科学版

大学数学习题精解系列

实变函数与泛函分析习题精解

宋国柱 主编

- 课程学习与考研复习的理想读物
- 系统总结基本概念基本定理
- 传授课程习题各种典型解法
- 收录名校研究生入学试题

1-44

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

实变函数与泛函分析习题精解

宋国柱　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书由三部分内容组成，第一部分总结了实变函数和泛函分析的基本概念和主要定理，给出了教材《实变函数和泛函分析概要》中各章的习题解答；第二部分介绍了与教材《抽象分析基础》配套的各章习题、复习题及其解答；第三部分是南京大学硕士研究生入学考试实变函数试题选解.

本书可作为高等院校基础数学和应用数学、信息和计算数学、统计等专业的教学参考书，也可作为相关专业自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析习题精解/宋国柱主编. —北京：科学出版社，2004

(大学数学习题精解系列)

ISBN 7-03-012066-3

Ⅰ.实… Ⅱ.宋… Ⅲ.①实变函数-高等学校-解题②泛函分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第078995号

策划编辑：杨 波 吕 虹/文案编辑：邱 璐 贾瑞娜

责任校对：宋玲玲/责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年1月第一次印刷 印张：21

印数：1—5 000 字数：401 000

定价：27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换(新欣))

前　言

20多年来，我们在南京大学数学系讲授实变函数和泛函分析这两门课程，多次使用了教材《实变函数与泛函分析概要》（郑维行、王声望编）和教材《抽象分析基础》（宋国柱、曹祥炎编），并参阅了其他教材和专著，积累了这两门课程习题的各种典型解法. 在这一基础上，为了帮助读者学好这两门课程，我们编写了这本学习参考书，系统总结了实变函数、泛函分析中的基本概念、基本定理和典型方法，并在各章附上一定数量的练习题及解法提示，同时还收编了部分"南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题"，并作了解答，对读者复习实变函数极有参考价值.

本书编写过程中得到了郑维行教授、王声望教授和苏维宜教授等的帮助与指教，在此谨对他们致以衷心的感谢. 由于作者水平所限，整理时间仓促，书中错误在所难免，所做的解答也未必是最好的，我们恳切地希望读者批评指正.

编　者

2002年10月于南京

目　　录

第一篇　《实变函数与泛函分析概要》习题与解答

第二篇　《抽象分析基础》习题与解答

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一篇 《实变函数与泛函分析概要》习题与解答

第一章 集与点集

一、基本概念和主要定理

集的对等 设 A,B 为两个集,若存在 A 到 B 上的一一映射 f,则称 A 与 B 对等,记作 $A\sim B$.

集的势 将所有的集分类,凡彼此对等的集归于一类,不对等的集归于不同的类,每一类均赋予一个标志,称为该类中每个集的势(或基数),集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$.

若 A 对等 B 的子集,但 A 与 B 不对等,则称 A 的势小于 B 的势,记作 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

定理 1 (伯恩斯坦(Bernstein)定理) 若 A 对等 B 的子集(即 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$),且 B 对等 A 的子集(即 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$),则 A 与 B 对等(即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$).

定理 2 设 A 为集,A 的一切子集所组成的集类记为 $\mathscr{A}$,则 $\overline{\overline{\mathscr{A}}}>\overline{\overline{A}}$.

可列集 凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集,皆称**可列集**,可列集的势记为 $\aleph_0$.

任何无限集均含有可列的子集;

可列集的任何无限子集仍是可列集;

有限个乃至可列个可列集的并集是可列集;

两个可列集 A_1,A_2 的积集

$$A_1\times A_2=\{(x,y)\mid x\in A_1,\ y\in A_2\}$$

为可列集;

有理数集、平面上的有理点集皆是可列集.

连续集 凡与区间 $[0,1]$ 对等的集,皆称**连续集**,连续集的势记为 $\aleph$,容易证明

$$\aleph_0<\aleph.$$

定理 3 (等势定理) 若 A 为无限集,B 为可列集或有限集,则

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}.$$

无理数集的势为 $\aleph$;$\mathbf{R}^1$ 中的任何区间,$\mathbf{R}^n$ 中的任何区域的势均为 $\aleph$.

开集、闭集及其构造 设 $E\subset\mathbf{R}^n$.

(1) 若存在点 a 的某个邻域 $\mathrm{U}(a)$,使得 $\mathrm{U}(a)\subset E$,则称 a 为 E 的内点;

(2) 若 E 的每点均为 E 的内点,则称 E 为开集;

(3) 若点 a 的任一邻域中均含有E 的无限多个点,则称 a 为E 的聚点;

(4) E 的一切聚点所成之集称为E 的导集,记为 E';

(5) 若 $E'\subset E$,则称 E 为闭集;

(6) 若 $E\subset E'$,则称 E 为自密集;

(7) 若 $E'=E$,则称 E 为完全集.

任意个开集的并集是开集;

有限个开集的交集是开集;

任意个闭集的交集为闭集;

有限个闭集的并集为闭集;

闭集的补集是开集,开集的补集是闭集.

定理 4 (一维开集的构造) 直线上任一非空开集 G 可表成至多可列个互不相交的开区间(称作 G 的构成区间)之并

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\ \beta_k).$$

定理 5 直线上的非空闭集 F,或是全直线,或是从直线上挖掉至多列个互不相交的开区间(称 F 的余区间)所得之集.

康托尔(Cantor)**集** P_0 是势为$\aleph$、且不含内点的完全集.

集的序和极大元 设 X 为一集.

(1) 若在 X 中规定了某些元素之间的关系$\leqslant$,它满足序公理:

(i) $a\leqslant a$;

(ii) 若 $a\leqslant b,b\leqslant a$,则 $a=b$;

(iii) 若 $a\leqslant b,b\leqslant c$,则 $a\leqslant c$.

则称 X 为带有序$\leqslant$的半序集.

(2) 设 X 为带有序$\leqslant$的半序集,若对 X 中任何两个元素a,b,关系式 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 中必有一个成立,则称 X 为全序集.

(3) 设 X 为半序集,X_0 为 X 的子集,若存在 $b\in X$,使得对一切 $x\in X_0$ 有 $x\leqslant b$,则称 b 为X_0 的上界;又设 b 是X_0 的上界,如果对 X_0 的任一上界 b',均有 $b\leqslant b'$,则称 b 为X_0 的上确界;当 b 是X_0 的上界(下界),且 $b\in X_0$,则称 b 为X_0 的最大元(最小元).

(4) 设 X 为半序集,$X_0\subset X,b\in X_0$,对一切 $x\in X_0$ 有 $x\leqslant b$ 或者x 与b 无关系,则称 b 为X_0 的极大元.

定理 6 (佐恩(Zone)引理) 设 X 为非空半序集,若 X 的每一非空全序子集有上确界,则 X 有极大元.

定理 7 (选择公理) 设 $J=\{A\}$是一族互不相交的非空集组成的集族,则存在满足下面两个条件的集 E:

(1) $E\subset\bigcup_{A\in J}A$;

(2) E 与 J 中每一个集有惟一公共元素.

二、习题、练习题与解法

1. 证明下列关系:

(i) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

证法 1　$x\in(A-B)\cap(C-D)\Leftrightarrow x\in A-B$ 且 $x\in C-D\Leftrightarrow x\in A, x\overline{\in} B, x\in C, x\overline{\in} D\Leftrightarrow x\in A\cap C, x\overline{\in} B\cup D\Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$. 于是,所给等式成立.

证法 2

$$\begin{aligned}(A-B)\cap(C-D)&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)\\&=(A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

证　$x\in(A\cap B)\cup C\Leftrightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in C\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$,或 $x\in C\Leftrightarrow x\in A\cup C$ 且 $x\in B\cup C\Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

于是,所给等式成立.

(iii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$.

证法 1　$x\in A-(B-C)\Rightarrow x\in A, x\overline{\in} B-C\Rightarrow x\in A, x\overline{\in} B$ 或 $x\in A, x\in B, x\in C\Rightarrow x\in A-B$ 或 $x\in C\Rightarrow x\in(A-B)\cup C$.

由 x 的任意性,包含关系得证.

证法 2

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)\\&=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)\\&\subset(A\cap\mathscr{C}B)\cup C=(A-B)\cup C.\end{aligned}$$

(iv) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$.

证

$$\begin{aligned}(A-B)-(C-D)&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap\mathscr{C}(C\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(\mathscr{C}C\cup D)\\&=(A\cap\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)\cup(A\cap\mathscr{C}B\cap D)\\&\subset(A\cap\mathscr{C}C)\cup(\mathscr{C}B\cap D)\\&=(A-C)\cup(D-B).\end{aligned}$$

(v) $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件是什么?

证　由(iii)知，等式右边 $=(A-B)\cup(A\cap C)$，左边 $=(A-B)\cup C$，可见 $A\cap C=C$，即 $C\subset A$ 是等式成立的充分条件.

下证 $C\subset A$ 也是等式成立的必要条件.

用反证法，假设 $C\not\subset A$，则有 $x\in C$ 且 $x\overline{\in} A$，从而 $x\overline{\in} A-B$ 且 $x\overline{\in} A\cap C$，于是，$x\overline{\in}(A-B)\cup(A\cap C)$. 而 $x\in(A-B)\cup C$，故等式不成立.

2. 设给出集 E 与任意一组集 A_a，$a\in I$，问关系式

$$E\cup\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)=\bigcap_{a\in I}(E\cup A_a)$$

是否恒成立？

解　上式恒成立. 事实上，

$$\begin{aligned}&x\in \text{左边}\Rightarrow x\in E\ \text{或}\ x\in\bigcap_{a\in I}A_a\Rightarrow x\in E\\&\text{或}\ x\in A_a(\forall a\in I)\Rightarrow x\in E\cup A_a(\forall a\in I)\\&\Rightarrow x\in\bigcap_{a\in I}(E\cup A_a)\Rightarrow x\in\text{右边};\end{aligned}$$

反之，$x\in$ 右边 $\Rightarrow x\in E\cup A_a(\forall a\in I)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{若 } x\in E,\text{则 } x\in E\cup\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)\\ \text{若 } x\overline{\in}E,\text{则 } x\in A_a(\forall a\in I),\text{从而 } x\in\bigcap_{a\in I}A_a\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in\text{左边}.$$

3. 设 $A=\{0,1\}$，试证一切排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，$a_n\in A$ 所成的集的势为 $\aleph$.

证　把一切排列与二进小数作对应

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\leftrightarrow 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\ a_n\in A=\{0,1\}$$

因二进小数 $\{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots a_n\in A\}$ 与 $[0,1]$ 对等，故其势为 $\aleph$，从而一切排列的势为 $\aleph$.

4. 试作下列各题中集合间的一一对应：

(i) $[0,1]$ 与 $(0,1)$；

(ii) $[a,b]$ 与 $(-\infty,\infty)$；

(iii) 开上半平面与单位圆.

解　(i) 设 $(0,1)$ 中的有理点的全体为 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，则 $[0,1]$ 中的有理点的全体为 $\{0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，作对应

$$0\leftrightarrow r_1,\quad 1\leftrightarrow r_2,\quad r_1\leftrightarrow r_3,\cdots,r_n\leftrightarrow r_{n+2},\cdots$$

再让 $(0,1)$ 中的无理点与 $[0,1]$ 中的无理点自身对应，这样就建立了 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 间的一一对应.

(ii) 先建立 $[a,b]$ 与 (a,b) 间的一一对应(方法同(i))，再作 (a,b) 到 $(-\infty,\infty)$ 的映射

$$y = \tan\left(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad x \in (a,b).$$

这样就建立了$[a,b]$与$(-\infty,\infty)$间的一一对应.

(iii) 据复变函数的知识,映射 $w=\frac{Z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}Z-1}$实现了开上半平面与单位圆间的一一对应.

5. 下列各集能否同自然数集或$[0,1]$构成一一对应:

(i) 以有理数为端点的区间集;

(ii) 闭正方形$[0,1;0,1]$.

如果可能,试作这种对应方法.

解 (i) 以有理数为端点的区间集能同自然数集构成一一对应,方法如下:

设有理数的全体为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$,A_{ij}表示以r_i和$r_j(r_i<r_j)$为端点的区间,则以有理数为端点的区间全体为

$$\begin{array}{ccccc}
A_{12}, & A_{13} & A_{14}, & A_{15}, & \cdots \\
 & A_{23}, & A_{24}, & A_{25}, & \cdots \\
 & & A_{34}, & A_{35}, & \cdots \\
 & & & A_{45}, & \cdots \\
 & & & & \cdots
\end{array}$$

将这些区间排列成:$A_{12},A_{13},A_{23},A_{14},A_{24},A_{34},\cdots$,便建立了以有理数为端点的区间集与自然数集的一一对应.

(ii) 闭正方形$[0,1;0,1]$与$[0,1]$能构成一一对应,方法如下:

把闭正方形分解为互不相交的三部分

$$A=\{(x,y):0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\},$$
$$B=\{(0,y):0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$C=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}.$$

(1) 首先建立 $A=\{(x,y):0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 1\}$与半闭区间$(0,1]$的一一对应.

若把某一位起后面全是0的二进小数叫做二进有限小数,否则称二进无限小数,那么,$(0,1]$中的实数与二进无限小数是一一对应的.

对二进无限小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$(有无穷多个a_i为1),我们这样给它加括号,使得每个括号中只有最后一个数码为1,前的数码全为0.例如,二进无限小数

$$0.1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\cdots$$

加括号成$0.(1)(01)(1)(0001)(001)\cdots$,记作为

$$0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdots$$

显然,每个二进无限小数,均可加括号成为一个这样的符号序列$0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$;

反之,每个这样的符号序列均可去掉括号成为一个二进无限小数.

对每个$(x,y)\in A$,把x,y均表为二进无限小数,并加括号成符号序列

$$x = 0.\sigma'_1\sigma'_2\cdots\sigma'_n\cdots,\quad y = 0.\sigma''_1\sigma''_2\cdots\sigma''_n\cdots.$$

令$t=0.\sigma'_1\sigma''_1\sigma'_2\sigma''_2\cdots\sigma'_n\sigma''_n\cdots$,再去掉这个符号序列的括号,便得到一个二进无限小数,从而确定了一个实数$t\in(0,1]$.

反之,对于每个$t\in(0,1]$,把t表为二进无限小数,并加括号成符号序列

$$t = 0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots,$$

令$x=0.\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1}\cdots$,$y=0.\sigma_2\sigma_4\cdots\sigma_{2n}\cdots$,并去掉这两个符号序列的括号,便得到两个二进无限小数,从而确定了一点$(x,y)\in A$.

(2) 建立闭正方形在y轴上的点集$B=\{(0,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$与区间$[-1,0]$的一一对应.

这是容易的,只要令$y=t+1,t\in[-1,0]$.

(3) 建立$C=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}$与区间$(1,2]$的一一对应.

这也是容易的,只要令$x=t-1,t\in(1,2]$.

综合(1)、(2)、(3),我们建立了闭正方形$[0,1;0,1]$与闭区间$[-1,2]$的一一对应,再作$[-1,2]$到$[0,1]$的线性映射$y=\dfrac{1}{3}(x+1),x\in[-1,2]$就完成了.

6. 证明整系数多项式全体是可列集.

证　设n次整系数多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

由整数集$\mathbf{Z}$的可列性知零次整系数多项式的全体$P_0=\{p_0(x)=a_0,a_0\in\mathbf{Z}\}$为可列集.又据可列个可列集之并为可列集,可知一次整系数多项式的全体

$$P_1 = \{p_1(x) = a_0 + a_1x;\ a_0,a_1\in\mathbf{Z},\ a_1\neq 0\}$$

为可列集.依此由数学归纳法可证得n次整数多项式全体P_n为可列集,而一切整系数多项式所成之集P又是可列个可列集之并

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty}P_n,$$

从而是可列的.

7. 设$C[0,1]$表示$[0,1]$上一切连续函数所成的类,试证它的势为$\aleph$.

证　先证明全体实数列所成子集H对等于$(0,1)$.设H的子集

$$B = \{x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_n\in(0,1),n = 1,2,\cdots\},$$

作B到H的映射φ

$$\varphi(x) = \left(\tan\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \tan\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots,\tan\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots\right),$$

显然φ是B到H的一对一映射,故$H\sim B$.

下证$B\sim(0,1)$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

首先,把(0,1)中的任一数 x 与 B 中的元$(x_1,x_2,\cdots,\dot{x}_n,\cdots)$对应,便知(0,1)对等于 B 的一个子集.

反之,对 B 中任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,用十进无限小数表示 x_n

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$

$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,$$

$$\vdots$$

作无限小数 $\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots$,显然,$\psi(x)\in(0,1)$,且当 $x\neq y$ 时,$\psi(x)\neq\psi(y)$,故 B 对等于(0,1)的一个子集,于是由伯恩斯坦定理知 $B\sim(0,1)$,从而

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{(0,1)}} = \aleph.$$

现在来证明 $C[0,1]$的势为$\aleph$.

事实上,因一切常数函数 $f(x)=k$ 为$[0,1]$的连续函数,$\overline{\overline{C[0,1]}}\geqslant\aleph$是明显的.另一方面,把$[0,1]$中全体有理数排列成 $r_1,r_2,r_3,\cdots$,对于 $C[0,1]$中任一个 $f(x)$,令实数列$(f(r_1),f(r_2),f(r_3),\cdots)$与之对应,由函数的连续性可知,不同的函数对应的实数列也不同(若 $f(x)$与 $g(x)$在$[0,1]$中一切有理点上取值相同的话,便能由函数的连续性推得 $f(x)\equiv g(x)$).于是 $C[0,1]$对等于全体实数列 H 的一个子集,故有$\overline{\overline{C[0,1]}}\leqslant\overline{\overline{H}}=\aleph$.

据伯恩斯坦定理,$\overline{\overline{C[0,1]}}=\aleph$.

8. 设 M 是$[a,b]$上一切单调函数所成之集,则 $\overline{\overline{M}}=\aleph$.

提示　令$[a,b]$中全体有理点为 $r_1,r_2,\cdots$,因单调函数 f 的间断点可列,故可设其无理间断点为 $x_1,x_2,\cdots$,则函数 f 由实数列$\{f(r_1),f(x_1),f(r_2),f(x_2),\cdots\}$所确定,由实数列全体之势为$\aleph$,便得 $\overline{\overline{M}}\leqslant\aleph$.

至于 $\overline{\overline{M}}\geqslant\aleph$是易证的.

9. 设 A 是非空集,它的势大于 1,A 上的一一映射称为 A 的**置换**,试证存在 A 的一个置换f,使 $f(x)\neq x(\forall x\in A)$.

证　(i) 设 A 的势为$n>1$,可记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,令

$$f(a_i) = a_{i+1} \qquad (i = 1,2,\cdots,n-1), \qquad f(a_n) = a_1,$$

显然 $f(x)\neq x$ $(\forall x\in A)$, f 是A 上的一个置换.

(ii) 设 A 为可列集,记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,对任一自然数 k,$A=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{a_{ik+1},a_{ik+2},\cdots,a_{(i+1)k}\}=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$,每个 A_i 的势为k,由(i)知 A_i 上存在置换 $f_k^{(i)}$,使 $f_k^{(i)}(x)\neq x(\forall x\in A_i)$,故存在 A 上的置换 f_k,其中 $f_k(x)=f_k^{(i)}(x)$

$(x\in A_i, i=0,1,2,\cdots)$，满足 $f_k(x)\neq x(x\in A)$，且当 $k_1\neq k_2$ 时，$f_{k_1}\neq f_{k_2}$.

(iii) 设 A 的势为$\aleph$，则 $A\overset{g}{\sim}(0,1)$，对任一 $\alpha\in(0,1)$，令

$$f_\alpha(x)=x^\alpha\qquad(x\in(0,1)),$$

则 $f_\alpha(x)\neq x(\forall x\in(0,1))$，再令

$$g_\alpha(y)=g^{-1}\circ f_\alpha(g(y))\qquad(y\in A),$$

则 g_α 是 A 的一个置换，满足 $g_\alpha(y)\neq y\ (\forall y\in A)$，且当 $\alpha_1\neq\alpha_2, \alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$ 有 $g_{\alpha_1}\neq g_{\alpha_2}$.

10. 在上题中设 A 的势为偶数或可列，则那里所指的 f 可选得满足 $f(f(x))=x$，对一切 $x\in A$.

证　$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n-1},a_{2n}\}$，令 $f(a_{2k-1})=a_{2k}, f(a_{2k})=a_{2k-1}(k=1,2,\cdots,n)$，则 f 是 A 的一个置换，满足 $f(x)\neq x, f(f(x))=x(\forall x\in A)$.

设 A 为可列集，取 k 为偶数，$A_i=\{a_{ik+1},a_{ik+2},\cdots,a_{(i+1)k}\}$，$A=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$，对每个 A_i 存在 A_i 上的置换 $f_k^{(i)}$，满足 $f_k^{(i)}(x)\neq x, f_k^{(i)}(f_k^{(i)}(x))=x(\forall x\in A_i)$，故存在 A 上的置换 f_k，其中 $f_k(x)=f_k^{(i)}(x)(x\in A_i, i=0,1,2,\cdots)$，满足 $f_k(x)\neq x$，$f_k(f_k(x))=x\ (\forall x\in A)$.

11. 设 A 为无限集，试求它的一切置换所成的集的势.

证　当 A 为无限集时，由第 9 题(ii)，(iii)可知，A 的一切置换所成集的势$\geqslant A$ 的势. 当 A 的势 $=\aleph_0$ 时，记 A 的一切置换为 $\{f_\alpha\}$，易知 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\geqslant A$ 的一切子集所成集合之势 $=2^{\aleph_0}=\aleph$. 又设映射 $\widetilde{f}_\alpha\leftrightarrow\alpha_{x_1x_2\cdots}$，$\widetilde{f}_\alpha(a_i)=x_i\in A$，$x_i$ 互相独立，且每个 x_i 在 A 中取，则 $\{f_\alpha\}\subset\{\widetilde{f}_\alpha\}$，我们知道 $\{\alpha_{x_1x_2\cdots}\}$ 当 x_i 互相独立，每个指标在一个势为$\aleph_0$ 的集中变化时，$\{\alpha_{x_1x_2\cdots}\}\leftrightarrow\mathbf{R}^\infty=\{(x_n):x_n$ 为实数$\}$，参阅本书第二篇第一章§1.3 习题 4，故 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\leqslant\aleph$，从而 $\{f_\alpha\}$ 之势 $=\aleph$；

当 A 的势为$\aleph$时，首先同样有 A 的一切置换 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\geqslant 2^{\aleph}$，不妨设 $A=[0,1]$，我们用 M 表示$[0,1]$上一切有界实函数组成的集合，则可以证明 M 的势 $=2^{\aleph}$，从而 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\leqslant 2^{\aleph}$，故 $\{f_\alpha\}$ 之势 $=2^{\aleph}$.

12. 设 G_1, G_2 是 R_1 中的开集，且 $G_1\subset G_2$，试证 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中.

证　设(α_1,β_1)是 G_1 的任一构成区间，$x\in(\alpha_1,\beta_1)$，又设 G_2 中含 x 的构成区间是(α_2,β_2). 现证$(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

用反证法，假设 $\alpha_1<\alpha_2$，由于 $\alpha_2<x$，有 $\alpha_2\in(\alpha_1,x)\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset G_1\subset G_2$，这是不可能的(因$(\alpha_2,\beta_2)$是 G_2 的构成区间，$\alpha_2\overline{\in}G_2$)，于是 $\alpha_1\geqslant\alpha_2$.

同理可证 $\beta_1\leqslant\beta_2$. 因而$(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

13. 设 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中闭集,且 $F_1\cap F_2=\varnothing$,试证存在开集 G_1,G_2,使 $G_1\cap G_2=\varnothing$,而 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$.

证法 1　因 $F_1\cap F_2=\varnothing$,F_1,F_2 为闭集,则对 $x\in F_1$,有 $\rho(x,F_2)>0$;对 $y\in F_2$,有 $\rho(y,F_1)>0$. 作开邻域 $O(x,r(x))$与 $O(y,r(y))$,其中,$r(x)=\frac{1}{2}\rho(x,F_2)$,$r(y)=\frac{1}{2}\rho(y,F_1)$. 再令

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}O(x,r(x)),\qquad G_2=\bigcup_{y\in F_2}O(y,r(y)),$$

显然,G_1,G_2 都是开集,且 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$. 下证 $G_1\cap G_2=\varnothing$. 假设不然,则有 $a\in G_1\cap G_2$,即 $a\in G_1$ 且 $a\in G_2$,则必存在 $x_0\in F_1,y_0\in F_2$,使得

$$a\in O(x_0,r(x_0))\quad 且\quad a\in O(y_0,r(y_0)),$$

不妨设 $r(x_0)\geqslant r(y_0)$,则

$$\begin{aligned}\rho(x_0,F_2)&\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)\\&<r(x_0)+r(y_0)\leqslant 2r(x_0)=\rho(x_0,F_2),\end{aligned}$$

这是荒谬的,于是结论得证.

证法 2　作 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},$$

则 $f(F_1)=0,f(F_2)=1$,即 $F_1=f^{-1}(0)$, $F_2=f^{-1}(1)$. 现令

$$G_1=f^{-1}\left(\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\right),\qquad G_2=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right),$$

由连续函数的性质,开集的原像是开集,知 G_1,G_2 均为开集,且显然有

$$G_1\cap G_2=\varnothing,\qquad G_1\supset F_1,\qquad G_2\supset F_2.$$

14. 证明任何点集的内点全体是开集.

证　设 E 为任一点集,$\mathring{E}$为 E 的内点所成之集. 任取 $x_0\in\mathring{E}$,则 x_0 为 E 之内点,故有(α,β),使得 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset E$.

对于任意的 $x\in(\alpha,\beta)$,显然(α,β)是 x 的邻域,因此,x 为 E 之内点,即 $x\in\mathring{E}$,从而$(\alpha,\beta)\subset\mathring{E}$.

综上,对 $\mathring{E}$中的任一点 x_0,有(α,β),使得 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset\mathring{E}$. 于是,$x_0$ 为 $\mathring{E}$的内点,$\mathring{E}$为开集.

15. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$只取整数值,则 $f(x)$的连续点之集为开集;间断点之集为闭集.

提示　设 $x_0\in E=\{x:x\in\mathbf{R},f$ 在 x 处连续$\}$且 $f(x_0)=n_0$(整数),由连续性及已知条件可知,存在 $\delta>0$,使得对一切 $x\in O(x_0,\delta)$有 $f(x)=n_0$,于是 f 在

$O(x_0,\delta)$上连续.

16. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数,f 映开集为开集. 问 f 是否连续? 又连续映射是否映开集为开集?

解　映开集为开集的实函数不一定连续. 例如,在每个区间$[n,n+1](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上作康托尔三分集 P_n,令

$$G_n=[n,n+1]-P_n,\qquad P=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}P_n,\qquad G=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}G_n,$$

则 G 为开集. 设 G 的构成区间为(a_K,b_K),$K=1,2,\cdots$,在 $\mathbf{R}^1$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-x}{b_K-a_K}\right)\pi, & x\in(a_K,b_K),\ K=1,2,\cdots\\ 0, & x\in P.\end{cases}$$

显然,函数 f 在P 的一切点上不连续,但 f 在 $\mathbf{R}^1$ 上映开集为开集. 事实上,设 E 为 $\mathbf{R}^1$ 中任一开集,$E=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$,由于 P 不含任何区间,$(\alpha_i,\beta_i)\subset P$ 的情形是不可能发生的,因此只有两种可能:① $E\subset G$; ② E 的某些构成区间既含有 G 的点又有 P 的点.

① 当 $E\subset G$ 时,由本章习题 12,对任何 E 的构成区间(α_i,β_i),必有$(\alpha_i,\beta_i)\subset(a_K,b_K)$(其中$(a_K,b_K)$为 G 的某个构成区间). 据函数的定义,f 映(α_i,β_i)为开区间$\left(\tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\alpha_i}{b_K-a_K}\right)\pi,\ \tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\beta_i}{b_K-a_K}\right)\pi\right)$,因可列个开区间之并为开集,便知 f 映开集E 为开集.

② 当 E 的构成区间(α_i,β_i)既含有 G 的点又有P 的点时,由康托尔集的构造知,区间(α_i,β_i)必含有 G 的构成区间,于是 f 映E 为开集 $\mathbf{R}^1$.

至于连续映射不一定映开集为开集的例子是容易举的. 比如 $f(x)=\sin x$,在 $\mathbf{R}^1$ 上连续,但映开集$(0,4\pi)$为闭集$[-1,1]$.

17. 试证欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交,每个开集可表为可列个闭集的并.

证　先证明一个重要结论:对任意集 $A\subset\mathbf{R}^n$, $d>0$,点集

$$G=\{a:\rho(a,A)<d\}$$

必为开集.

事实上,$\forall x\in G$,有 $\rho(x,A)<d$,令 $h=d-\rho(x,A)$,则 $O\left(x,\dfrac{h}{2}\right)\subset G$,故 x 为G 之内点,从而 G 为开集,且显然有 $G\supset A$.

现证前半题. 设 F 为闭集,令 $G_n=\left\{a:\rho(a,F)<\dfrac{1}{n}\right\}(n=1,2,\cdots)$,由上述可知,$G_n$ 为开集,且 $G_n\supset F$. 下证 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. 事实上,$\forall x\in F$,有 $\rho(x,F)=0<$

$\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，于是 $x\in G_n(n=1,2,\cdots)$，$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. 反之，$\forall x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 $x\in G_n(n=1,2,\cdots)$，$\rho(x,F)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$. 令 $n\to\infty$，得 $\rho(x,F)=0$，因 F 为闭集，知 $x\in F$.

再证后半题. 设 G 为开集，则 $\mathscr{C}G$ 为闭集，由前半题有

$$\mathscr{C}G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n \qquad (\text{其中 } G_n \text{ 为开集}),$$

于是

$$G=\mathscr{C}\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n \qquad (\text{其中 } \mathscr{C}G_n \text{ 显然为闭集}).$$

注　在 $\mathbf{R}^1$ 中，用下面证法证明较为简单：

先设 G 为开集，G 的结构表示为 $G=\bigcup\limits_{K}(\alpha_K,\beta_K)$. 对每个开区间 (α_K,β_K)，有

$$(\alpha_K,\beta_K)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}\right].$$

于是

$$G=\bigcup_{K}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}\right].$$

再设 F 为闭集，则 $\mathscr{C}F$ 为开集，由上述已证的结果，有

$$\mathscr{C}F=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m \qquad (\text{其中 } F_m \text{ 为闭集}),$$

于是

$$F=\mathscr{C}\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m=\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{C}F_m \qquad (\text{其中 } \mathscr{C}F_m \text{ 显然是开集}).$$

18. 设 E 是康托尔集的补集的构成区间的中点所成的集，求 E'.

解　记康托尔集为 P_0，其补集为 G_0.

若 $x\in G_0$，则 x 必属于 G_0 的某一构成区间 (α_i,β_i). 由于在 x 的邻域 (α_i,β_i) 中，只有一点 $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in E$，故 x 不可能是 E 的聚点.

若 $x\in P_0$，由康托尔集的构造知，x 的任一邻域 $O(x,\varepsilon)$ 必含有 G_0 的某个构成区间 (α_i,β_i)，于是必有 E 的点 $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in O(x,\varepsilon)$，故 x 为 E 的聚点.

综上便得 $E'=P_0$.

19. 设点集列 $\{E_n\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 中的渐缩序列：$E_1\supset E_2\supset\cdots$，且每个 E_n 均为非空闭集. 试证交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 非空.

证法 1　在每个 E_n 中各取一点 x_n，则 $\{x_n\}$ 为有界点列，于是存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $x_{n_k}\to x_0$，则对任何 n，当 $n_k>n$ 时，$x_{n_k}\in E_{n_k}\subset E_n$，故 x_0 为 E_n 的聚点.

由 E_n 为闭集知 $x_0 \in E_n$，因而 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，这就证明了 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 非空.

证法 2 反设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$，以 $(a-1, b+1)$ 为基本集，对每个 E_n 取补，则渐张开集序列 $\{\mathscr{C}E_n\}$ 覆盖 $[a,b]$，于是存在有限个开集 $\mathscr{C}E_{n_1}, \mathscr{C}E_{n_2}, \cdots, \mathscr{C}E_{n_k}$ 覆盖 $[a,b]$，不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_K$，则有

$$\mathscr{C}En_K = \bigcup_{i=1}^{K} \mathscr{C}En_i \supset [a,b],$$

注意到 $En_K \subset [a,b]$，便知 $En_K = \varnothing$，这与 E_n 均非空相矛盾.

20. 设 n 为一自然数，令 $P_n = \{k \in \mathbf{N}: k$ 为 n 的约数$\}$. 对任意的 $a, b \in P_n$，约定 $a \leqslant b$ 的意义为 a 是 b 的约数. 试证 P_n 以 $\leqslant$ 为序是一半序集. 又，欲使 P_n 为全序集，对 n 应有什么要求？

解 P_n 为半序集显然，且容易验证当 $n = 2^m$ 时，P_n 为全序集，一般地，当 $n = k^m, k, m \in \mathbf{N}, P_n$ 必是全序集.

21. 称 X 的子集所成之类 $\mathscr{A}$ 有性质 (σ)：若 X 非 $\mathscr{A}$ 中有限个元的并. 试证：若 $\mathscr{A}$ 有性质 (σ) 时，则存在 X 的子集的极大类 $\mathscr{B}$ 具有性质 (σ) 且包含 $\mathscr{A}$，并证明，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$，且 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{B}$，则必有某个 $A_i \in \mathscr{B}$.

证 (1) 设具有性质 (σ) 且包含 $\mathscr{A}$ 的 X 的一切子集类所成之集为 X_0

$$X_0 = \{\mathscr{D}: \mathscr{D} \supset \mathscr{A}, \text{ 且 } X \text{ 非 } \mathscr{D} \text{ 中有限个元的并}\},$$

题目的意思就是要证明 X_0 有极大元 $\mathscr{B}$.

显然，X_0 中元按平常集的包含关系成一非空半序集，对 X_0 中任一全序子集 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$，令 $\mathscr{D}_0 = \bigcup\limits_{\alpha} \mathscr{D}_\alpha$，下证 $\mathscr{D}_0$ 为 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 的上确界.

对于每个 $\mathscr{D}_\alpha$，$\mathscr{D}_\alpha \subset \mathscr{D}_0$ 是显然的，只要证 $\mathscr{D}_\alpha \in X_0$ 就行了. 首先有 $\mathscr{D}_0 \supset \mathscr{A}$，其中 $\mathscr{D}_0$ 有性质 (σ)，若不然，则有 $\mathscr{D}_0$ 的有限个元 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，使 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = X$，设 $A_1 \in \mathscr{D}_{\alpha_1}, A_2 \in \mathscr{D}_{\alpha_2}, \cdots, A_m \in \mathscr{D}_{\alpha_m}$，由于 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 为全序集且 m 为有限，故这 m 个 $\mathscr{D}_\alpha$ 中必有一个 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$ 包含其余的 $m-1$ 个，于是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均属于 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$，这与 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$ 具有性质 (σ) 相矛盾.

这就证明了 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 有上确界，从而由佐恩引理知 X_0 有极大元.

(2) 反设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均不属于 $\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B} \cup \{A_1\}, \mathscr{B} \cup \{A_2\}, \cdots, \mathscr{B} \cup \{A_n\}$ 中至少有一个具有性质 (σ). 若不然，则有

$$X = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_{ki}} \cup A_i \quad (\text{各 } B_{i_{ki}} \text{ 为 } \mathscr{B} \text{ 的元}, i = 1, 2, \cdots, n),$$

上式对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 作交，可得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_{ki}}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n),$$

因 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{B}$，且每个 $B_{i_{ki}} \in \mathscr{B}$，上式说明 X 是 $\mathscr{B}$ 中有限个元之并，这与

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com