编，上海师范大学、浙江师范大学、福建师范大学协作编写而成的。

本书除了提供学习微分方程经典的传统内容外，还对微分方程的重要分支——定性、稳定性理论作了简要介绍，使读者在掌握了微分方程的基本内容之后，对常微分方程这门学科近代发展的主要方向有一个粗略的了解，为进一步学习打下良好的基础。

全书共分六章，每章开头有内容提要，结尾有小结。由于学时的限制，有一些内容打了“*”号，供有余力的读者选读。

本书力求做到便于自学，在保证科学性的前提下，叙述深入浅出，通俗易懂。较难的概念给出直观解释，较难的定理提供证明思路。注意理论联系实际，列举了一些物理上的典型实例；考虑到联系中学实际，我们还举了一些几何上的例子。此外，注意了运算技能的培养和训练，如第二章初等积分法增加了综合举例一节，列举了一些一题多解的例子，以提高读者的运算能力。每节所配备的例题、习题、复习题都经过精选，使读者通过典型例题的学习和习题、复习题的练习，能达到加深理解教材内容和提高运算技能的目的，而

又不致于负担过重。书后附有习题答案，较难的习题给予适当的提示。

本书第一章、第三章由山东师大丛树凡编写；第二章由上海师大金均编写；第四章由浙江师大张有训编写；第五章由山东师大李学敏编写；第六章及附录“常微分方程发展简史”由福建师大黄启宇编写。在统稿会议的基础上，由山东师大庄万统一修改定稿。

山东大学尤秉礼教授详细地审阅了本书，提出了许多宝贵意见，在此表示深切地谢意！

山东师范大学业教处对本书的编写工作给予了大力支持，在此表示谢意。最后殷切地期望使用本教材的同志们对教材中存在的问题提出批评、指正。

编　者

1987年3月

目　录

第一章 基本概念

本章将通过三个实例，粗略地介绍微分方程产生的实际背景和方程的建立，并讲述与微分方程有关的一些基本概念。

§1.1 微分方程的概念与实例

一、什么是微分方程

在初等数学中，我们已经熟悉如代数方程、三角函数方程等这样一些方程。在那些方程中，作为未知的而要确定的是某些特定值。在自然科学的许多领域中，还常常遇到这样的情况：作为未知而要去求的是某个函数关系，但是，我们所能知道的不是这个函数本身，而是未知函数和它的导数的某个关系式。这就是所谓的微分方程。

定义1.1 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的关系式称为**微分方程**。

例如

$$xy+\frac{dy}{dx}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \tag{1.2}$$

$$(y')^2-(x+y)y'+xy=0 \tag{1.3}$$

$$(x^2+y)dx+ydy=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.5}$$

等都是微分方程．在前三个方程中，x 是自变量，$y=y(x)$ 是未知函数，$\frac{dy}{dx}$（或y'）是未知函数对 x 的导数．方程(1.4)是写成微分形式的微分方程，这样写法的好处是变量 x 和变量 y 处于平等地位，哪一个当作自变量，哪一个当作因变量可以适当选择．而在方程（1.5）中，x，y，t 都是自变量，$u=u(x,y,t)$ 是未知函数，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$分别是未知函数对 t，x和 y 的二阶偏导数．

必须注意的是，一个微分方程可以形式上不含自变量与未知函数，例如方程(1.2)、(1.5)，但是必须含有未知函数的导数(或微分)，否则，它就不能称为微分方程．下面介绍有关微分方程的一些基本概念．

1．常微分方程与偏微分方程．

只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，而自变量多于一个的微分方程称为**偏微分方程**．例如，方程（1.1）～（1.4）都是常微分方程，而方程（1.5）是偏微分方程．

本书只研究常微分方程．今后，为了简便起见，书中把常微分方程简称为“微分方程”，或更简称为“方程”．

2．微分方程的阶．

在微分方程中所含未知函数的导数（或微分）的最高阶数称为该方程的**阶数**．例如方程(1.1)，（1.3），（1.4）是一阶方程，方程（1.2）是二阶方程．

一阶微分方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.6}$$

这里 F 是其变元的已知函数。如果由（1.1）式能对 y' 解出，得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.7}$$

则（1.7）式称为按导数解出的一阶方程。而（1.6）式称为一阶隐式方程或未按导数解出的一阶方程。如果把（1.7）式写成形式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.8}$$

则称（1·8）式为一阶微分形式的微分方程。

如果微分方程的阶数 $n>1$，则称为**高阶微分方程**。n 阶隐式方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.9}$$

这里 F 是其变元的已知函数。如果由（1.9）式能够对最高阶导数 $y^{(n)}$ 解出，得到方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.10}$$

则称（1.10）式为按最高阶导数解出的 n 阶微分方程。

3. 线性与非线性方程

如果在方程（1.9）中，F 是关于未知函数 y 及其各阶导数 y'，y''，…，$y^{(n)}$ 的一次有理整式，即方程（1.9）可表为如下形式：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1.11}$$

其中 $a_1(x)$，$a_2(x)$，$\cdots$，$a_n(x)$，$f(x)$ 都是定义在某个区间 J 上

的已知函数，则称方程（1.11）为 n 阶**线性微分方程**．不是线性的微分方程就叫做**非线性微分方程**．

在前面列举的例子中，方程（1.1）是一阶线性微分方程；方程（1.2）是二阶线性微分方程；而方程(1.3)，(1.4)都是一阶非线性微分方程．

二、几个实例

17 世纪微积分学产生以后，数学家、物理学家利用微积分作为工具处理力学、物理学、几何学中的某些问题，产生了大量的微分方程问题，逐渐建立起微分方程理论，并且很快地成为研究自然现象的有力工具．下面举三个实例，以说明物理学和几何学等方面的问题如何归结为微分方程问题．

例 1 建立自由落体运动规律所满足的微分方程．

解 所谓自由落体运动，指的是物体在重力作用下自由降落，这里空气阻力忽略不计，设物体 M 的质量为 m，并把 M 视作一个质点．如图 1.1 所示建立坐标系．设物体在时刻 t 的位置的坐标是 $x(t)$，由二阶导数的力学意义知 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 表示物体沿 Ox 轴方向的加速度，质点的运动规律应服从牛顿第二定律：质点的质量乘以加速度应等于所受的力的总和．由于质点 M 所受力只有重力 $W=-mg$，其中 g 是重力加速度(通常取为 9.8 米/秒^2)，负号的出现是由于重力的方向与坐标轴的正向相反，于是得

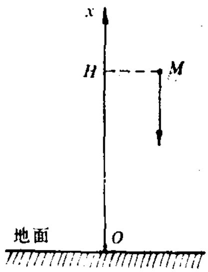

图 1.1

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g \tag{1.12}$$

这就是自由落体运动规律 $x=x(t)$ 所满足的微分方程.

例 2 镭的裂变. 镭是一种放射性物质，它不断地放出各种射线而逐渐减少其质量，试求镭的质量随时间 t 变化的函数关系所满足的微分方程.

解 这里仍用时间 t 作为自变量，设在时刻 t 镭的质量为 $R=R(t)$，导数 $\frac{dR}{dt}$ 是表示镭的质量的变化率. 实验证明：镭的质量的变化率与其剩余的质量 $R=R(t)$ 成正比，于是得关系式

$$\frac{dR}{dt}=-aR \tag{1.13}$$

其中 $a>0$ 是比例常数，可以由实验测得. 负号的出现是因为 $R(t)$ 随着时间 t 的增大而减小，即 $\frac{dR}{dt}<0$，而 (1.13) 式右端的 a 和 R 都是正的. 方程 (1.13) 就是所求的镭的质量 $R(t)$ 满足的微分方程.

例 3 几何问题. 如图 1.2 所示，设 xOy 平面上的某条曲线 L，具有下列性质：在曲线 L 上任取一点 $P(x,y)$，可作一个以 P 为顶点，底边 OA 落在 Ox

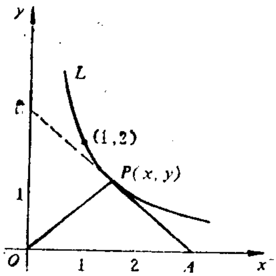

图 1.2

轴上的等腰三角形POA，它的一个腰是原点O到P点的向径OP，另一个腰是曲线L的过P点的切线上的线段PA。试建立曲线L的函数表达式$y=y(x)$所满足的微分方程。

解 设点$P(x,y)$是曲线L上的任意一点，因为$y=y(x)$是曲线L的函数表达式，所以$y'(x)$就是曲线L过点$P(x,y(x))$的切线的斜率。如果用(X, Y)表示过曲线L上P点的切线的流动坐标，则该切线的点斜式方程是

$$Y-y=y'(X-x) \tag{1.14}$$

根据假设，该切线与Ox轴相交时交点为A，故A点的纵坐标$Y=0$，又因为P点是等腰三角形POA的顶点，所以A点的横坐标是P点横坐标的两倍$X=2x$。同时A点也在切线(1.14)上，于是把A点的坐标代入(1.14)式，得到

$$0-y=y'(2x-x)$$

即

$$xy'+y=0 \tag{1.15}$$

这就是曲线L的函数表达式$y=y(x)$所满足的微分方程。

以上只是列举了三个比较简单的建立微分方程的实例，这是运用微分方程理论解决实际问题的首要步骤。但是，一般说来，建立微分方程是比较困难的。因为除了数学知识外还需要掌握各个类型有关实际问题的专业知识。例如，在例1中运用了牛顿第二定律，而例2则运用了镭的衰变定律。第四章、第五章我们还要讲述振动方程、生态方程、人造卫星运行轨道等实际例子，读者不可忽视这方面内容的学习，以逐步提高自己解决实际问题的能力。

习 题 1.1

1. 填写下表：

编号	微 分 方 程	自变量	未知函数	阶 数	线性与非线性
1	$\dfrac{d^4u}{at^4}+u=e^t$				
2	$y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$				
3	$2xydx+(x^2-y^2)dy=0$				

2. 如果同时考虑重力和空气阻力的作用，忽略其他一切因素的影响，试建立落体运动所满足的微分方程（空气阻力的大小与速度$\dfrac{dx}{dt}$成正比，方向与运动方向相反）。

3. 设平面曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，试建立该曲线的函数表达式 $y=y(x)$ 所满足的微分方程。

§1.2 微分方程解的概念

一、微分方程的解

微分方程的基本问题之一就是要求出其中的未知函数，这个函数就称为微分方程的解。

定义 1.2 如果函数$y=\varphi(x)$在区间 J 上有直到 n 阶的导数，而且把 $y=\varphi(x)$及其各阶导数代入微分方程（1.9）后，能得到一个在区间 J 上的恒等式

$$F(x,\varphi(x),\ \varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0 \qquad (1.16)$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 是微分方程（1.9）在区间 J 上的一个解。如果由方程 $\Phi(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=\varphi(x)$ 是方程（1.9）的解，则 $\Phi(x,y)=0$ 称为方程（1.9）的隐式解（或积分）。

例如，由于当 $t\geqslant 0$ 时，

$$\frac{d(Ce^{-at})}{dt}\equiv -a(Ce^{-at})$$

其中 C 是任意常数，于是对任意常数 C，

$$R(t)=Ce^{-at}(t\geqslant 0) \tag{1.17}$$

都是镭的裂变方程

$$\frac{dR}{dt}=-aR \tag{1.13}$$

的解(解法将在§2.1 讲述)。

又如，容易验证，函数 $y=\sqrt{C^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{C^2-x^2}$ 在区间 $-C<x<C$ 中都是方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{1.18}$$

的解，其中 C 是正常数。当 C 取不同值时，这些解的定义区间是不同的。对某固定的 C，方程（1.18）的这两个解的几何图形分别是以坐标原点为中心，以 C 为半径的圆周的上半部分（$y>0$）与下半部分（$y<0$），如图 1.3 所示。关系式 $x^2+y^2=C^2$ 是方程（1.18）的隐式解。今后，用显函数表示的解或隐式解将不加以区别，统称为方程的解。

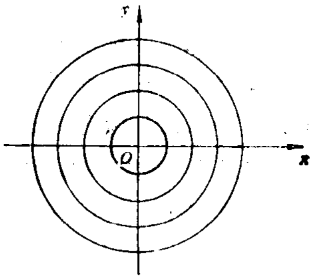

图 1.3