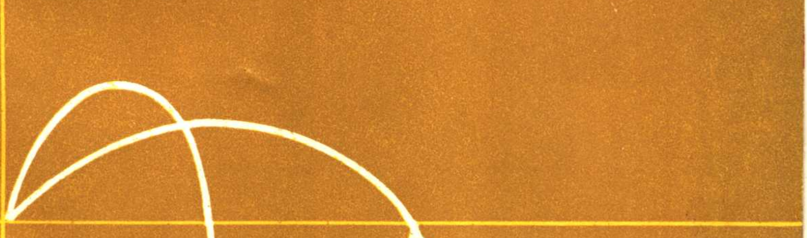
高等工业专科学校试用教材

高等数学

北京建筑工程学院数学教研室 编



北京师范学院出版社

高等工业专科学校试用教材

高等数学

北京建筑工程学院数学教研室编

北京师范学院出版社

1988年·北京

内 容 提 要

全书共十章．包括极限与连续，导数和微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何与向量代数，二元函数的微分学，二重积分与曲线积分，无穷级数．每章配有习题，书后附简明积分表及习题答案．

本书在内容选择和结构体系方面努力体现专科特点，重点突出，通俗易懂．适合工业专科学校使用，也可供夜大学、职工大学及某些大学本科生使用，此外，还可供工程技术人员和具有高中水平的读者参考和自学．

高等工业专科学校试用教材

高 等 数 学

北京建筑工程学院数学科研室编

*

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防工业印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：16.875　字数：371 千

1988 年 6 月北京第 1 版　1988 年 6 月北京第 1 次印刷

印数：0,001－12,000 册

ISBN 7－81014－167－8/G·160

定 价：4.90 元

前　言

最近几年我国高等工业专科教育发展迅速，但适合工业专科学校教学的高等数学教材却很少．很多院校都是借用本科教材，这给教与学带来一定困难．特别是对两年制(或两年半制)的大专院校，要在较短时间内完成高等数学基础理论的教学，矛盾更为突出．为了适应高等工业专科学校教学的需要，提高教学质量，我们编写了这本较能体现专科特点、讲授时数较为合适的高等数学教材，同时本书还有配套教材《工程数学》也将出版，供有关专业选用．

本书在内容选择和结构体系方面，努力体现专科特点，比较注意学生基本运算能力的训练和运算方法上的指导．对于难懂的内容，我们特别注意结合学生实际，利用几何直观，由浅入深地阐述．为了便于自学，本书力求写得通俗易懂，对于易混淆的概念和应注意的问题，我们着意指明．此外，本书还尽可能地注意理论联系实际以及对学生自学能力、分析和解决问题能力的培养．

本书讲授时数为108～144学时(包括习题课)．部分带*号的内容可供多于108学时和不同专业需要选用．

本书的试用稿曾在北京建筑工程学院的大专班、夜大、分院、干训班及本科少学时专业试用了四年，反映较好．在此基础上，广泛征求了任课教师和广大学生的意见，并结合我们的教学实践，重新编写成本书．本书前五章由边果慧编写，后五章由李友柏编写，全稿经王祟寿副教授仔细审阅，并提出了不少改进意见，在此表示感谢．同时也对曾参加本书试用稿

编写的其他同志以及任课教师的支持和帮助，表示衷心感谢。

由于我们水平有限，编写时间也比较仓促，书中一定有不少缺点，敬请读者批评指正。

编者 1987 年 10 月

目　　录

第一章　极限与连续

高等数学的一切基本理论和运算法则都是建立在极限理论的基础上的．掌握极限理论，是学好高等数学的前提．本章在复习函数有关概念之后，着重介绍函数极限的基本理论和主要运算方法，并讨论函数的连续性．

§1.1　函　　数

一、函数概念

定义　设有变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量，D 叫函数的定义域．

为了深刻理解函数概念，我们作以下几点说明：

1. 函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示变量 x 和 y 之间的对应关系，称为函数关系．如果同时考察几个不同函数时，要用不同的字母来表示各自的函数关系，例如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等等．

注意，$f(x)$ 是一个完整的函数记号，不可理解为 f 乘以 x，正如 $\operatorname{tg} x$ 不能理解为 tg 乘以 x 一样．

2. 函数 $y=f(x)$ 的定义域常用区间来表示．确定函数定义域的一般原则是：

（1）在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意

义来确定，例如正方形的面积 $y=x^2$，其定义域是 $(0, +\infty)$.

(2) 由数学式子给出的函数，它的定义域就是使算式有意义的全体实数. 例如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1)$.

3. 函数概念中的两个要素是：函数关系与定义域. 两个函数只有当它们的函数关系与定义域完全相同时，才能认为是同一个函数. 如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，由于它们的定义域不同，故表示两个不同的函数.

4. 自变量 x 在其变化范围内取定 x_0，函数 y 所对应的值叫函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值，记作 $f(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 的函数值的全体称为函数的值域：$V=\{y|y=f(x), x\in D\}$. 例如，函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，其值域为 $[-1, 1]$.

5. 函数的表示法通常有三种，即解析法、表格法和图示法. 本课程所讨论的函数一般都是用解析法表示，而且常常同时画出它的图形，以利对函数进行分析研究.

在自然科学及工程技术中，用解析式表示函数时，经常还会遇到在定义域的不同范围内用不同的式子表示的函数. 例如脉冲发生器产生的一个三角波（图 1-1），它的电压 u 与时间 t 的函数关系为

$$u=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10;\\[2ex] 30-\dfrac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20.\end{cases}$$

它表示了在不同时间范围内，电压变化的不同规律. 当 $t=2$ 时，$u=\dfrac{3}{2}\times 2=3$；当 $t=12$ 时，$u=30-\dfrac{3}{2}\times 12=$

12. 又如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

我们称这种用几个式子分段表示的函数为分段函数，它表示的是一个函数.

6. 如果自变量 x 在定义域中每取定一个值时，函数 y 都只有唯一确定的值与之对应，这种函数叫单值函数，否则叫多值函数. 例如反三角函数 $y=\operatorname{Arc}\sin x$ 是多值函数，但将 y 限制在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，它就是单值的. 今后如不特别声明，函数都是指单值函数. 对于多值函数，可以拆成若干个单值函数，其中每一个单值函数叫做该多值函数的一个单值支.

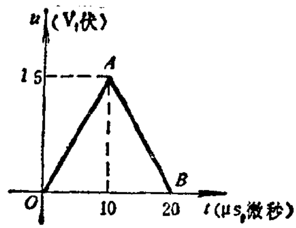


图 1-1

7. 如果函数关系可以用含自变量的算式表示，这样的函数叫显函数. 如果变量 x 和 y 的函数关系由方程

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

来确定，我们称这种函数为由方程(1)所确定的隐函数. 例如方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1, 1]$ 上确定了双值隐函数

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}.$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$ 都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加（或单调减少）.

在某一区间内单调增加或单调减少的函数统称为该区间内的单调函数,该区间叫函数的单调区间.

例如，$y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的,在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的,但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

单调增加函数的图形从左向右为上升的曲线，单调减少函数的图形从左向右为下降的曲线.

2. 函数的有界性

定义 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a, b) 内的一切 x 值,都有不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,其中 M 是一个正常数,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数，因为 x 取任何实数时,都有 $|\sin x| \leqslant 1$ 成立. 而函数 $y=\operatorname{tg} x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数，因为不存在正数 M，使 $|\operatorname{tg} x| \leqslant M$ 对于 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的一切 x 值都成立，但是 $y=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 内是有界的,可取 $M=1$，对于区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 内的一切 x 值,都有 $|\operatorname{tg} x|<1$ 成立.

有界函数的图形界于两条水平直线 $y= \pm M$ 之间.

3. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-l, +l)$ 内有定义，

如果对于 $(-l, +l)$ 内的一切 x，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于 $(-l, +l)$ 内的一切 x，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对于定义域内的任何 x 值，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期. 一般地，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

显然，如果函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $nT(n=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ 都是该函数的周期.

例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\operatorname{tg} x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于周期为 T 的函数 $y=f(x)$，只要作出其一个周期（如 $[0, T)$）上的图形，将该图形沿 x 轴向左、向右周期性地延拓出去，就可得到 $y=f(x)$ 的全部图形.

三、反函数及其图形

定义 设函数 $y=f(x)$ 的值域为 V，如果对于 V 中的每个 y 值，由关系式 $y=f(x)$ 都可确定出 x 值与之对应，这样就得到一个定义在 V 上以 y 为自变量、x 为因变量的函数