

漢 譯

斯 蓋 二 氏
解 析 幾 何 學

譯 者

黃 頌 堯

趙 國 昌 于 勤 伯

北 平 科 學 社 印 行

1 9 4 7



漢
譯

斯米司蓋爾解析幾何學

實

價

譯

者

黃 頌 堯

趙 國 昌

于 勤 伯

發

行

者

北

平

科

學

社

按據漢方館藏閣下經子十三部

電話北局二九九三號

經

售

處

中

華

印

書

局

楊梅竹街斜電話三局一六七三號

中華民國三十六年三月十一日

目次

第一章

代數及三角之復習

節	頁
1. 數	1
2. 常數	1
3. 二次式. 模範式	2
4. 特別二次式	4
5. 二次式之兩根有特別之關係時之情形	5
6. 變數	10
7. 二次式符號之變更	40
8. 無限根	14
9. 多變數之方程式	16
10. 直角三角形內一角之諸函數	18
11. 任意角	18
12. 三角法內緊要之公式及定理	19
13. 三角函數值之簡	21
14. 符號之定則	22
15. 希臘字母	22

第二章

卡的遜坐標

16. 方向直線	23
17. 卡的遜坐標	24
18. 矩形坐標	25
19. 角	28
20. 正交投影	29
21. 長	31
22. 傾角及斜度	34
23. 分點	38
24. 面積	42
25. 第二投影定理	47

第 三 章

曲 線 及 方 程 式

26.	點之軌跡之能適合一要件者	54
27.	能適一要件諸點之軌跡方程式	51
28.	第一基本問題	53
29.	直線及圓之普通方程式	57
30.	方程式之軌跡	59
31.	第二基本問題	60
32.	比較原理	62
33.	第三基本問題	67
34.	對稱	72
35.	較深之討論	73
36.	討論方程之方法	74
37.	交點	76
38.	超越曲線	79
39.	普通圖示法	83

第 四 章

直 線 及 普 通 一 次 方 程 式

40.	總綱	5
41.	直線方程式之方	5
42.	普通一次方程式 $x + y + C = 0$	6
43.	合解兩個次方程之幾何解釋	89
44.	兩要件可定一直線	92
45.	以斜度及直線上任意一點之坐標表直線之方程式	95
46.	以截線表直線之方程式	96
47.	通過已知兩點之直線之方程式	97
48.	以法線表直線之方程式	101
49.	由直線至一點之距離	105
50.	一直線與第一直線之交角	109
51.	直線系	113
52.	與一已知直線平行之直線系	117
53.	與一已知直線垂直之直線系	119
54.	通過已知兩直線之交點之直線系	119
55.	直線之補徑式	123

第 五 章

圓及方程式 $x^2 + y^2 + lx + Ey + F = 0$

56.	圓之普通方程式.....	130
57.	三要件可定一圓.....	132
58.	圓系.....	136
59.	切線之長.....	144

第 六 章

極 坐 標

60.	極坐標.....	149
61.	方程式之軌跡.....	150
62.	改矩式坐標爲極坐標.....	154
63.	應用.....	159
64.	軌跡之方程式.....	157

第 七 章

坐 標 之 移 轉

65.	總綱.....	160
66.	移軸.....	160
67.	轉軸.....	162
68.	坐標之普通移轉.....	163
69.	軌跡之分類.....	164
70.	移轉坐標軸化簡方程式.....	165
71.	移移軸之應軌於一次或二次方程式.....	168

第 八 章

圓 錐 曲 線 及 二 次 方 程 式

72.	極坐標方程式.....	173
73.	由極坐標改爲矩形坐標.....	178
74.	矩形坐標方程式之討論及化簡法.....	178
75.	矩形坐標方程式之討論及化簡法.....	182
76.	其軌雙曲線及漸近線.....	189
77.	以漸近線爲軸之等邊雙曲線.....	191

78. 有心圓錐曲線之焦點.....	192
79. 圓錐曲線之機械作法.....	192
80. 二次方程之軌跡之形狀.....	194
81. 二次方程軌跡之作法.....	197
82. 圓錐曲線系.....	200

目 次

第 九 章

切線及法線

83.	切線及斜線	207
84.	切線及法線之方程式	210
85.	圓錐曲線之切線及法線之方程式	212
86.	通過曲線外一點之切線	215
87.	圓錐曲線之切線及法線之性質	217
88.	切曲線於原點之切線	221
89.	求切線方程式之第二法	223

第 十 章

直線與圓錐曲線之關係二次式定理之應用

90.	直線及圓錐曲線之位置關係	226
91.	直線系與圓錐曲線及直線與圓錐曲線系之位置關係	228
92.	圓錐曲線之切線	230
93.	以斜度表切線	233
94.	p 方程式	235
95.	切線	237
96.	漸近方向及漸近線	238
97.	心	240
98.	直徑	241
99.	有心圓錐曲線之共軛直徑	244

第 十 一 章

軌跡通徑方程式

100.	解析幾何之第一基本問題	248
101.	由已知曲線用一定方法作成之軌跡	249
102.	曲線之通徑方程式	253
103.	諸曲線系之交點之軌跡	259

第 十 二 章

一般二次方程式

104.	二次一般方程式	264
105.	退縮圓錐曲線之條件	364
106.	退縮圓錐曲線系	267
107.	轉軸時之不變式	269
108.	移軸時之不變式	293

109.	二次方程式之軌跡之性質	275
110.	等圓錐曲線	278
111.	圓錐曲線決於五條件	279

第十三章 相似圓錐曲線之變位

112.	總綱	281
113.	相等形	281
114.	移位	282
115.	轉位	282
116.	易位	284
117.	直線上之反映	287
118.	對稱變位	287
119.	等勢圓錐曲線及對稱圓錐曲線	291
120.	等之變位	291
121.	相似變位	292
122.	相似圓錐曲線	293

第十四章 反數形

123.	定義	297
124.	反演方程式	297
125.	圓錐曲線之反演	299
126.	兩圓所成之角	303
127.	反演時角度之不變	304
128.	直線系之反演	305
129.	同心圓系之反數形	307
130.	正反圓系	308

第十五章 極 極帶 及極帶交換

131.	對於圓之極及極帶	310
132.	極與極帶之繪法	311
133.	對於圓之極帶交換	313
134.	對於任意二次方程式之軌跡之極與極帶	315
135.	對於任意二次方程式之軌跡之極帶交換	317
136.	一圓對於他圓之極帶交換	320
137.	相系	323

第十六章 空間之卡的遜坐標

138.	卡的遜坐標	325
------	-------------	-----

139.	直角投影	327
140.	直線之方向餘弦	330
141.	長	331
142.	兩方向直線間之角	334
143.	分點	335

第 十 七 章

面 曲 線 及 方 程 式

144.	空間之軌跡	338
145.	面之方程式, 基本問題第一	338
146.	與坐標面平行之平面	340
147.	曲線之方程式, 第一基本問題	340
448.	一方程式之軌跡第二基本問題	343
149.	方程式之軌跡, 第二基本問題	343
150.	曲線方程式之討論, 第三基本問題	344
151.	曲線方程式之討論, 第三基本問題	344

第 十 八 章

平面及三變數之一般一次方程式

152.	平面方程式之法線式	348
153.	一次之普通方程式 $Ax + By + Cz + D = 0$	349
154.	三條件定一平面	353
155.	平面方程式之截線式	356
156.	平面與點之距離	356
157.	兩平面間之角	357
158.	平面系	359

第 十 九 章

空間直線

159.	直線之普通方程式	363
160.	直線之投影面	366
161.	各種直線方程式	369
162.	直線與平面之相關位置	373
163.	三個一次方程式之解答之幾何解釋	384

第 二 十 章

特殊面

164.	總綱	379
165.	球面	379
166.	圓柱面	383
167.	曲線之投影圓柱面	384
168.	圓錐面	385

169.	旋轉面	386
170.	法面	387

第二十一章 坐標之變換各種坐標法

171.	移軸	391
172.	轉軸	391
173.	極坐標	393
174.	球面坐標	394
175.	圓柱面坐標	394

第二十二章 二次曲面及三變數之二次方程式

176.	二次曲面	397
177.	三變數二次一般方程式之化簡法	398
178.	橢圓面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	400
179.	一片雙曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	401
180.	兩片雙曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	402
181.	橢圓拋物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$	405
182.	雙曲線拋物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz$	406
183.	直母線	408

第二十三章 直線與二次曲面之關係二次曲面理論之應用

184.	ρ 方程式, 直線與二次曲面之接觸位置	410
185.	正切平面	411
186.	極平面	412
187.	外切圓錐面	412
188.	漸近線方向及圓錐面	415
189.	心	419
190.	直徑平面	419

解析幾何學

第一章

代數及三角之復習

1. 數 實施代數演算所生之數有兩種，即實數與虛數。

凡平方爲正數之數，曰實數。零亦爲實數。

凡平方爲負數之數，曰純虛數。凡純虛數皆可化爲一負數之平方根，故可以 $b\sqrt{-1}$ 表之，其 b 爲實數，而 $(\sqrt{-1})^2 = -1$ 。

凡能寫爲 $a + b\sqrt{-1}$ 形式之數，曰虛數或複數。(Complex number)，其 a 及 b 爲實數，且 b 不等於零。複數之平方通常仍爲複數；因若 a 不等

$$(a + b\sqrt{-1})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1},$$

於零，則必爲虛數故也。

2. 常數 凡值一定不變之數量曰常數。

常數無論在何種問題，其值恒不變者，曰絕對常數 如 $2, -3, \sqrt{7}, \pi$ 等。

任意常數或不定常數之值，可指定爲一組數值中之任何數值。但既指定後，則在全盤演算內不能再變。

不定常數尋常用首數字序表之。如不足用，則於其左上角加撇或右下角加附號或二者兼用以廣其數。例如：

用撇號，

a' (讀a一撇), a'' (讀a二撇), a''' (讀a三撇), 皆表不同之常數。

用附數，

b_1 (讀b一), b_2 (讀b二), 皆表不同之常數。

兼用二者，

c_1' (讀c一一撇), c_2'' (讀c三二撇), 皆表不同之常數。

3. 一次式 模範式 任何二次方程式，均可由移項及集

項寫為模範式

$$(1) \quad Ax^2 + Bx + C = 0,$$

式中 x 表未知數，係數 A, B, C 為不定常數，可為任何值但 A 不能等於零，否則方程式非二次矣。 C 曰常數項。

方程式之左邊

$$(2) \quad 4x^2 + Bx + C$$

曰二次式，任何二次式，均可寫為如此之模範式，其 x 表未知數。

$B^2 - 4AC$ 稱為(1)或(2)之判別式，以 Δ 表之。

即二次式或二次方程式之判別式，等於其模範式中未知數一次項之係數之平方，減去未知數二次項之係數與常數項之積之四倍。

凡代二次式之未知數，能令此二次式等於零之數，名為此二次式之根。

二次式(2)之根，即二次方程式(1)之根，二次方程式之根，即謂能適合該方程式也。

在代數學內證明，(2)或()有兩根 x_1 及 x_2 ，此兩根由解(1)得之，即

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}, \\ x_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}. \end{cases}$$

兩值相加，得

$$(4) \quad x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}.$$

兩值相乘，得

$$(5) \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}.$$

故得

定理 I. 二次式之兩根之和，等於未知數一次項之係數變號，以

二次項之係數除之。

兩根之積，等於常數項以二次項之係數除之。

二次式(2)，可寫爲

$$(6) \quad Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2),$$

此可由將右邊乘出，代入(4)及(5)證明之。

例如，因二次方程式 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根爲1及 $\frac{1}{3}$ ，故得恒等式

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3}).$$

若 A, B, C 俱爲實數，則兩根 x_1, x_2 爲實數或虛數，全由判別式而定其關係以下定理述之。

定理 II. 設二次式各項係數俱爲實數，並用 Δ 表其判別式，則

當 Δ 爲正時，兩根俱爲實數，但不相等。

當 Δ 爲零時，兩根俱爲實數，且相等。

當 Δ 爲負時，兩根俱爲虛數。

※符號『讀』恒等於』，表用此符相連之兩式，只有形式之不同。

故二次式可寫為下列三種形式：式中之數，均為實數。

$$(7) \begin{cases} Ax^2 + Bx + C \equiv A(x - x_1)(x - x_2), \text{ 設 } \Delta \text{ 為正, 由 (6).} \\ Ax^2 + Bx + C \equiv A(x - x_1)^2, \text{ 設 } \Delta \text{ 為零, 由 (6).} \\ Ax^2 + Bx + C \equiv A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right], \text{ 設 } \Delta \text{ 為負.} \end{cases}$$

今證明第三式如下：

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &\equiv A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\ &\equiv A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right), \end{aligned}$$

在括號內加減 $\frac{B^2}{4A^2}$,

$$\equiv A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right].$$

4. 特別二次式. 若第2頁(1)內係數 B 及 C 有一或俱為零，則名此二次式曰特別二次式。

情形 I. $C=0$.

由分解因子，方程式(1)變為

$$(1) \quad Ax^2 + Bx \equiv x(Ax + B) = 0.$$

故其兩根為 $x_1=0$, $x_2=-\frac{B}{A}$ ，故若二次方程式之常數項等於零，則必有一根等於零。反之，若二次方程式有一根等於零，則此方程式必無常數項；因若 $x=0$ 能適合2頁(1)，則由代入得 $C=0$ 。

情形 II. $B=0$.

第2頁方程式(1)變為

$$(2) \quad Ax^2 + C = 0.$$

由3頁定理 I, $x_1 + x_2 = 0$ ，即

$$(3) \quad x_1 = -x_2.$$

故若二次方程式之未知數之一次項之係數爲零，則兩根數值相等值而符號相反。反之，若二次方程式之兩根數值相等而符號相反，則其一次項之係數必爲零。因此時其兩根之和等於零，由定理 1，必得 $B=0$ 也。

情形 III. $B=C=0$.

第2頁方程式(1)今變爲

$$(4) \quad Ax^2=0.$$

由假設 A 既不爲零，必 $x^2=0$ ，故其兩根俱等於零。

5. 二次式之兩根有某種關係時之情形.

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

若模範式之兩根 x_1, x_2 間有某種關係，則其係數 A, B, C 亦必有與之相當之關係，此關係以含此等常數之另一方程式表之。例如，若兩根相等，即 $x_1=x_2$ ，則由 3 頁定理 II， $B^2-4AC=0$ 。又，若有一根爲零，則 $x_1x_2=0$ ；由定理 I，必 $C=0$ 。

此相當關係可分兩行述之如下。

二次模範式

兩根間之關係

$$x_1=x_2$$

$$x_1x_2=0$$

諸係數間之關係

$$B^2-4AC=0$$

$$C=0$$

若干問題之係數含一個或幾個不定常數，常已知其兩根之關係而求其係數之關係方程式。今舉四例如下：

例1. 已知下方程式有一根爲零, 求不定常數 k 之值.

$$(1) \quad 2x^2 - 6x + k^2 - 3k - 4 = 0$$

解. 此方程與模範式比較之, 則 $A=2$, $B=-6$, $C=k^2-3k-4$.

由 4 頁情形 I, 必須 $C=0$, 方有一根等於零.

$$\therefore k^2 - 3k - 4 = 0.$$

解之, 得

$$k=4, \text{ 或 } k=-1. \text{ 答.}$$

例2. 當 k 爲何值時, 方程式

$$kx^2 + 2kx - 4x = 2 - 3k$$

之兩根始爲相等實根?

解. 將此方程式寫爲模範式, 得

$$(2) \quad kx^2 + (2k-4)x + (3k-2) = 0.$$

即 $A=k$, $B=2k-4$, $C=3k-2$.

計算判別式 Δ ,

$$\begin{aligned} \Delta &= (2k-4)^2 - 4k(3k-2) \\ &= -8k^2 - 8k + 16 = -8(k^2 + k - 2). \end{aligned}$$

由 3 頁定理 II, 僅當 $\Delta=0$ 時, 方有兩相等實根.

$$\therefore k^2 + k - 2 = 0.$$

解之, 得 $k=-2$ 或 $k=1$. 答.

將所得答數代入方程式 (2) 以核驗之:

當 $k=-2$ 時, 方程 (2) 變爲 $3x^2 - 8x - 8 = 0$, 或 $-2(x+2)^2 = 0$.

當 $k=1$ 時, 方程 (2) 變爲 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 或 $(x-1)^2 = 0$.

故當 k 等於 -2 或 1 時, 方程 (2) 之左邊, 可以變爲第 4 頁 (7) 之形式.

例3. 設下方程式 (3) 之兩根相等, 則 a, b, k, m 諸常數須能適合之條件方程式爲何?

$$(3) \quad (b^2 + a^2 m^2) y^2 + 2a^2 k m y + a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0,$$

解. 此方程式與模範式比較之, 得

$$A = b^2 + a^2 m^2, \quad B = 2a^2 k m, \quad C = a^2 k^2 - a^2 b^2.$$

由 3 頁定理 II, 當兩根相等時, 其判別式 Δ 必等於零; 故得

$$\Delta = 4a^4 k^2 m^2 - 4(b^2 + a^2 m^2)(a^2 k^2 - a^2 b^2) = 0.$$

乘出並化簡之, 得

$$a^2 b^2 (k^2 - a^2 m^2 - b^2) = 0. \text{ 答.}$$

例4. 當 k 為何值時, 以下(4), (5)兩聯立方程式之兩組公共根始能相同?

$$(4) \quad 3x + 4k = k,$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 25$$

解. 解(4)求 y 得,

$$(6) \quad k = \frac{1}{4}(k - 3x).$$

代入(5)並化成模範式, 得

$$(7) \quad 25x^2 - 6kx + k^2 - 400 = 0.$$

設(7)之兩根為 x_1, x_2 . 代入(6)則得 y 之兩相當值, 即

$$(8) \quad y_1 = \frac{1}{4}(k - 3x_1), y_2 = \frac{1}{4}(k - 3x_2),$$

由是得(4)與(5)之兩組公共根 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) . 但由本題假設, 此兩組根相同, 故必

$$(9) \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

由(8), 若 $x_1 = x_2$, 則 y_1 必等於 y_2 , 故必須(7)之兩根相等, (4)及(5)之兩組公共根始能相同; 由3頁定理 II, 即必須(7)之判別式等於零.

$$\therefore \Delta = 36k^2 - 100(k^2 - 400) = 0.$$

解之, 得 $k^2 = 625, k = 25$ 或 -25 . 答.

核驗: 將所得 k 之每值代入(7),

當 $k = 25$ 時, 方程式(7)變為 $x^2 - 6(x + 9) = 0$, 或 $(x - 3)^2 = 0$; $\therefore x = 3$.

當 $k = -25$ 時, 方程式(7)變為 $x^2 + 6(x + 9) = 0$, 或 $(x + 3)^2 = 0$; $\therefore x = -3$.

再將 k 及 x 之值代入(6),

當 $k = 25, x = 3$ 時, 得 $y = \frac{1}{4}(25 - 9) = 4$;

當 $k = -25, x = -3$ 時, 得 $y = \frac{1}{4}(-25 + 9) = -4$.

故當 k 為此兩值時, (4) 及 (5) 之兩組公共根相同, 即

即若 $k = 25$, 則其兩組公共根化為 $x = 3, y = 4$.

即若 $k = -25$, 則其兩組公共根化為 $x = -3, y = -4$.

Q.E.D.