高等学校
数学教材
习题集

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编
盛祥耀 陈魁 胡金德

国家行政学院出版社

高等学校数学教材习题集

高等数学

编　著　盛祥耀　1989～1995 年数学命题小组组长
　　　　蔡燧林　1992～2000 年数学命题组组长
　　　　胡金德　1989～1997 年数学命题小组组长
　　　　陈　魁　著名考研辅导老师
策　划　东方飞龙

国家行政学院出版社

内容简介

本套习题集是按照教育部颁布高等学校本科数学(非数学专业)数学大纲与最新考研数学大纲编写的,全套书包括高等数学习题集、线性代数习题集、概率论与数理统计习题集三本书,列举了足够数量的有针对性的习题,并作了详尽的分析,力求举一反三,在习题的安排上也考虑到与大学本科要求相衔接,按步就班,由浅入深达到全面复习,深入掌握。

本套习题集适合考研、高等学校数学(非数学专业)期末考试复习使用,也可供大专院校教师及其他读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等学校数学教材习题集/陈魁,盛祥耀,胡金德主编,
北京:国家行政学院出版社,2001
ISBN 7-80140-183-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②盛… ③胡… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051803 号

高等学校数学教材习题集
陈魁 盛祥耀 胡金德 主编

国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码: 100089
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×960 1/16 开本 48.75 印张 920 千字
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-183-2/O.18 定价:51.00 元(全三册)

序　言

这本习题集是根据高等学校数学教学大纲(本科非数学专业)、全国硕士研究生入学考试数学大纲、近年来研究生入学试卷和我们参加考研辅导班所积累的经验编写而成。

这本习题集包含了两方面内容,一是习题,一是解答,两者相辅相成。习题按章节分,每一章又分填空、选择、一般题和综合题四类。填空题主要体现该章的基本概念、理论和较简单计算题,以后者为主;选择题主要考查对该章基本概念和理论的理解深度和广度,以及对公式掌握的正确性;一般题主要安排有一定技巧的计算题,一般的应用题和一般的证明题;综合题主要安排有一定难度的计算题,较为灵活的证明题和较为综合的应用题。题解是体现本习题集特点的重要方面,它不仅给出正确答案,而且是体现做题的基本方法,基本思路以及其它一些重要的手段。例如有关微分中值定的习题解答,它回答了读者原本对这类题感到困惑而无从下手的难关,从而变为心中有数,迎刃而解。不等式证明的题解也是这样有了下手之处,而不会盲目瞎碰。

本习题集在习题的安排上也考虑到与大学本科要求相衔接,按步就班,由浅入深,达到全面复习,深入掌握,满足考研的要求。

最后要请考研生注意,数学共有四个卷种,从内容上的区别是:

数学一:本书全部内容(除差分方程部分外)。

数学二:不要求差分方程、多元函数微分学及积分学和无穷级数。

数学三:不要求泰勒公式、曲率、三重积分、曲线积分、曲面积分和高阶可降阶的微分方程。

数学四:不要求柯西定理、泰勒公式、曲率、三重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数和微分方程。

由于作者水平所限,错误之处在所难免,敬请读者指正。

蔡遂林　盛祥耀

目　　录

第一章　函数、极限、连续

一、填空题

1. 函数 $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$的定义域是________.

2. 函数 $\lg(x^2-2x)$的定义域是________.

3. 函数$\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$的定义域是________.

4. 设函数 $y=y(x)$是由方程 $x^2-\arccos y=\pi$ 所确定,则 $y=y(x)$的定义域是________.

5. 设函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域是________$(a>0)$.

6. 设 $f(x)=\sin x, f(\varphi(x))=1-x^2$,则 $\varphi(x)$的定义域是________.

7. 设 $f(x)$为奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2^x+x-1$,则当 $x<0$ 时,$f(x)=$________.

8. 将函数 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$表示为一个奇函数与一个偶函数之和________.

9. 设 $f(x)$以 1 为周期的函数,且在$[0,1]$上的表达式

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right], \\ -x, & x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]. \end{cases}$$

写出 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式________.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,则$\overbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}^{n}=$________.

11. 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$,$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0. \end{cases}$则 $\varphi(f(x))=$________.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2-1)^5}{(x-1)^4(2+3x)^7}=$________.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=$________.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=$________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\tan x\ln(1+x^2)}=$________.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=$________.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}=$________.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=$________.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}=$________.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=$________.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=$________.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}\ (a>0)=$________.

24. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,则 $a=$________,$b=$________.

25. 当 $x\to 1$ 时,$1-x$ 与 $a(1-\sqrt[3]{x})$为等价无穷小,则 $a=$________.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1.\end{cases}$则它的间断点是________.

27. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-4\times 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}}$的间断点是________,间断点类型是________.

28. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}}\arctan\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 0,x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=1.\end{cases}$ 的间断点是________,其类型是________.

29. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{x}{\pi}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

30. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx+x^2}{5-2nx}$,则 $f(x)$的连续区间是________.

二、选择题

1. 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$,$g(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$,$\psi(x)=\ln x$,则 $f(x)g(x)\psi(x)$的定义域是(　　).

(A) $(-\infty,+\infty)$;

(B) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

(C) $\varnothing$;

(D) $(0,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,$g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $f(g(x))\cdot g(f(x))$的定义域是(　　).

(A) $(-\infty,+\infty)$;

(B) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(C) $x\neq -1,0,1$;

(D) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

3. 设函数 $y=y(x)$是由方程组$\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t.\end{cases}$所确定,则 $y(x)$的定义域是(　　).

(A) $(-\infty,+\infty)$;　　(B) $x\neq\dfrac{2n+1}{2}\pi(n=0,\pm 1,\cdots)$;

(C) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；　　(D) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，则下列命题正确的是(　　).

(A) $f(x)+a$ (a 为任意实数)是奇函数；

(B) $f(x+a)$ (a 为任意实数)是奇函数；

(C) $f(-x)$ 是奇函数；

(D) $f(x^2)$ 是奇函数.

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数与偶函数，则(　　).

(A) $f(g(x))$ 为奇函数；　　(B) $g(f(x))$ 为奇函数；

(C) $f(g(x))$ 为偶函数；　　(D) $g(f(x)+2)$ 为偶函数.

6. 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格的增函数与严格减函数，则(　　).

(A) $f(g(x))$ 为减函数；　　(B) $f(g(x))$ 为增函数；

(C) $f(x)g(x)$ 为减函数；　　(D) $\frac{g(x)}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 为增函数.

7. 设 $f(x)$ 是非零的周期函数，则下列命题正确的是(　　).

(A) $xf(x)$ 一定是周期函数；　　(B) $f(x^2)$ 一定是周期函数；

(C) $f^2(x)$ 一定是周期函数；　　(D) 以上命题均不正确.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 则下列命题正确的是(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0;\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0;\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

9. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $f(x)$(　　).

(A) 在 x_0 处有定义且 $f(x_0)=a$；

(B) 在 x_0 处有定义，但 $f(x_0)$ 不一定等于 a；

(C) 在 x_0 处可以没有定义；

(D) 存在一个 $\delta>0$，x_0 的 δ 空心邻域内 $f(x)\neq a$.

10. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，而 $g(x)$ 的极限存在，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在；

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$ 不存在；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}(f(x)>0)$ 不存在；

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}(a\,f(x)+b\,g(x))$ ($a\cdot b\neq 0$ 的常数)不存在.

11. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$；　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)g(x)]=0$；

(C) $g(x)\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$.

12. 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则下列极限存在的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\alpha}$($\alpha$ 为任意实数)；　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$；　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{f(x)}$.

13. 设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$存在，则下列命题正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在；　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在；

(C) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\ln f(x)$存在；　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ln g(x)$存在.

14. 下列命题正确的是(　　).

(A) 有界函数乘无界函数仍是无界函数；

(B) 无界函数乘无穷大量仍是无穷大量；

(C) 无穷小量乘任一个大实数仍是无穷小量；

(D) 两个无穷大量之和仍是无穷大量.

15. 下列命题正确的是(α,β 均为 x 的函数)(　　).

(A) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha\cdot\beta=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=0$ 或$\lim\limits_{x\to\infty}\beta=0$；

(B) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则当 $x\to\infty$时，α 是 β 的高阶无穷小；

(C) 若 α 为有界函数，且$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha\beta=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\beta=0$；

(D) 若当 $x\to\infty$时，α 是无穷小量，且$\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha+\beta)=0$，则当 $x\to\infty$时，β 是无穷小量.

16. 下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $f(x)$在点 x_0 处连续，则存在一个 $\delta>0$，$f(x)$在 x_0 的 δ 邻域内连续；

(B) 如果 $f(x)$在区间(a,b)内每一点都有极限，则 $f(x)$在(a,b)内有界；

(C) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则存在一个 $\delta>0$，在 x_0 的 δ 空心邻域内，总有使 $f(x)=0$ 的点；

(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$，则存在一个 $\delta>0$，在 x_0 的 δ 空心邻域内总有 $f(x)>0$.

17. 当 $x\to 0$ 时，3^x-1 是 x 的(　　).

(A) 高阶无穷小；　　(B) 低阶无穷小；

(C) 同阶但非等价无穷小；　　(D) 等价无穷小.

18. 设当 $x\to 1$ 时，$1-\dfrac{m}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}$是与 $x-1$ 等无穷小，则 m 等于(　　).

(A) 2；　　(B) 3；　　(C) 4；　　(D) 5.

19. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量最高阶的是(　　).

(A) xe^x；　　(B) $1-\cos x^{\frac{2}{3}}$；

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$；　　(D) $\sin x-\tan x$.

20. 当 $x\to 0$ 时，无穷小$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ 与(　　).

(A) $\sqrt[3]{x}$ 为同阶无穷小；　　(B) $\sqrt[3]{x^2}$ 为同阶无穷小；

(C) x 为同阶无穷小；　　(D) $x^{\frac{4}{3}}$为同阶无穷小.

21. 设 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，下列命题正确的是(　　).

(A) Δy 不是无穷小量；

(B) Δy 是无穷小，但不是 Δx 的高阶无穷小；

(C) Δy 是 Δx 的高阶无穷小；

(D) 以上命题均不对.

22. 当 $x\to\infty$时，$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin x$（　　）.

(A) 是$\frac{1}{x^2}$的同阶无穷小；

(B) 是$\frac{1}{x^2}$的高阶无穷小；

(C) 是$\frac{1}{x^{2-\delta}}$ $(0<\delta<2)$的高阶无穷小；

(D) 是$\frac{1}{x^3}$的高阶无穷小.

23. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)$，$g(x)$均为 x 的同阶无穷小，则下列命题正确的是（　　）.

(A) $f(x)-g(x)$一定是 x 的高阶无穷小；

(B) $f(x)+g(x)$一定是 x 的高阶无穷小；

(C) $f(x)g(x)$一定是 x 的高阶无穷小；

(D) $\frac{f(x)}{g(x)}$一定是 x 的高阶无穷小.

24. “$f(x)$在点 x_0 处连续”是“$|f(x)|$在点 x_0 处连续”的（　　）.

(A) 必要条件但不是充分条件；　　(B) 充分条件但不是必要条件；

(C) 充分且必要条件；　　(D) 既不充分又非必要条件.

25. $f(x)=\begin{cases}0, & x=1,-2,\\ \dfrac{e^{\frac{-1}{(x-1)^2}}}{1-e^{\frac{x+1}{x+2}}}, & x\neq 1, x\neq -2.\end{cases}$ 的间断点个数（　　）.

(A) 1 个；　　(B) 2 个；　　(C) 3 个；　　(D) 4 个.

26. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 2-x, & x\in(1,2),\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 2-x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}\quad x\in(0,1)$$

则 $f(g(x))$在$(0,1)$内（　　）.

(A) 有一个间断点；　　(B) 有两个间断点；

(C) 有无穷多个间断点；　　(D) 没有间断点.

27. 记 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 函数 $\operatorname{sgn}\left(\sin^2\frac{a}{x}\right)$（其中 $a\neq 0$ 的常数）间断点的个数（　　）.

(A) 一个；　　(B) 有无穷多个；

(C) 与 a 有关；　　(D) 无间断点.

28. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有间断点. 则

(　　).

(A) $g(f(x))$必有间断点；　　(B) $g(f^2(x))$必有间断点；

(C) $f(g(x))$必有间断点；　　(D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$必有间断点.

29. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $x=0$ 是间断点的函数是(　　).

(A) $\max(f(x),g(x))$；　　(B) $\min(f(x),g(x))$；

(C) $f(x)-g(x)$；　　(D) $f(x)+g(x)$.

30. 要使

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\pi x+be^{\cos\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内为连续函数，则(　　).

(A) $a=\pi,b=0$；　　(B) $a=\pi,b=1$；

(C) $a=\dfrac{1}{\pi},b=1$；　　(D) $a=\dfrac{1}{\pi},b=0$.

三、一般题

1. 设 $f(x)$以 2 为周期的周期函数，且在$(0,2)$内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,2),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

写出 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式.

2. 设曲线 $y=f(x)$关于两条直线 $x=a,x=b$ $(b>a)$对称，证：曲线 $y=f(x)$必有关于无穷多条对称直线.

3. 设函数 $y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上严格增，且在区间$(-\infty,+\infty)$内为偶函数，试解方程

$$f(x)=f\left(\frac{24}{x+10}\right).$$

4. 设 $f(x)$恒满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1)$时，$f(x)=x(1-x)^2$. 试讨论 $f(x)$在 $x=2$ 处的连续性.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

试讨论 $x=0$ 处的连续性.

6. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$，试讨论 $f(x)$在$(0,+\infty)$内的连续性.

7. 找出函数 $f(x)=2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$的间断点，并判断其类型.

8. 证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，且它不超过 $a+b$，其中 $0<a<1,b>0$.

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

10. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{(x+b)^2})$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1+x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+2^x)$.

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(a+x)-\ln x]$.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{nx}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)-\tan a}{x}$.

26. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2001}}{n^k-(n-1)^k}=a$，求 a 与 k $(a\neq 0)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^a}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

四、综合题

1. 设对于任意实数 x，恒有 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，证明函数 $f(x)$ 以 6 为周期的周期函数.

2. 如果对在 (a,b) 内任意 x_1,x_2，恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2$. 证明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x)$.

4. 问 p 等于多少时，当 $x\to0^+$ 时，$\sin\sqrt{x\sqrt{x}}$ 与 x^p 为等价无穷小？

5. 如果对于一切正 x，恒有 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leqslant\dfrac{\varphi(x)}{x+\sqrt{x^2+1}}\leqslant\dfrac{1}{x}$. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

6. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$. 试求 c.

7. 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，b,c 不变，当 $a\to0$ 时，其根的极限是多少？

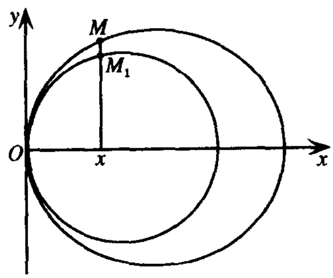
8. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n+1]{x}-\sqrt[n]{x})\ (x>0$ 且 $x\neq1)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n(a>0,b>0)$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

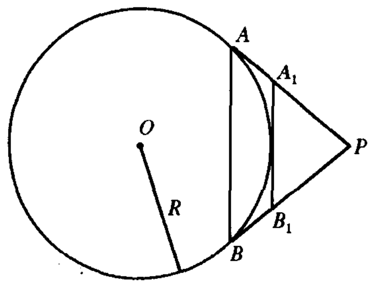
11. 问 $m=?$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^m-x]$ 存在且不为 0. 其中 c 为大于 4 的整数.

12. 半径分别为 R,r 的两个圆相切于 y 轴的原点. 如图. 如果当 $x\to0^+$ 时，线段 MM_1 与 $\angle MOM_1$ 分别都与 x^k 同阶. 试分别确定 k.



13. 设半径为 R 的圆⊙O，OP 为连接圆心与圆外一点 P，由 P 点作⊙O 的切线 PT(T 为切点)，过 T 作 OP 的垂线 TN(N 为垂足)，点 A 为 OP 与圆之交点. 试证当 $P\to A$ 时，线段 AP 与 AN 是等阶无穷小.

14. 在圆弧 AB 的中点和 A,B 处均引圆的切线，如图，试证：当弧 AB 趋于 0 时，$\triangle APB$ 与 $\triangle A_1PB_1$ 的面积之比趋于 4.



15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$($n$ 为正整数).

16. 设 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$, $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$ 存在，并求此极限.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

20. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\cos\cos\cdots\cos x}_{n个}$ 存在且其极限是方程 $\cos x-x=0$ 的根.

21. 设数列 u_n 由下式定义

$$u_1=1, u_{n+1}=\frac{u_n+3}{u_n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

试证数列 u_n 收敛，并求其极限.

22. 设数列 u_n 由下式定义

$$u_1=2, u_{n+1}=\frac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

试证数列 u_n 收敛，并求其极限.

23. 设数列 u_n 由下式定义

$$u_1=k, u_{n+1}=\frac{p}{u_n}+1\quad(n=1,2,\cdots).$$

其中 $k>0, p>0$. 试证数列 u_n 收敛于方程 $x^2-x-p=0$ 的正根.

24. 证明方程 $\dfrac{2}{x-\lambda_1}+\dfrac{3}{x-\lambda_2}+\dfrac{4}{x-\lambda_3}=0$. 分别在区间 (λ_1,λ_2), (λ_2,λ_3) 内各有一个且仅有一个实根.

25. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $0<f(x)<1$ $(x\in[0,1])$. 证：在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

26. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$，证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

27. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

28. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}(f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)).$$

29. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意的 $x\in[a,b]$，总存在 $y\in[a,b]$，使 $|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

30. 设对于任意实数 x,y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

31. 设 $f(x),g(x)$ 为连续函数 $(x\in[a,b])$，证明 $\max\limits_{x\in[a,b]}(f(x),g(x))$，$\min\limits_{x\in[a,b]}(f(x),g(x))$ 也是连续函数.

第二章 导数、微分及其应用

一、填空题

1. $(\sin^2 x \cdot \sin(x^2))' =$ ________.

2. $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' =$ ________.

3. $(\arcsin\sqrt{1-x^2})' =$ ________.

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{a^x+1}{a^x-1}\right) =$ ________.

5. $\mathrm{d}(\ln^2(2-x)) =$ ________.

6. $\mathrm{d}(a^{\sin^3\frac{1}{x}}) =$ ________.

7. $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' =$ ________.

8. $(x^x+a^x+x^a)' =$ ________.

9. $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)' =$ ________.

10. $(\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}})' =$ ________.

11. 设函数 $y=y(x)$ 在 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$，且 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$，则 $y(1)$ = ________.

12. 设 $y=f(\sin^2 x)$，f 二阶可导，则 $y'=$ ________，$y''=$ ________.

13. $\left(\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\right)' =$ ________.

14. $\left(\sqrt{a^2-x^2}-x\arccos\dfrac{x}{a}\right)' =$ ________. $(a>0)$

15. $[(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}]' =$ ________.

16. $[\ln(x\sin x\sqrt{1-x^2})]' =$ ________.

17. $\left(\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\right)' =$ ________.

18. $\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' =$ ________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x} =$ ________.

20. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x =$ ________.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right) =$ ________.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}) =$ ________. $(a>0,b>0)$

23. $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}\cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=$________.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$________.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x]=$________.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\frac{n\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=$________.

27. 函数 $y=4x^2-\ln(x^2)$的增区间________,减区间________.

28. 函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的极大点________,极小点________.

29. 设点(1,3)是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点,则 $a=$________,$b=$________.

30. 曲线 $y=\frac{x^3}{1+x^2}$的渐近线方程________.

31. 曲线 $y=e^{\frac{-1}{x^2}}\arctan\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$的渐近线方程________.

32. 函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$在区间[0,2]上的最大值________,最小值________.

33. 曲线 $y=4x-x^2$ 在点 $x=$________,$y=$________处曲率为最大.

二、选择题

1. 设 $f(x)$处处可导,则下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$;

(B) 如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;

(C) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$;

(D) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. 设 $f(x)$在$(0,a)$处处可导,则下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=+\infty$;

(B) 如果 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$;

(C) 如果 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=a$,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=a$;

(D) 如果 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=a$,则 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=a$.

3. 设$\lim\limits_{x\to0}f(x)=a_0$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a_0}{x}=a_1$,则(　　).

(A) $f(x)$在 $x=0$ 处不一定连续;

(B) $f(x)$在 $x=0$ 处连续,但不可导;

(C) $f(x)$在 $x=0$ 处可导,但 $f'(x)$在 $x=0$ 处不连续;

(D) $f(x)$在 $x=0$ 处的导函数连续.

4. 下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $f'(x)$是周期函数,则 $f(x)$也一定是周期函数;

(B) 如果 $f'(x)$是增函数,则 $f(x)$也一定是增函数;

(C) 如果 $f'(x)$是偶函数,则 $f(x)$一定是奇函数;

(D) 如果 $f'(x)$是奇函数,则 $f(x)$一定是偶函数.