线性代数基本概念图示

洪晴华　费本初　谢继国　编

兰州大学出版社

线性代数基本概念图示

洪晴华　费本初　谢继国　编

兰州大学出版社

1989·兰州

线性代数基本概念图示

洪晴[illegible] 费本[illegible] 谢继国 编

兰州大学出版社出版
（兰州大学校内）

兰州大学出版社激光照排室照版
静宁县印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行
开本：787×1092 毫米 1/32 印张：3.5

1989 年 11 月第 1 版 1989 年 11 月第 1 次印刷
字数：80 千字 印数：1—2000 册

ISBN 7-311-00271-0/O·41 定价：0.75 元

前　言

线性代数是一门重要的数学基础课。其概念繁多、内容抽象、理论性强，给初学者带来了一定的困难。为便于大专院校学生系统复习，熟练掌握其基本知识和基础理论，我们曾以张禾瑞、郝钢新编《高等代数》及北京大学数力系所编《高等代数》为主要依据、查阅了国内外有关资料，编写了《线性代数基本理论知识复习表》，并在全国各大专院校进行了交流，受到同行的鼓励和帮助。我们在教学实践中，对《复习表》进行反复修改，编成了此书。

本书偏重于图和理论关系表的应用，试图给线性代数的基本理论知识以形象地说明和解释，可作为大专院校、电大、函大学生学习线性代数和高等代数的辅导材料。也可作为教师的教学参考书。为便于读者阅读，特在第一章§4中，对本书采用的记号给予了说明。

在本书编写过程中，曾得到许多同行专家的指点。根据甘肃省高校教材建设规划，书稿曾经甘肃省教材建设指导委员会评审。特别值得提到的是，王世民、刘义循、孙金铭、李慧陵等副教授给我们以具体地指导、帮助。在此深表谢意。

由于水平所限，错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1988.8

目　录

第一章　预备知识

§1 集　合

(1)集合的概念

集合:表示一定事物的集体。用A、B、C……表示。

集合元素:组成集合的东西。用a、b、c……表示。

若a是集合A的一个元素,则称a属于A,记作$a \in A$,(或者$A \ni a$);若a不是集合A的元素,则称a不属于A,记作$a \notin A$(或者$A \not\ni a$)。

如果设集合

$$A = \{x | \cdots\cdots\},$$

则说明A是由满足条件"……"的那些x所组成的。

点的集合称为点集。数的集合称为数集。

(2)集合之间的关系

A是B的子集,亦称A包含于B(或称B包含A)。记作$A \subseteq B$(或者$B \supseteq A$)。关系图如图1(a)所示。

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (对\forall x \in A, \Longrightarrow x \in B。)$$

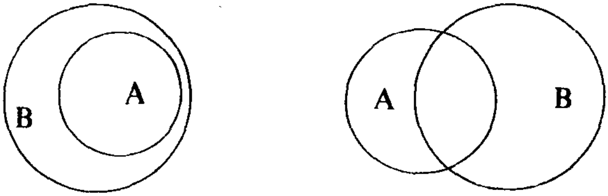
A不是B的子集,称A不包含于B(或称B不包含A。)记作$A \subsetneq B$(或$B \supsetneq A$)。关系图如图1(b)所示。

$$A \subsetneq B \Longleftrightarrow (\exists x \in A, 但 x \notin B。)$$

集合A与B相等:A与B含有完全相同的元素。记作$A = B$。

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B, 且 B \subseteq A。)$$

如果$A \subseteq B$、且$A \neq B$,那么称A是B的真子集(或称B真包含A)。记作$A \subset B$。



(a)　　　　　　(b)

图　1

(3) 特殊集合

空集:不含任何元素的集合。记作 ϕ。

对任意集合 A,规定 $\phi \subseteq A$。

集合A 的幂集:A 的所有子集所成的集合。记作 $p(A)$。

$$p(A)=\{X \mid X \text{是 A 的子集}\}。$$

(4) 集合的特征

基数(势):是集合论的基本概念之一。用它可对集合的大小进行一个描述。

若集合A、B间存在一一对应,则A、B具有相同的基数。

在有限集 A 中,集 A 的基数即为 A 所含元素的个数,记作 $|A|$。易知 $|p(A)|=2^{|A|}$。

(5) 集合的基本运算及性质

A 与 B的并:由A、B 的一切元素组成的集合。记作 $A \cup B$。显然,

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\} \\ &= \{x \mid A、B \text{ 中至少一个含 } x\}; \end{aligned}$$

$$A \cup B \supseteq A, \text{且} A \cup B \supseteq B。$$

A 与 B 的交:由 A、B 的所有相同元素组成的集合。记作 $A \cap B$。

显然，

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\};$$

$$A \cap B \subseteq A, 且 A \cap B \subseteq B.$$

A 与 B 的差(即 B 在 A 中的补集)：由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合。记作 $A - B$。

$$A - B = \{x \mid x \in A 但 x \notin B\}。$$

A 的补：由属于全集 I 但不属于 A 的元素组成的集合，其中全集 I 是所考虑的全体元素的集合。记作 $\bar{A}$。

$\bar{A} = I - A$。

A 与 B 的对称差：由属于 $A \cup B$，但不属于 $A \cap B$ 的元素组成的集合。记作 $A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}。$$

以上各运算如图 2 所示。

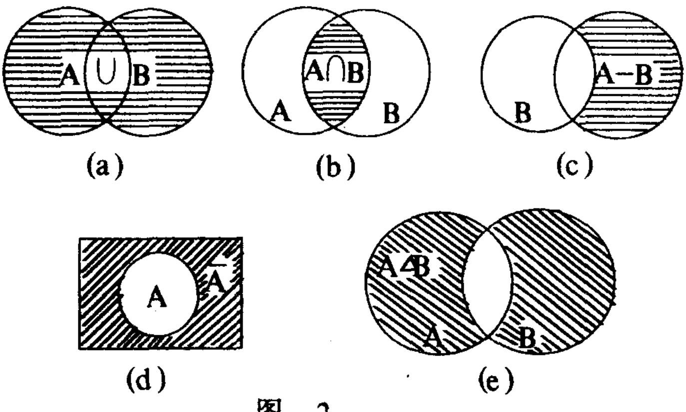


图 2

(6) 基本算律

交换律： $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$，

结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

吸收律: $A\cup(A\cap C)=A$, $A\cap(A\cup C)=A$。

幂等律: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$。

De Mergan 律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

§2 映　射

(1) 映射的概念

映射的定义: 如果

对 $\forall\ x\in$ 集合A $\xrightarrow[\text{对应}]{\exists\text{ 法则 } f}$ 唯一确定的 $y\in$ 集合 B,

则称f是 A 到 B 的一个映射。记作 $f:A\to B$,或 $f:x\mapsto y$。其中 $y=f(x)$叫做 x 在 f 下的象,x 称为 y 在 f 下的原象。如图 3 所示。

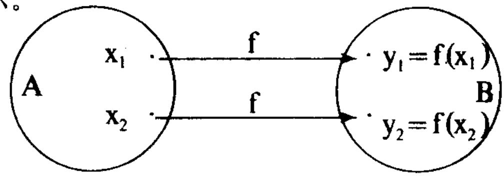


图　3

$$\begin{pmatrix}f\text{是 A 到 B}\\ \text{的映射}\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\text{对}\forall x_1=x_2\in A\\ \Rightarrow y_1=y_2\in B\end{pmatrix}$$

集合A在f之下的象(或称映射f的象)记作f(A)，且
$f(A)=\{f(x)|\ x\in A\}\subseteq B$。

映射f与g相等记作f=g且

$$f=g \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{对应集合相同,即} \\ \quad f:A\to B,\ g:A\to B; \\ \text{对应象都相等,即} \\ \quad \text{对}\forall x\in A,\text{都有 } f(x)=g(x)。\end{cases}$$

(2)映射的分类

(f是A到B的满射(到上的映射)。) $\triangleq$ (f是A到B的映射,且 $f(A)=B$)

$\Updownarrow$

对$\forall y\in B$, $\exists x\in A$,使$f(x)=y$。

(f是A到B的单射(1—1映射)。) $\triangleq$ (f是A到B的映射,且对不同的x,其象也不同。即对$\forall x_1,x_2\in A$,只要$x_1\neq x_2$,便有$f(x_1)\neq f(x_2)$。)

$\Updownarrow$

对$y_1=f(x_1)\in B$, $y_2=f(x_2)\in B$,只要$y_1=y_2$,便有$x_1=x_2$。

(f是A到B的双射(亦称到上的1—1映射、满单射、或一一对应)。) $\triangleq$ f既是满射,又是单射。

有限集A、B间存在双射,

$\Updownarrow$

A、B的元素个数相同。

映射间的关系，如图 4 所示。

当 A、B$\subseteq$R 时，映射 f 即为通常的实变函数；当 A、B$\subseteq$C 时，映射f 即为复变函数。

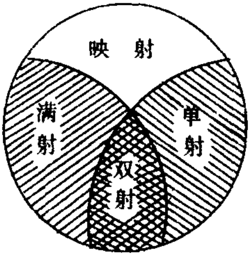


图 4

(3) 映射的运算

f 与 g 的合成(乘积)$\triangleq$由映射 f: A$\to$B, g: B$\to$C 决定的 A 到 C 的映射，这一映射记为$g\circ f$(或 gf)。

对$\forall x\in A \xrightarrow[\text{对应}]{\text{在}g\circ f\text{下}} g(f(x))\in C$。

当 A、B$\subseteq$R(或 C)时，上述映射的概念即是实(复)变函数的复合概念。

映射的合成不满足交换律。即一般来说，

$$g\circ f\neq f\circ g\text{。}$$

映射的合成满足结合律。即若 f: A$\to$B, g: B$\to$C, h:C$\to$D, 则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f\text{。}$$

合成映射关系图，如图5所示。

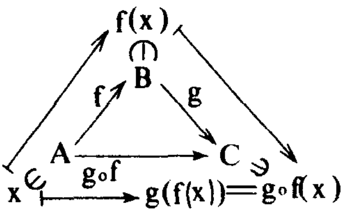


图 5

(4) 映射的性质

(一) $\left(\begin{array}{l}\text{f是A到B的}\\\text{可逆映射,}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{f是A到B的}\\\text{双映射,}\end{array}\right)$

$\Big\| \triangle$

$\left(\begin{array}{l}\exists\text{B到A的一个映射 g,}\\\text{使得} g\circ f=j_A,\text{且} f\circ g=j_B.\text{其}\\\text{中} j_A, j_B \text{分别是A、B的恒等}\\\text{映射。}\end{array}\right)$

可逆映射 f 中,映射 g 是由 f 唯一确定的,叫做映射 f 的逆映射。记作 f^{-1}。

可逆映射 f 与其逆 f^{-1} 的关系,如图 6 所示。

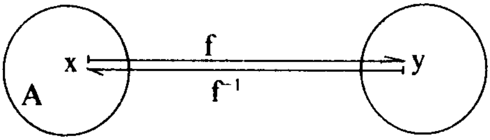


图 6

f 的逆映射 f^{-1} 的概念,就是数学分析中单值函数的反函数这一概念的推广。

§3 数环与数域

通常,我们用 Z、Q、R 和 C 分别表示整数集、有理数集、实数集和复数集。显然,

$$Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C。$$

(1) 数集 F 是数环 $\triangleq$ $F \subseteq C$,且对 $\forall$ a、b$\in$F,都有 a+b、a−b、ab $\in$F。

(2) 数域的概念:

数集 F 是数域 $\triangleq$ 至少有一个非零数 $b \in F \subseteq C$,且对 $\forall$ a、b($\neq 0$)$\in$F,都有 a+b、a−b、ab、$\frac{a}{b} \in F$。

例如,Z、Q、R、C 都是数环,且 Q、R、C 都是数域。

(一) 有理数域Q是最小的数域。

(二) 复数域C是最大的数域。

§4 符号说明

为便于读者阅读,现将本书采用的主要记号说明于下:

基本知识 ———————— (1)、(2)、(3)、 ……

基础理论 ———————— (一)、(二)、(三)、……

基本技能 ———————— $\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、……

推出关系: $\Longrightarrow$; 充要条件: $\Longleftrightarrow$;

一一对应关系: $\longleftrightarrow$; 对应关系: $\longrightarrow$;

存在: $\exists$; 任意: $\forall$; 定义: $\stackrel{\triangle}{=\!=}$;

连乘号: $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots \cdots a_n$;

连加号: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots \cdots + a_n$;

双重连加号: $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn})$.

注意: 双重连加号可以交换次序,即

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} .$$

第二章 行 列 式

§1 N级排列

(1) n级排列的概念:

n级排列:由数码1、2、……、n组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots\cdots i_n$

例如,4312就是一个四级排列。

逆序(反序):在n级排列 $i_1 i_2 \cdots\cdots i_n$ 中,若

$$1 \leqslant k < l \leqslant n, \text{但 } i_k > i_l,$$

则称 i_k、i_l 构成一个逆序。记作 (i_k, i_l)。

例如,排列4312有五个逆序(4,1),(4,2)(4,3),(3,1),(3,2).

简单地说,在排列中,一对数码的前后位置与大小顺序相反,即前面数字比后面数字大,则它们构成一个逆序。

逆序数:n级排列 $i_1 i_2 \cdots\cdots i_n$ 中出现的逆序总数。记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots\cdots i_n)$。

对换:将排列 $\cdots i \cdots j \cdots \xrightarrow[\text{其余数码不动}]{\text{交换数码 } i,j}$ 排列 $\cdots j \cdots i \cdots$ 的变换。

(2) n级排列的分类:

偶排列:逆序数为偶数的排列。例如排列312.

奇排列:逆序数为奇数的排列。例如排列321.

自然排列:逆序数为零的排列。例如排列123.

(3) n级排列的性质:

（一）$\forall$ n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n \underset{\text{对换}}{\overset{\text{经过一系列}}{\rightleftharpoons}}$ 自然排列 $12\cdots n$.

偶排列 $\underset{\text{对换}}{\overset{\text{偶数次}}{\rightleftharpoons}}$ 自然排列 $\underset{\text{对换}}{\overset{\text{奇数次}}{\leftrightharpoons}}$ 奇排列

（二）每一对换均改变排列的奇偶性。

（三）所有不同的 n 级排列，其总数为 n！个；而且当 $n \geqslant 2$ 时，奇、偶排列各为 $\frac{n!}{2}$ 个。

（4）逆序数的计算：

$\boxed{1}$ 逆序数计算方法：计算排列中每个数码前面比它大的数码个数之和，简称“前大”法。或者计算排列中每个数码后面比它小的数码个数之和，简称“后小”法。

例如，$\tau(4312) \underset{\text{“前大”}}{=\!=\!=}$（2前面）2 个 +（1 前面）2 个 +（3 前面）1 个

$\underset{\text{“后小”}}{=\!=\!=}$（4 后面）3 个 +（3 后面）2 个 +（1 后面）0 个

$=\!=\!= 5.$

§2　行列式的定义

n 级行列式

$$D = D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 其中，横排叫

做行列式D的行，纵排叫做行列式D的列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是数码1、2、……、n的一个排列。$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 是对一切可能的列序数排列 $i_1i_2\cdots\cdots i_n$ 求和，共有n!项。

简言之，n阶行列式D的值等于一切取自不同行不同列元素乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots\cdots a_{ni_n}$ 的代数和。

§3 行列式基本性质

(1) 转置后，值不变。即

$$D'=D. \text{其中}$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{称为D的转置行列式。}$$

(2)两行交换，值变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots\cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D.$$

$$(2)\xRightarrow{\text{推论}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{（两行相同，值为零）。}$$