

13-01-49/24

数学的魅力

傅钟鹏

福建科学技术出版社



数学的魅

傅 钟 鹏

福建科学技术出版社

一九八五年·福州

责任编辑：林珊

数 学 的 魅 力

傅钟鹏 编著

•

福建科学技术出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

福建省闽北印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 7.875印张166千字

1985年9月第1版

1985年9月第1次印刷

印数：1—10,780

书号：17211·49 定价：1.32元

写 在 前 面

常听人们说：“数学家总是喜欢在不可知的海洋里遨游。”果真是这样吗？

海洋水深浪阔，汹涌澎湃，翻腾起伏……，委实诱人而壮观。可是，如果你身入其境，驾馭一叶扁舟，在波峰浪谷颠簸，望着渺茫无际的四周，不能指望有抵达彼岸的把握时，你会有什么样的感触？这时，也许你就会想：还是在稳当可靠，毫无风险的陆地好，那儿的春花秋月，对具有闲情逸致的人们来说，又是蕴含有何等吸引力啊！

但是，不管怎么说，绝大多数数学家还是要执拗地坚持自己的观点，他们争辩说：难道你们就从来也不向往那厢旖旎的风光？那儿有十倍于此地的大好景色呢！

数学的美境就是这样诱惑人的。数学家们为了寻求心目中的琼楼玉宇，尽管面前是卷天席地的惊涛骇浪，还是要奋力向前。于是，一代接着一代，一个个课题被揭谜似地点破了，这就是“精诚所至，金石为开”的见证。

曾经有不少人被数学的迷人景象所征服，但是，更多的人最后征服了它，使得千姿百态的美境终于纷呈现在有志追求者的面前。

你听说过没有？为探求某一命题的隐私，人们曾经耗费一千余年的时间，许多人为之卧不安席，食不甘味，付出毕生心血。数学就是这样，以它神奇的力量迷惑着为数众多的“朝圣者”，但是，这些人并不迷信，他们之所以会醉心于漂

游数海之中，固然是由于它的丰姿丽质，更由于人们相信，一切科学的根源都在于“数”。须知，人类未来的美好前程可都与此有关啊！

因此，基于对人类未来的责任感，数学家们要在剧烈地振荡的海洋上漂游。尽管他们所经历漫长而艰辛的进程中常常是迷惘而黑暗的，可是，他们也感到前方总有一片远岸明灯在指引着。

然而，“涉深水者得蛟龙，渡远洋者见奇珍。”这就是一种信念和结局。

这本小册子介绍二十个有趣的专题，涉及历史渊源、传奇和具体内容。当然，它们只是数学发展中的片段，好比浩瀚海洋上的几点飞沫。但是，如果在开阔青年朋友们的视野，以及激发他们对数学的喜爱和进取心方面能够起些微薄促进作用，我将感到莫大欣慰。

傅钟鹏

一九八四年三月于鞍钢

目 录

可怜天涯游子心.....	(1)
——黄金分割探源——	
“神的赐予”	(11)
——中末比的性质与应用——	
日近长安远.....	(22)
——影子的数学应用——	
失败的角逐者.....	(33)
——三等分任意角问题——	
从悲剧中诞生.....	(47)
——立方倍积和化圆为方问题——	
荒谬的“真理”	(59)
——悖论种种——	
神龟背上的法宝.....	(70)
——幻方琐谈——	
平凡中的奇异.....	(87)
——商高数揭秘——	
一种传统的兵阵.....	(99)
——方队奇趣——	

数学的魅力.....	(110)
——费尔马大定理的诱惑——	
《五猴分桃》溯源.....	(123)
——一次不定方程探古——	
大自然的行动准则.....	(138)
——等角特征及其发展——	
阿波罗神的烦恼.....	(149)
——费尔马点及其它——	
隔“墙”有耳.....	(159)
——聚焦效应的功能——	
默默无闻的人.....	(169)
——三次方程解法始末——	
碧落黄泉两茫茫.....	(181)
——质数寻踪——	
神父的心愿.....	(194)
——从完全数到梅森数——	
在金字塔的故乡.....	(206)
——埃及分数摘奇——	
如此不知足.....	(220)
——选优·贪心算法——	
“八仙过海”.....	(231)
——圆周率演进——	

1994 1995 1996 1997 1998

1990年10月10日

可怜天涯游子心

[illegible]

——黄金分割探源——

[illegible]

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

地中海地区是美丽和富饶的，虽说这里气候温和，物产

丰富，居民们得天独厚，从来不知饥寒为何物；可是，在这

大千世界上，总不见得人人都顺心如意吧！至今，希腊人还

流传一則兩千萬百年以前的往事：這本是一件人間經常遇到

的俗事，却与“科学”有千丝万缕的联系，一代传过一代，不

漸从深入探索中得到启发和鼓舞。

那裏一个潮风凛冽的黄昏……

这一千 格列卡士爹照例在镇上的小酒馆痛饮三杯 然

手将酒瓶挂起，半合醉意地摇摇晃晃回到自己的房间。

几十年来，老人就过这样重复着机械式的生活。田中面

24. 日入至息，恒年冬黍，利扫北网来，中具锦小翠的，好在游

叶真生陶香荪：各子子承父。陈子主收的事。叶真生：白己

时是农闲季节，免不了季文一阵子丰收的喜悦，时走，自己

“哦，这是谁？”我在外室的门里，猛地扑倒一个人。

唉，这是谁！就在他家的门口，伏地扑倒一个男人，

穿着破旧的棉袄，蓬松的头发披散着，于背上还挎着一个小孩。

小的有囊。……

老多的醉意全消了。他连忙进屋，撂下酒瓶，便拽起老

伴，一道将这入扶进室内，安置往床上，然后在火炉里扔去

几块木炭，再斟一杯热酒，递到陌生人的嘴边，轻轻地呼唤着。

这个异乡孤客终于醒过来了，他用充满谢意的目光注视面前一对和善的老俩口，无力地呷了一口酒，便又昏迷过去了。

“咳，把他冻成这个样子！”格列卡一边说着，一边接老伴抱来的大棉被，没头没脸地将客人蒙上。

第二天，老爹才发觉，要是挨冻，倒还好办，糟糕的是，这人发着高烧呢！他那瘦削的面庞微微发红，眼眶凹陷得象额头突出的原始人，嘴唇上满是干缩的裂口，不时喘着气，艰难地呼吸……

镇上的医生被请来了，诊察病情之后对老爹说：“我尽力而为，不过，恐怕力有未逮。”

然而，依靠老俩口的精心照料和土草药发挥的威力，总算病有起色。约摸过了十几天，神志清醒了，渐渐进了一些饮食。但是，身体却是虚弱得很，说起话来有气无力。

格列卡不止一次地向这个陌生人询问家世，可是得到的回答总是：“家，在遥远的天边。”“天边”在哪里呢？老爹莫名其妙。其实，客人早已经做出回答，只是对这位几十年来足不出百里外的老汉来说，耳目闭塞到连亚历山大里亚那么有名的城市也不知在东南西北呢，更何况是另一个从未听说过的地名，无论叫洛桑也罢，叫希帕斯也好，或是叫什么别的，反正记不住，都是一样的糊涂概念。

一天夜里，透过窗户的月光临照到病人的床上，也许是如水的月华勾起他的乡思，便示意老人帮着扶坐起，然后用手指向东方的天空。

格列卡顺着手指的方向看去。噢，那是月亮旁边的一颗

寒星，它在稀稀落落的众星中一闪一眨，显得孤独而凄清。

陌生人叹了一口气，用微弱的声调断断续续地说：“呶，就在那儿，‘天边’！”

格列卡老爹似有所悟地点点头，同情地想：“也许，他的妻儿此时此刻也在望着那颗星星呢，可怜哪！”

“大哥，您我萍水相逢，难得您和大嫂对我如此无微不至地关怀，我心中铭感不尽。我病入膏肓，自知不起，再不必延医调治了。我身边别无长物，只有铜星一枚，就留作纪念吧。”也许是一般人所说的那种“回光返照”，这个与格列卡老爹素昧平生的异乡客人今晚格外清醒和兴奋。

格列卡接过一枚有手掌大的铜星，迎着月光看出，这是地地道道的五角星，它与天上那颗星星遥相辉映，仿佛有一股寒流袭迫而来……

几天后，飘萍断梗的陌生人离开了人间。

格列卡悲痛地掩埋了这位身世不明的朋友，从此，就把那枚铜星悬挂在家门口。那是值得随时追忆的，不就在这扇门的前面迎来那个浪迹天涯的游子吗？

“如今，斯人魂归故里了吗？”每天回家时，老爹总是要在门口站立一会儿，凝望着稍微出现绿色锈斑的星星，它就象一张憔悴的面孔，带着哀伤的表情，在寒夜的高处俯瞰人寰。是啊，世界是多么值得人们留恋哪，然而，他却不得不离开它，去走向另一个天地。

真是太遗憾了。不，岂止是遗憾而已？这几年来，格列卡总是怀着极度不安的心情，痛苦地折磨自己。咳，竟然没有一丝线索可以传递信息，让“天边”的寡妇孤儿得知亲人的行踪。苍天啊，这未免也太残酷了。

在家门口，他经常向过路的外乡人叙述这段经历，指望

找到那个故世友人的蛛丝马迹，可是，所有人都叹息地摇摇头。

终于有这么一天：三个风尘仆仆的异地来客在格列卡家门口停住脚步，他们望着那枚铜星，不时轻声地交换着话语，互相点头示意，便由其中的一人上前叩门。

还没有等好客的格列卡老爹开口，这三个人便异口同声地急切问道：

“我们的兄弟在这儿吗？”

“兄弟？”老爹丈二金刚摸不着头脑。等他弄清楚这是怎么回事时，情不自禁地哽咽着诉说几年前那个陌生人的遭遇。

“到底找到亲人了。”他如释重负地叹了一口气，交给他们一个小小的行囊——陌生人留下的唯一遗物。

在郁郁葱葱的林荫里，他们见到兄弟的长眠处，墓碑上刻着几个大字：“一个漂泊异乡的人”，坟头长满青草，点缀着许多洁白的小花朵，显得清静、孤寂。这三个人并排蹲立在坟前，低着头，泣不成声。

“老丈，感蒙您照料我家兄弟，恩重如山，不过，我们想拾出骨殖回乡安葬，不知尊意如何？”他们向老爹深深地施礼致意，并且提出这样一个要求。

当然，叶落归根，这是人情所在，老爹立即表示赞同。

又过了几天，这三个客人背着兄弟的遗骨，辞别格列卡起程了。临行时，他们紧紧地拥抱老人，再三亲吻那双长满厚茧的大手，其中一人捧出兄弟遗下的那个行囊，说道：

“我们想，这个行囊仍旧留在您老人家的身旁，永为纪念吧！”

格列卡依依难舍地目送客人们的身影消失在苍茫的暮色

之中，心中觉得有一块石头落了地。他默默地祈祷这几位新友交上好运，愿连夜赶路的旅人顺风顺水。伫立了好一会儿，才迈着一轻一重的脚步回转家门。

当老伴接过那个行囊，打开一看时，不由得惊叫起来：

“老头子，哪儿来的这么多金子？”

那末，这三个人果真是那陌生人的兄弟，因此找到亲人的踪迹后，厚谢格列卡而去？

古人说：“骨肉情深，莫如手足。”可是他们之间的感情亲逾手足。

原来，在当时，古希腊有学问的人形成许多学派，毕达哥拉斯学派便是其中之一。毕氏本人是一位哲学家，又是一位修养有素的数学家，曾经以发现直角三角形中三边关系的“毕氏定理”著称，他的门徒和崇拜者遍布古希腊的各个城邦国家，成为举足轻重的一个“家族式”学派。

为什么叫“家族式”呢？因为各成员间互相称兄道弟，亲密无间，在学术上若有一得，都要在内部展开讨论交流，做出结论后，成果归学派所有。这个学派中的“兄”、“弟”约定以“五角星”为标识，他们把五边形称为“三倍三角形”（因为它的内角和等于三角形内角和的三倍），认为它的内在机理奥妙无穷，是寓有深刻哲理的。

怎样确定正五边形的边长，牵涉到当时数学界重大争论课题之一“无理数”问题，而五角星能解决一个典型的“一笔画”问题，成为后来出现拓扑学的嚆矢。以上两点具有理论和实践上的重要意义，然而，它的功能远不止这两点，更加令人感兴趣的则是它与“黄金分割”的密切联系。

毕达哥拉斯是公元前约六百年时期的学者，在他身后二百年左右，柏拉图学派的攸多克萨深入探索了五角星的性

质之后，不禁拍案惊呼：“‘中末比’到底在这凡出现了！”

原来，攸氏曾经研究一种线段间的比例，称为“中末比”。就是将已知线段分为两部分，使其中一部分是全线段与另一部分的比例中项。见图1，在线段AB上取点H以产生中末比，则有

$$AH^2 = AB \cdot HB$$



图 1

于是，从 $AH : AB = HB : AH$ 可以得到 $AH : AB$ 这一中末比的性质，它是一种特殊比值（若以A为始点，则H是线段AB“中”的一点，而B是线段“末”端的那一点，故称为中末比）。从

$$AH : AB = (AB - AH) : AH$$

得 $AH^2 + AB \cdot AH - AB^2 = 0$

解出 $AH = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} AB$

即 $AH : AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$

奇怪的是，五角星（都是指“正五角星”）恰恰具有中末比的性质，而且在图形上几度出现，令人感到神秘莫测。从图2的五角星ABCDE看来，就存在几种情况的中末比，

1. 正五边形的边长与对顶长之比（例如图中的AD : AB）；

2. 顶翼三角形（如 $\triangle AB'E'$ ）的底边与腰之比（例

如 $B(E' : AB')$;

3. 顶翼三角形的腰与腰底和之比(例如 $AB' : (AB' + 腰底)$), 即 $AB' : AD'$);

4. 顶翼三角形的腰底和与五角星的对顶长之比(例如 $AC' : AB$)。

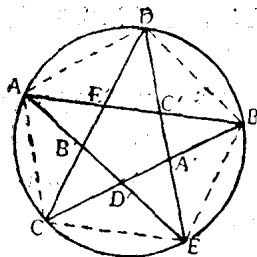


图 2

按照攸氏确定的中末比论点, 便可以据图 3 取得那一点 H 了: 过 B

作 AB 的垂线, 取其上的一点 C, 使 $BC = \frac{AB}{2}$, 联 AC, 以 C 为圆心, CB 为半径作圆交 AC 于 D, 以 A 为圆心, AD 为半径画圆交 AB 的点就是 H 了, 有 $AH : AB \approx 0.618$ 。

同样地, 按照五角星上有关中末比的线段情况, 人们就能准确地绘制五角星图形了, 例如已知五角星的对顶长 AB, 作五角星: 见图 4 的左图, 取对 AB 形成中末比的点 C',

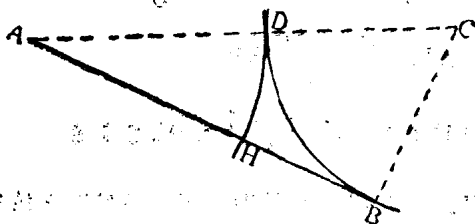


图 3

以 A 为圆心, AC' 为半径作圆交 AB 的中垂线, 即得 D, 以 B 为圆心, BD 为半径作圆交 AB 于 E', 并交 DC' 的延长线得 E, 以 A 为圆心, AD 为半径作圆交 DE' 的延长线得 C。

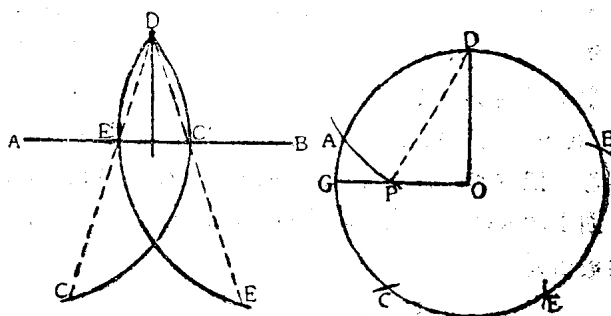


图 4

如是已知五角星的外接圆作图，可按图 4 的右图，在半径 OG 上取形成中末比的点 P ，过 O 作与该半径垂直的线交圆于 D ，则 DP 便是内接正五边形的边长。以 D 为出发点，按序截取 A 、 C 、 E 、 B 诸点，便得五角星。

攸多克萨斯的后继者、几何学泰斗欧几里得看出中末比的巨大作用，便在名著《几何原本》专门引入一个命题（第二卷命题 11）：

分割一已给直线，使整段与其中一分段所成矩形等于另一分段上的正方形。

欧几里得的作法是：按图 5，设 AB 是所给线，则作正方形 $ABDC$ ，取 AC 的中点 E ，联 EB ；在 CA 延长线上定点 F ，使 $EF = EB$ ，作正方形 $AFGH$ ，便得产生中末比的点 H 了。

千百年来，五角星就是人们心目中喜爱的一种图形。它为什么这样吸

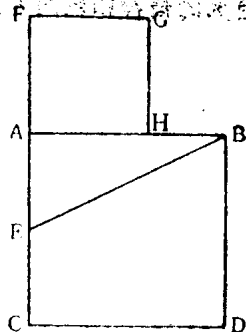


图 5

引人呢？数学家认为，这就是因为它具有一系列符合中末比的性质。后来，中末比便被涂上神秘的色彩，1509年，意大利数学家帕西奥里专门写一本名叫《神圣的比例》的书来论述它，欧洲文艺复兴时期的美术大师、意大利画家和科学家达·芬奇则把这种形成中末比的线段分割称为“黄金分割”，从此，图1的AH:AB或HB:AH便被称为“黄金分割比”，它的数值是

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1 \text{ 或 } 0.618 : 1$$

黄金，它那明晃晃、亮灿灿的光芒多么惹人喜爱啊！追逐财富的大亨们为了轻裘肥马的生活，认识到它的贵重，然而，科学家心目中的黄金，则是坚强、稳定和独立的象征，它的价值在于稀有和难得。这么说来，黄金分割比自然是一种很难得而有价值的比值了，毕达哥拉斯学派的成员们万万没有去想，小小的五角星究竟在后世科学技术发展过程中会起多大的作用，但是，他们从五角星寓含的神奇内在潜能中发现了一种奥妙的机理，当这种机理揭示给后人时，就会产生巨大的精神和物质力量。