漢　譯

斯蓋二氏
解析幾何學

譯　者

黃　頌　堯

趙國昌　　于勤伯

北平科學社印行

1947

漢譯 斯米司蓋爾解析幾何學

實　　價

譯　　者　黃頌堯　趙國昌　于勤伯

[illegible]

發行者　北平科學社

電話北局二九九三號

經售處　中華印書局

楊梅竹街斜電話三局一六七三號

中華民國三十六年三月十一版

目 次

第 一 章

代數及三角之復習

第 二 章

卞的遜坐標

第三章

曲線及方程式

第四章

直線及普通一次方程式

第　五　章

圓及方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

第　六　章

極　坐　標

第　七　章

坐　標　之　移　轉

第　八　章

圓　錐　曲　線　及　二　次　方　程　式

目　次

第　九　章

切線及法線

第　十　章

直線與圓錐曲線之關係二次式定理之應用

第　十　一　章

軌跡通徑方程式

第　十　二　章

一般二次方程式

第十三章
相似圓錐曲線之變位

第十四章
反數形

第十五章
極　極帶　及極帶交換

第十六章
空間之卡的遜坐標

第十七章
面 曲線 及方程式

第十八章
平面及三變數之一般一次方程式

第十九章
空間直線

第二十章
特殊面

第二十一章
坐標之變換各種坐標法

第二十二章
二次曲面及三變數之二次方程式

第二十三章
直線與二次曲面之關係二次曲面理論之應用

解析幾何學

第一章

代數及三角之復習

1. 數 實施代數演算所生之數有兩種,即實數與虛數.

凡平方為正數之數,曰實數.零亦為實數.

凡平方為負數之數,曰純虛數.凡純虛數皆可化為一負數之平方根,故可以 $b\sqrt{-1}$ 表之,其 b 為實數,而 $(\sqrt{-1})^2=-1$.

凡能寫為 $a+b\sqrt{-1}$ 形式之數,曰虛數或複數.(Complex number),其 a 及 b 為實數,且 b 不等於零.複數之平方通常仍為複數;因若 a 不等

$$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1},$$

於零,則必為虛數故也.

2. 常數. 凡值一定不變之數量曰常數.

常數無論在何種問題,其值恒不變者,曰絕對常數 如 $2, -3, \sqrt{7}, \pi$ 等.

任意常數或不定常數之值,可指定為一組數值中之任何數值.但既指定後,則在全盤演算內不能再變.

不定常數尋常用首數字母表之.如不足用,則於其右上角加撇號或右下角加附數或二者並用以廣其數.例如:

用撇號，

a'（讀a一撇），a''（讀a二撇），a'''（讀a三撇），皆表不同之常數。

用附數，

b_1（讀b一），b_2（讀b二），皆表不同之常數。

兼用二者，

c_1'（讀c一一撇），c_3''（讀c三二撇），皆表不同之常數。

3. 二次式. 模範式. 任何二次方程式，均可由移項及集項寫爲模範式

(1)
$$Ax^2+Bx+C=0,$$

式中 x 表未知數.係數 A,B,C 爲不定常數，可爲任何値但 A 不能等於零，否則方程式非二次矣. C 曰常數項.

方程式之左邊

(2)
$$Ax^2+Bx+C$$

曰二次式，任何二次式，均可寫爲如此之模範式，其 x 表未知數. B^2-4AC 稱爲(1)或(2)之判別式，以△表之.

即二次式或二次方程式之判別式，等於其模範式中未知數一次項之係數之平方.減去未知數二次項之係數與常數項之積之四倍.

凡代二次式之未知數.能令此二次式等於零之數，名爲此二次式之根.

二次式(2)之根，即二次方程式(1)之根.二次方程式之根，即謂能適合該方程式也.

在代數學內證明，(2)或( )有兩根x_1及x_2，此兩根由解(1)得之，即

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=-\dfrac{B}{2A}+\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}, \\ x_2=-\dfrac{B}{2A}-\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}. \end{cases}$$

兩值相加，得

$$(4)\qquad x_1+x_2=-\frac{B}{A}.$$

兩值相乘，得

$$(5)\qquad x_1x_2=\frac{C}{A}.$$

故得

定理I. 二次式之兩根之和，等於未知數一次項之係數變號，以二次項之係數除之.

兩根之積，等於常數項以二次項之係數除之.

二次式(2)，可寫爲

$$(6)\qquad Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2),$$

此可由將右邊乘出，代入(4)及(5)證明之.

例如，因二次方程式$3x^2-4x+1=0$之兩根爲 1 及$\frac{1}{3}$，故得恆等式

$$3x^2-4x+1=3(x-1)(x-\tfrac{1}{3}).$$

若A, B, C俱爲實數，則兩根x_1, x_2爲實數或虛數，全由判別式而定其關係以下定理述之.

定理II. 設二次式各項係數俱爲實數，並用Δ表其判別式，則

當Δ爲正時，兩根俱爲實數，但不相等.

當Δ爲零時，兩根俱爲實數，且相等.

當Δ爲負時，兩根俱爲虛數.

※符號$\equiv$讀『恆等於』，表用此符相連之兩式，只有形式之不同。

故二次式可寫爲下列三種形式:式中之數,均爲實數.

$$(7)\begin{cases} Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2), & \text{設}\triangle\text{爲正,由(6).}\\ Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2, & \text{設}\triangle\text{爲零,由(6).}\\ Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2+\dfrac{4AC-B^2}{4A^2}\right], & \text{設}\triangle\text{爲負.}\end{cases}$$

今證明第三式如下:

$$Ax^2+Bx+C\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$$

$$\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right),$$

在括號內加減$\dfrac{B^2}{4A^2}$,

$$\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].$$

4. <u>特別二次式.</u> 若第2頁(1)內係數B及C有一或俱爲零,則名此二次式曰特別二次式.

情形 I. $C=0$.

由分解因子,方程式(1)變爲

(1) $$Ax^2+Bx\equiv x(Ax+B)=0.$$

故其兩根爲 $x_1=0$, $x^2=-\dfrac{B}{A}$,故若二次方程式之常數項等於零則必有一根等於零.反之,若二次方程式有一根等於零,則此方程式必無常數項;因若$x=0$能適合2頁(1),則由代入得$C=0$.

情形 II. $B=0$.

第2頁方程式(1)變爲

(2) $$Ax^2+C=0.$$

由3頁定理I, $x_1+x_2=0$,即

(3) $$x_1=-x_2.$$

故若二次方程式之未知數之一次項之係數爲零，則兩根數值相等值而符號相反.反之，若二次方程式之兩根數值相等而符號相反，則其一次項之係數必爲零.因此時其兩根之和等於零，由定理1，必得$B=0$也.

情形 III. $B=C=0$.

第2頁方程式(1)今變爲

$$Ax^2=0. \tag{4}$$

由假設A既不爲零，必$x^2=0$，故其兩根俱等於零.

5. 二次式之兩根有某種關係時之情形.

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

若模範式之兩根x_1, x_2間有某種關係，則其係數A, B, C亦必有與之相當之關係，此關係以含此等常數之另一方程式表之.例如，若兩根相等，即$x_1=x_2$，則由3頁定理II，$B^2-4AC=0$.又，若有一根爲零，則$x_1x_2=0$；由定理I，必$C=0$.

此相當關係可分兩行述之如下

二次模範式

兩根間之關係	諸係數間之關係
$x_1=x_2$	$B^2-4AC=0$
$x_1x_2=0$	$C=0$

若干問題之係數含一個或幾個不定常數，常已知其兩根之關係而求其係數之關係方程式.今舉四例如下：

例1. 巳知下方程式有一根爲零，求定不定常數k之値.

(1) $$2x^2-6x+k^2-3k-4=0$$

解. 此方程與模範式比較之，則$A=2$，$B=-6$，$C=k^2-3k-4$.
由4頁情形1，必須$C=0$，方有一根等於零.

$$\therefore k^2-3k-4=0.$$

解之，得

$$k=4\text{，或 }k=-1\text{.答.}$$

例2. 當k爲何値時，方程式

$$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

之兩根始爲相等實根?

解. 將此方程式寫爲模範式，得

(2) $$kx^2+(2k-4)x+(3k-2)=0.$$

即 $$A=k,\ B=2k-4,\ C=3k-2.$$

計算判別式$\triangle$，

$$\triangle=(2k-4)^2-4k(3k-2)$$
$$=-8k^2-8k+16=-8(k^2+k-2).$$

由3頁定理II，僅當$\triangle=0$時，方有兩相等實根.

$$\therefore k^2+k-2=0.$$

解之，得 $k=-2$ 或 $k=1$.答.

將所得答數代入方程式(2)以核驗之:

當$k=-2$時，方程(2)變爲$-2x^2-8x-8=0$，或$-2(x+2)^2=0$.

當$k=1$時，方程(2)變爲$x^2-2x+1=0$，或$(x-1)^2=0$.

故當k等於-2或1時，方程(2)之左邊，可以變爲第4頁(7)之形式.

例3. 設下方程式(3)之兩根相等，則a,b,k,m諸常數須能適合之條件方程式爲何?

(3) $$(b^2+a^2m^2)y^2+2a^2kmy+a^2k^2-a^2b^2=0,$$

解. 此方程式與模範式比較之，得

$$A=b^2+a^2m^2,\quad B=2a^2km,\quad C=a^2k^2-a^2b^2.$$

由3頁定理II，當兩根相等時，其判別式$\triangle$必等於零；故得

$$\triangle=4a^4k^2m^2-4(b^2+a^2m^2)(a^2k^2-a^2b^2)=0.$$

乘出並化簡之，得

$$a^2b^2(k^2-a^2m^2-b^2)=0\text{.答.}$$

例4. 當 k 爲何値時，以下(4)，(5)兩聯立方程式之兩組公共根始能相同?

(4) $$3x+4k=k,$$

(5) $$x^2+y^2=25$$

解. 解 (4) 求 y 得，

(6) $$k=\tfrac{1}{4}(k-3x).$$

代入(5)並化成模範式，得

(7) $$25x^2-6kx+k^2-400=0.$$

設(7)之兩根爲 x_1, x_2. 代入(6)則得 y 之兩相當値，即

(8) $$y_1=\tfrac{1}{4}(k-3x_1),\ y_2=\tfrac{1}{4}(k-3x_2),$$

由是得(4)與(5)之兩組公共根 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2). 但由本題假設，此兩組根相同，故必

(9) $$x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

由(8)，若 $x_1=x_2$，則 y_1 必等於 y_2，故必須(7)之兩根相等，(4)及(5)之兩組公共根始能相同；由 3 頁定理 II，即必須(7)之判別式等於零.

$$\therefore \triangle=36k^2-100(k^2-400)=0.$$

解之，得　$k^2=625, k=25$ 或 -25. 答.

核驗：將所得 k 之每値代入(7)，

當 $k=25$ 時，方程式(7)變爲 $x^2-6x+9=0$，或 $(x-3)^2=0$; $\therefore x=3$.

當 $k=-25$ 時，方程式(7)變爲 $x^2+6x+9=0$，或 $(x+3)^2=0$; $\therefore x=-3$.

再將 k 及 x 之値代入(6)，

當 $k=25, x=3$ 時，得 $y=\tfrac{1}{4}(25-9)=4$;

當 $k=-25, x=-3$ 時，得 $y=\tfrac{1}{4}(-25+9)=-4$.

故當 k 爲此兩値時，(4)及(5)之兩組公共根相同，即

　　即若　$k=25$，則其兩組公共根化爲 $x=3$,　$y=4$.

　　即若　$k=-25$，則其兩組公共根化爲 $x=-3, y=-4$.

Q.E.D.