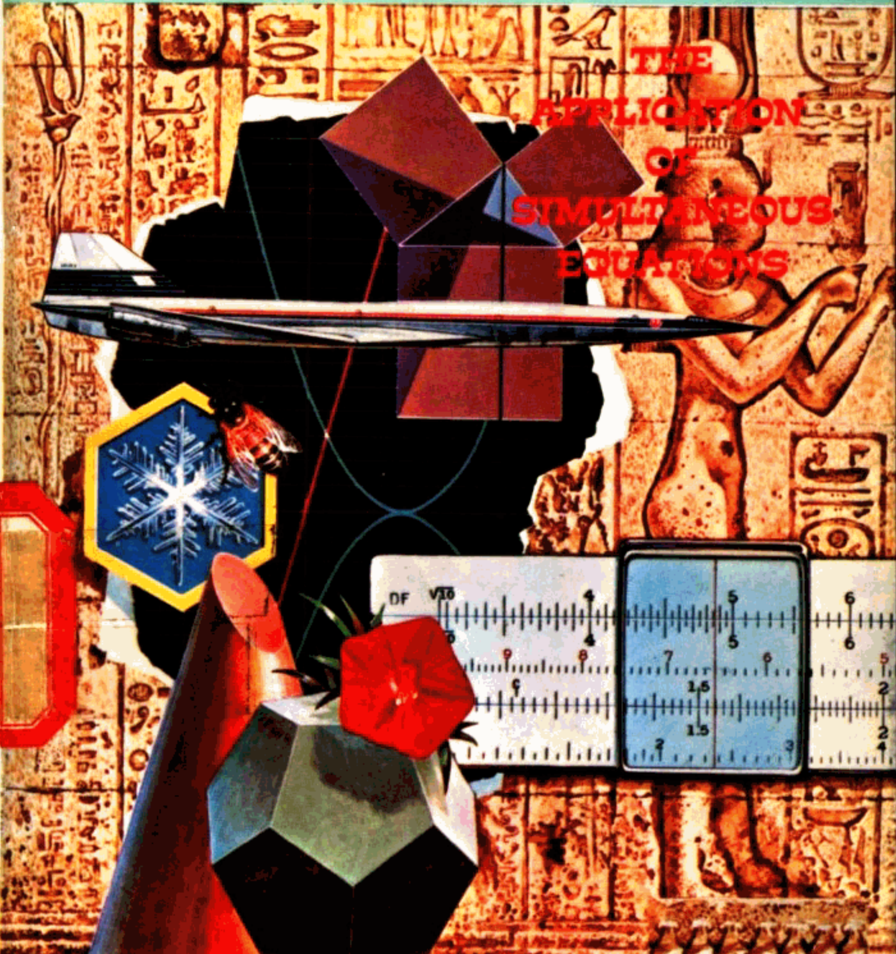
《中學生數學叢書》

聯立方程式的活用

董恩明編譯 · 萬里書店出版



聯立方程式的活用

董恩明編譯

香港萬里書店出版

聯立方程式的活用

董恩明編譯

出 版 者：萬 里 書 店 有 限 公 司

香 港 北 角 英 皇 道 486 號 三 樓

電話：5-632411 & 5-632412

承 印 者：海 擎 印 刷 廠

柴灣新安街四號15樓B座

定 價：港 幣 四 元 四 角

（一九七九年七月版）

前　　言

一提到數學，不少人就感到害怕，認爲它既枯燥，又抽象。

其實，生活裏面處處有數學。從歷史的角度來看，早在語言發展之前，原始人就使用了數。牧羊人雖然講不出數字的名稱，但他懂得半隻的多少。我們可以說，是否善於處理數字和數學乃是一個民族文化水準高低的重要標誌。

現代數學涉及的範圍甚廣，代數則是數學的基礎。本書所介紹的只是代數中的一個分支——聯立方程式，重點放在聯立方程的建立和解法。通過本書通俗簡明的叙述，將能使讀者對聯立方程的本質、思考途徑、解題方法、解題步驟及書寫格式獲得一個明確的概念。

學習貴在應用。本書通過解決一系列的實際問題，在趣味盎然之中活學活用有關聯立方程的知識。讀者舉一反三，可以解決許多實際問題，提高數學的水平。

本書根據外文資料編譯而成。例題聯系實際，生動趣味。由於編譯者學識淺陋，書中如有舛謬之處，敬請讀者賜予指正。

董恩明

一九七九年七月　九龍

目　　錄

第一章　什麼是聯立方程式

用算術不觸解決的複雜問題，運用聯立方程式可以迎刃而解。一般的教科書上只列出聯立方程式的解法及練習，但對於爲什麼觸用聯立方程式去解？所謂解的具體含義又是什麼缺乏說明，學生們只知其然而不知其所以然。

在這一章中，以 x 和 y 爲變數的 2 元 1 次方程式，根據整數與實數的範域可以求出有限以至無限組解。爲了通過圖解的方法從有限以至無限組解中確定出 1 組解，必須學會列出聯立方程式。所謂解聯立方程式，就是求 2 組 2 元 1 次方程式的共通的解。

1.　馬拉松和方程式

馬拉松計劃

張武是個中學體育教師，他在授課中一向十分重視長跑活動，認爲長跑可以培養學生的意志與毅力。過去，學生們都是在學校附近的馬路上進行長跑的，最近因馬路上汽車增多，考慮到安全問題，決定將長跑移回校內進行。學校裏有個橢圓形

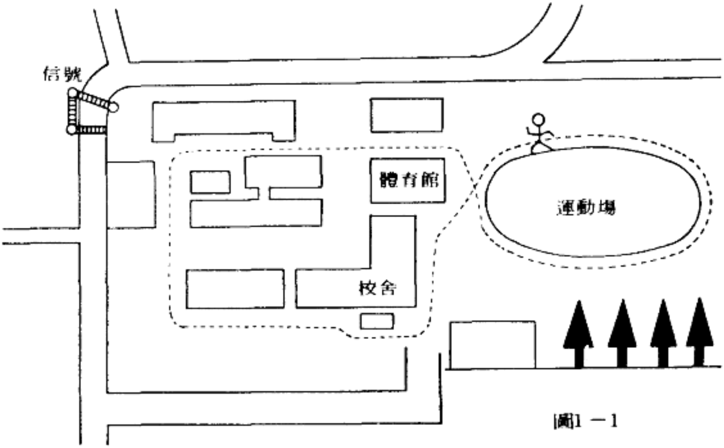


圖1－1

的運動場，如果光是繞着運動場的跑道兜圈子，會使學生們感到乏味。因此張武將跑步路線延長到校舍周圍（圖1－1）。經過測量，環繞校舍1圈的距離是400m，跑道長度是200m，校內馬拉松計劃路程初步定爲2,000m。於是張武設想，「怎樣圍繞運動場和校舍跑步，才能較理想地跑完2,000m的路程呢？」。

因爲是圍繞運動場和校舍跑步，跑步距離是：

$$200\ (\mathrm{m}) \times \bigcirc + 400\ (\mathrm{m}) \times \triangle \quad \cdots\cdots(1)$$

又，跑步路程定爲2,000m，上式成：

$$200\ (\mathrm{m}) \times \bigcirc + 400\ (\mathrm{m}) \times \triangle = 2{,}000\ (\mathrm{m}) \cdots\cdots(2)$$

像這樣的將問題化成式子稱爲立式。式子中的○和△內，可代入圍繞運動場和校舍跑步圈數的各種各樣整數。

圍繞校舍2圈的算法

馬拉松路程預定2,000m，也即相當於繞運動場10圈或繞校

舍5圈的距離。這裏先假該圍繞校舍2圈，試計算(1)式會得出怎樣的距離。

當繞校舍2圈時，

如繞運動場0圈，得200（m）× 0＋400（m）× 2＝800（m）

如繞運動場1圈，得200（m）×1＋400（m）×2＝1,000（m）

如繞運動場2圈，得200（m）×2＋400（m）×2＝1,200（m）

……………………

如繞運動場10圈，得200（m）×10＋400（m）×2＝2,800（m）

同樣，當繞校舍0圈，1圈……5圈時的距離計算結果如圖1－2所示。

用文字代替○和△的列式法

接着再來計算(2)式。(2)式規定了馬拉松的距離爲2,000m，從圖1－2可見，爲了達到這一距離，圍繞校舍跑的圈數必須從0,1,2,3,4,5圈，圍繞運動場跑的圈數必須從0,2,4,6,8,10圈中選擇。

在(2)式中，用○與△分別代表運動場和校舍的跑步圈數，書寫起來未免麻煩，我們將它改成文字，即用x代替○，y代

△＼○	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10（圈）
0	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
1	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400
2	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800
3	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200
4	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600
5（圈）	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000（m）

圖1－2　200（m）×○＋400（m）×△的値

替△；又，兩邊的單位已知是米，可以省略，這樣(2)式就變成了下式：

$$200x+400y=2,000 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

像上述式子中的文字 x，y 稱作變數或未知數。但此場合的變數，如前所述，並非任何數都適用的，亦即變數 x 必須從整數系集（稱作集合）{0, 2, 4, 6, 8, 10}（可稱它爲集合A）中選擇，變數 y 必須從 {0, 1, 2, 3, 4, 5}（可稱它爲集合B）中選擇。這個集合A也叫做變數 x 的範域，集合B叫做變數 y 的範域，而屬於某集合的數項叫做該集合的元素。

〔例題1〕 黃太在超級市場用12元來買2元一罐的罐頭魚和4元一罐的罐頭肉。如該罐頭魚買 x 罐，罐頭肉買 y 罐，便能列出 $2x+4y=12$ 的式子。請求出此式子的變數 x 和 y 的範域。

〔解〕 因爲12元最多可以買到3罐罐頭肉，y 的值必是 0, 1, 2, 3 中的其中1個。x 值當 $y=0$ 時，$x=6$，$y=1$ 時，$x=4$，$y=2$ 時，$x=2$，$y=3$ 時，$x=0$。

所以，x的範域是 {0, 2, 4, 6}，y的範域是 {0, 1, 2, 3}。

2. 2個方程式

列製數對

在前節的(3)式中，x的範域也稱集合A，y的範域也稱集合B。但並非從範域中取出任意數都可使(3)式成立。例如從集合A中取出8，集合B中取出1，(3)式成立，但如從集合A取出8，從集合B取出4，則(3)式不再成立。再看圖1—2，正好達到

2000m路程的有如下6組跑步方式：（運動場0圈，校舍5圈），（運動場2圈，校舍4圈），（運動場4圈，校舍3圈），（運動場6圈，校舍2圈），（運動場8圈，校舍1圈），（運動場10圈，校舍0圈）。化繁從簡，我們將（運動場0圈，校舍5圈）用一個簡單的數對（0,5）來代替，即前一個數字表示運動場圈數，後一個數字表示校舍圈數，這樣，使(3)式成立的數對就有如下6組（0,5）（2,4）（4,3）（6，2）（8,1）（10,0）。亦即如從集合A和集合B中選擇任意數列製數對的話，一共可以列出36組數對（圖1－3），但其中只有粗體字的6組數對能使(3)式成立。

（0，0）	（0，1）	（0，2）	（0，3）	（0，4）	（**0**，**5**）
（2，0）	（2，1）	（2，2）	（2，3）	（**2**，**4**）	（2，5）
（4，0）	（4，1）	（4，2）	（**4**，**3**）	（4，4）	（4，5）
（6，0）	（6，1）	（**6**，**2**）	（6，3）	（6，4）	（6，5）
（8，0）	（**8**，**1**）	（8，2）	（8，3）	（8，4）	（8，5）
（**10**，**0**）	（10，1）	（10，2）	（10，3）	（10，4）	（10，5）

圖1－3　36組數對

用圖解表示數對

上述這些數對也可以用圖解來表示。例如以圍繞運動場的圈數x作爲橫軸，圍繞校舍的圈數y作爲縱軸，就像圖1－4那樣，圖中的P點就代表了數對（4,4），Q點代表數對（8,1），它們各自表示出了不同的跑步方式（運動場4圈，校舍4圈；運動場8圈，校舍1圈）。

所以，如果將圖1－3中由集合A和集合B列製出的36組數對用圖解來表示的話，即成爲如圖1－5那樣。這36組數對在數學上叫做集合A和集合B的直積。表示這個直積的點中特別使前節(3)式成立的點（在圖1－5中以白圈表示的點），稱爲

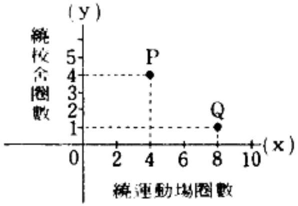


圖1－4

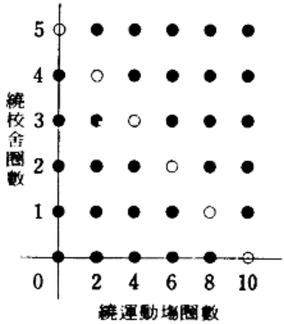


圖1－5

$200x+400y=2{,}000$式子的圖解。此時，式

$$200x+400y=2{,}000$$

除出這特定的6組數對以外便不成立。像這樣的式子稱作（2變數x，y的）方程式。爲全部求出使方程式成立的數對稱作解方程式，所求出的數對則稱方程式的解。更正確地來說，這個方程式含有x和y2個變數，而變數的次數皆爲1次，因此稱爲2元1次方程式。這裏的元是指方程式的未知數。

如何解決條件不足的問題

我們把話例說回去。張武先生設計馬拉松的跑法，可是已知使$200x+400y=2,000$這一方程式成立的x和y的數對共有（0,5）（2,4）（4,3）（6,2）（8,1）（10,0）等6組，究竟運動場與校舍應各跑幾圈爲宜並未能確定下來。這裏就存在着條件不足的問題。因此張武先生設想先繞運動場跑道跑1圈，然後交錯地圍繞校舍和運動場各跑若干圈，最後以跑完運動場跑道作爲終點。

這種跑法，意味着（運動場2圈，校舍1圈），（運動場3圈，校舍2圈），（運動場4圈，校舍3圈），……也即圍繞運動場跑的圈數x比圍繞校舍跑的圈數y多出1圈，因此可列出方程式表示兩者間的關係。

$$x=y+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

這個方程式的解，如從範域的集合A和集合B的直積尋找，有3組數對是適合的（2,1），（4,3），（6,5），但其中使(3)式和(4)式同時成立的數對則只有（4,3）1組。

也就是能同時滿足下式的x和y的數對只有（4,3）：

$$\begin{cases} 200x+400y=2,000 \\ x=y+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

從上面的例子可以得出這樣的結論，1個方程式如同時含有x及y 2個未知數，則能適合此方程式的解多於1個（以至無限個）。因此，凡屬2元方程式，只能表示2個未知數的關係，而不能有確定的數值（數學上稱不定方程式）。如要確定出1組解，必須另外再提出1個條件，亦即再列出1個2元方程式。

像(5)那樣的由含有相同的2個變數的2個1次方程式所組成的方程組，稱作2元1次聯立方程式。聯立方程式裏各個方程的共通的解，叫作該聯立方程式的解。求出聯立方程式的解的過程叫作解聯立方程式。

以運動場的跑道爲起點，再順序圍繞校舍和運動場各跑3圈，正好達到2,000m的距離，張武先生開始他的馬拉松授課了。

〔**例題2**〕　在上例中，有沒有圍繞校舍跑的圈數是圍繞運動場跑的圈數的2倍，而距離一樣是2,000 m的場合？

〔**解**〕　如將圍繞運動場跑的圈數x與圍繞校舍跑的圈數y用方程式表示，即成y＝2x。由範域的集合A和集合B的直積尋求這個方程式解，只得（2,4）1組，這組數對亦能使(3)式200x＋400y＝2,000成立，即（200×2＋400×4＝2,000）。

答案是，運動場跑2圈，校舍跑4圈，總距離仍爲2,000m。

〔**例題3**〕　用300元錢買20元一件的恤衫與50元一件的恤衫，有幾種買法？

〔**解**〕　設20元一件的恤衫買x件，50元一件的恤衫買y件，共買了300元，可列成方程式如下：

$$20x+50y=300 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中，20元一件的恤衫因最多可以買到15件，x的範域是{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}；50元一件的最多可買6件，y的範域是{0,1,2,3,4,5,6}。由x和y的範域組成的直積如用圖解表示，即成圖1－6。

從此圖解中取出任意點，例如（3,2）代入x＝3，y＝2，(1)方程式並不成立。如將圖解中的所有點分別代入x和y計算一下的話，能使(1)式成立的圖解一共有圖中用白圈表示的4點。

也就是說，(1)方程式的解一共有4個：

（0,6）（5,4）（10,2）（15,0）

爲了從上述4種買法中確定出1種，必須另外再加多1個條件，即20元一件的恤衫和50元一件的恤衫一共買了9件，如用方程式表示，就是x＋y＝9。將它和(1)式聯立，就可以確定出1組解了。

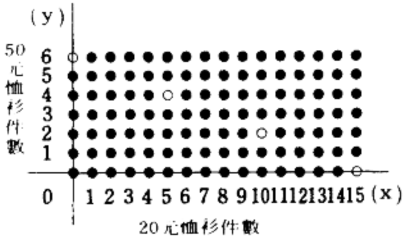


圖1－6　$20x+50y=300$

$$\begin{cases} 20x+50y=300 \\ x+y=9 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解此聯立方程式，得出1個解爲(5,4)，即20元一件的恤衫買了5件，50元一件的恤衫買了4件。

3. 電氣取暖設備

暖爐和被爐

我家10月份的用電量是150kwh（度，千瓦時），12月份由於使用取暖設備的緣故，用電量增加到240kwh。取暖設備包括電暖爐和電被爐。已知暖爐和被爐每小時的耗電率分別是1000w和400w，試求出暖爐和被爐的使用時間。

由於暖爐和被爐均是恆溫器（自動溫度調節器），使用時間也就是電流的流動時間。1kw即1000w，用電量（kwh）是

(0, 225)	(2, 220)	(4, 215)	(6, 210)
(8, 205)	(10, 200)	(12, 195)	(14, 190)
(16, 185)	(18, 180)	(20, 175)	(22, 170)
(24, 165)	(26, 160)	(28, 155)	(30, 150)
(32, 145)	(34, 140)	(36, 135)	(38, 130)
(40, 125)	(42, 120)	(44, 115)	(46, 110)
(48, 105)	(50, 100)	(52, 95)	(54, 90)
(56, 85)	(58, 80)	(60, 75)	(62, 70)
(64, 65)	(66, 60)	(68, 55)	(70, 50)
(72, 45)	(74, 40)	(76, 35)	(78, 30)
(80, 25)	(82, 20)	(84, 15)	(86, 10)
(88, 5)	(90, 0)		

圖1－7　$x+0.4y$ 的整數解數對

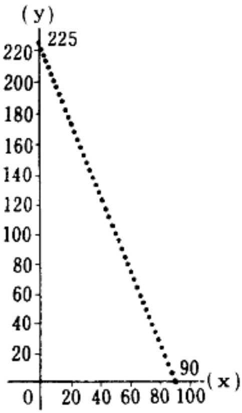


圖1－8　$x+0.4y=90$ 的圖解

（耗電率）×（使用時間）之積。所以，我們如設耗電率1 kw的暖爐的使用時間爲x，耗電率0.4 kw的被爐的使用時間爲y，取暖設備的總用電量是：

$$1\times x+0.4\times y \quad 即 \quad x+0.4y\ (kwh)$$

因它和240－150（kwh）相等，因此能夠列成方程式：

$$x+0.4y=90\ (kwh) \quad \cdots\cdots(1)$$

(1)式的解如作整數範圍內考慮，當x＝0時，y＝225，x＝2時，y＝220……x＝90時，y＝0，其所有的整數解如圖1－7所示。如用圖解表示，則如圖1－8。不言而喻，圖解中雖然有這麼多成爲(1)式解的點，但並不能連成一條直線，因爲前面已規定代入x，y的數值只是整數。然而問題在於變數x和y是表示用電時間，而用電時間不光只是整數，也有0.5或$\frac{2}{3}$這樣的有理數。

有理數範圍求解

現在我們在有理數的範圍內求(1)式的解。由於整數也是有理數的一種，因此前項求出的(0, 225)(2, 220)(4, 215)……(90, 0)等整數解也包括在有理數範圍的解內。此外，我們已知道x，y也有分數或小數的可能，故如(1, 222.5)($\frac{1}{2}$，$\frac{895}{4}$)($\frac{2}{3}$，$\frac{670}{3}$)等也構成(1)式的解。如此一來，方程式$x+0.4y=90$的解便有無限多個，因爲在任何2個有理數之間，都有無限多個有理數存在。表面在圖解上，便也形成了無限多的點。圖1－9是$x+0.4y=90$在有理數範圍內的圖解。雖然它有無限個解，因而在圖解上也有無限個點，但還是不能連結成爲一條直線，這是因爲在這條直線上還包含有不是$x+0.4y=90$在有理數範圍內解的點。

通常，像時間、重量、長度、面積、體積、速度、溫度等稱爲連續量，是一種不能夠僅用有理數表示的量。

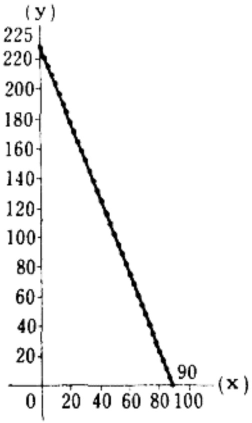


圖1－9　$x+0.4y=90$的圖解

方程式$x+0.4y=90$中的變數x, y代表用電時間，是一種連續量，它的範域不是整數，也不是有理數，而是包括整數、有理數以及另一種無理數在內的實數集合。更正確地說，x的範域是0以上，90以下的實數集合，y的範域是0以上，225以下的實數集合，如用符號表示，即：

$$x\text{範域}\ \{x \mid 0 \leqq x \leqq 90,\ x\text{是實數}\}$$

$$y\text{範域}\ \{y \mid 0 \leqq y \leqq 225,\ y\text{是實數}\}$$

無限的解和條件

當x，y的範域是實數的集合時，1次式$x+0.4y=90$的圖解才成爲一個連續的點集合，一條眞正的直線（圖1－10）。我們將這叫作1次式$x+0.4y=90$的圖解是通過(90, 0)，傾斜度$-\frac{5}{2}$的直線。但直線只是第1象限的部份（包含x軸，y