SHUXUE

高等教育学历文凭考试全国统考课程教材

高等数学

【修订本】

教育部高等教育司 组编

中国财政经济出版社

前　言

为了更好地贯彻落实《中国教育和发展纲要》的精神，做好高等教育学历文凭考试试点工作，原教育部成人教育司制订颁布了《高等教育学历文凭考试全国统考课程教学大纲》（以下简称《教学大纲》）。之后，又组织有关专家、教授编写了高等教育学历文凭考试全国统考课程《大学语文》、《高等数学》、《计算机基础》、《会计学基础》4本教材。教材的使用对于贯彻《教学大纲》，规范学历文凭考试试点学校的人才培养，保证教育质量起到了重要的作用。

根据原教材实际使用情况，教育部高等教育司要求有关出版社依据《教学大纲》修订了教材，现推荐使用。请将使用教材的意见向我司和有关出版社反馈。

教育部高等教育司

一九九九年三月二十二日

编者的话

《高等数学》是参加学历文凭考试试点的民办高校工科类与经济类各专科专业的公共基础课，本书是教育部成人教育司与考试中心组织编写的国家学历文凭考试课程《高等数学》的教材。它完全按照《高等数学》课程的教学大纲进行编写，并参考了教育部考试中心制定的《高等数学》课程考试大纲的要求，适用于参加国家学历文凭考试试点的民办高校工科类与经济类各专科专业的《高等数学》课程教学。

本书包含了《高等数学》课程的教学大纲的全部内容。体现了各专科专业在一元微积分方面所必须具备的基本知识和基本能力的要求。根据民办高校培养应用性、技能型人才的培养目标，贯彻基础课宽口径和理论知识以够用为度的精神，本书的选材在符合科学性、系统性的基础上，恰当地把握了内容的广度和深度，努力使这部教材忠实地体现《高等数学》课程的教学大纲与考试大纲的要求。对于若干基本的数学概念，不追求完全形式化的严格叙述，而是尽可能地用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义。对于一元微积分中的一些重要的定理和结论，虽然适当地给出了一些必要的证明，但是更加重视对于这些定理和结论的直观的解释，并且重视引导学生正确地运用基本概念与基本定理去分析解决实际问题。

本书在每一节都附有适量的练习，每章后还附有复习题。这些练习与习题覆盖了教学大纲的所有内容，并且体现了考试大纲对于能力方面的要求。不但能够帮助学生复习巩固所学的知识，而且也能很好地满足国家学历文凭考试应考准备的需要。

本书由清华大学应用数学系韩云瑞教授主编并编写第一章，李海中教授（博士）编写第二章，刘庆华副教授编写第三章和第四章，扈志明副教授（博士）编写第五章和第六章。中国数学学会理事、北京市数学教学研究会理事长、北京航空航天大学李心灿教授担任主审，北京电视大学刘德荫教授也参加了审稿工作，并且提出了许多非常有价值的意见。

教育部国家考试中心社会考试处徐沪生处长非常关心本书的编写工作，编者就教材的编写工作多次与他交流观点和意见，受益匪浅。国家考试中心社会考试处的马炳勋同志对于本书的编写提供了多方面的帮助，并且提出了不少有益的建议。中国财经出版社的于燕同志担任本书的责任编辑，她不但有高度的责任感，而且对于书稿提出许多非常有价值的建议，表现了良好的业务素质。她的辛勤劳动和精益求精的工作态度对于本书的顺利出版作出了实实在在的贡献。编者对他们一一表示诚挚的感谢。

学历文凭考试是我国高等教育体制改革中出现的一个新事物，对于它的认识需要有一个过程，加之编者的水平有限，因此这部教材难免存在一些缺点与不足，恳请广大教师和同学批评指正。

1998 年 6 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbo

第一章 函　　数

函数是微积分学研究的主要对象. 这一章的主要内容包括函数的基本概念和各种属性，基本初等函数的性质和图形，初等函数与一些常见的非初等函数.

在高等数学这门课程中，函数中的自变量和因变量都是实数，因此研究函数离不开实数. 所以我们必须对于实数有基本的了解，在这一章的开始，首先对于实数集的有关知识作了必要的介绍. 在高等数学这门课程中，经常涉及到平面上的直线，为了学好高等数学，对于有关直线的知识作适当的复习是必要的.

§1.1 实　　数

一 集　合

一个集合 S 是某些个体的总和，这些个体或者符合某种规定，或者具有某些可以识别的属性. 集合 S 中的每一个体 a 称为 S 的元素，如果 a 是 S 的一个元素，记为 $a \in S$，读作“a 属于 S”；如果 a 不是 S 的元素，则记为 $a \notin S$，读作“a 不属于 S”.

一般情况下，集合有两种表示方法，这两种表示方法可以通过下面的例子来说明.

例 1.1.1 考察由下列元素

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

组成的集合 S，我们可以将其表示成

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

这种表示集合的方法，即将集合 S 中的所有元素都列举出来，称为列举法.

集合 S 也可以用下面的方式表示：

$$S=\{n \mid n \text{ 是小于 } 10 \text{ 的非负整数}\}$$

在这里我们用一个命题："n 是小于 10 的非负整数" 来描述集合 S 中所有元素 n 的属性，这种表示集合的方法，称为描述法.

在数学中经常用描述法来表示一个集合，即用 $\{x \mid p(x)\}$ 表示所有满足命题 $p(x)$ 的实数 x 组成的集合. 例如 $\{x \mid x^2+1=2\}$ 表示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合；$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 表示所有满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 构成的集合.

现在考察下面两个集合：

$$A=\{1,2\},\quad B=\{1,2,3,4\}$$

可以看出，A 中的每一个元素都属于 B. 一般情形，如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B，则称 A 包含于 B，并且记作 $A\subseteq B$. 例如

$$\{2\}\subseteq\{1,2\},\ \{3,5\}\subseteq\{1,2,3,4,5\},\ (0,1)\subseteq[0,1]$$

当 $A\subseteq B$ 时，称 A 是 B 的一个子集.

空集是不包含任何元素的集合，空集的记号是 ϕ. 例如，在实数范围内，集合 $\{x \mid x^2+1=0\}$ 就是空集. 空集是任何一个集合 S 的子集.

设 A，B 是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如，

$$\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$$

$$\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$$

二　实　数

高等数学这门课程主要是在实数范围内讨论问题，因此，需要对于实数和实数集有足够的认识．在这一节，我们对实数作简单的介绍．

数轴是研究实数的重要工具，有关实数的许多性质，都可以通过数轴直观地表现出来，因此，我们首先建立数轴的概念．

在一条直线上取定一点，记作 O，称其为原点；取直线的一个方向为正向，并用箭头表示；再取一个单位长度，就可以构成数轴．数轴上的任意一个点 P，都对应于一个实数 x，这个实数 x 是这样确定的：假定点 P 与原点 O 重合，则 $x=0$．假定点 P 不与原点 O 重合，首先用所取的单位长度量出线段 OP 的长度 $|OP|$．如果点 P 位于原点的右侧，则取 $x=|OP|$；如果点 P 位于原点的左侧，则取 $x=-|OP|$．反之，任给一个实数 x，都可以在数轴上找到一个点 P，使得点 P 所对应的实数为 x．这样以来，数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系（图 1－1）．

数轴也称为实数系的坐标系，数轴上与实数 x 对应的点 P 称为 x 的坐标．图 1－2 中标出了实数 $\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$，$\sqrt{2}$，π，$-\pi$ 的坐标．

人们对于数的认识是逐步发展的，首先认识的是自然数 $1,2,3,\cdots$ 和整数 $0,\pm1,\pm2,\cdots$ 然后是有理数，最后是无理数．

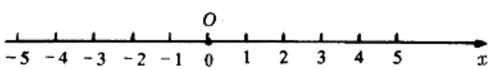

图 1－1

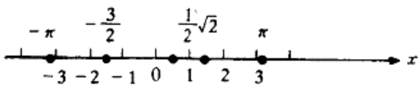

图 1－2

通常，用 N 表示所有自然数构成的集合；Z 表示全体整数组成的集合；Q 表示全体有理数组成的集合．在数轴上，与有理数对应的点称为有理点．

有理数集包括所有整数与分数 $\frac{p}{q}$（其中 p, q 为整数，$q \neq 0$）．在有理数集中定义了四则运算（除数不等于零），有理数集对于四则运算是封闭的．也就是说，对于有理数任意进行加、减、乘和除法运算（零不能作除数），得到的结果仍然是有理数．

此外，有理数集 Q 还有两个重要性质：一个是有序性，即有理数集 Q 是一个有序集，在数轴上，所有的有理点是按照从小到大的顺序自左至右排列的．有理数的另一个重要性质是它的稠密性，即任意两个有理数之间有无穷多个有理数，有理点在数轴上是处处稠密的，即任意一个非空的开区间内都有无穷多个有理点．

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它们不能充满整个实轴．例如，设边长为 1 的正方形的对角线长等于 a，则 $a^2 = 2$．以数轴上的原点为圆心、a 为半径作圆周，则圆周与实轴的交点就不是有理点（图 1－3）．实际上，我们已经知道这个点是

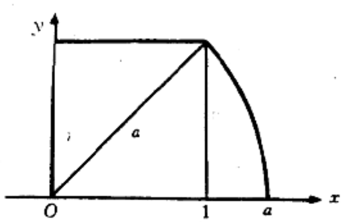

图 1－3

无理数$\sqrt{2}$. 于是，在数轴上除了有理点之外还有许多空隙，这些空隙处的点称为无理点. 无理点所代表的数称为无理数，所有无理数构成的集合称为无理数集.

每个有理数可以表示为一个有限小数，或者一个无限循环小数；每个无理数可以表示为一个无限不循环小数，但是经常用有限小数作为无理数的近似值，例如

$$\sqrt{2}\approx 1.4142136,\ \pi\approx 3.1415927 \text{ 等}.$$

有理数和无理数统称为实数，所有实数构成的集合称为实数集，全体实数构成的集合记作 R. 数轴上的点与实数之间是一一对应的关系，因此，通常将实数 x 与数轴上代表 x 的点不加区分. 例如，实数 x 也称为点 x，反之亦然.

在实数集中定义了四则运算，而且实数集对于四则运算也是封闭的，实数集同样具备有序性和稠密性. 除此之外，实数集还有另外一个重要性质，即实数集的连续性. 实数集与数轴上的点是一一对应的，如果一个点在数轴上连续运动，那么，它经过的每一个位置都代表一个实数. 有理数集则不具备这个性质.

三　实数的绝对值

对于任意一个实数 x，它的绝对值为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

例如，$|-3|=|3|=3$；$|-1.3|=1.3$；$|0|=0$ 等.

绝对值 $|x|$ 有明显的几何意义：实数 x 的绝对值 $|x|$ 等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质：(以下 x, y 为任意实数)

1. $|x|=\sqrt{x^2}$　　　2. $|x|\geqslant 0$；仅当 $x=0$ 时，$|x|=0$

3. $|-x|=|x|$　　　4. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

5. $|x+y|\leqslant |x|+|y|$　　　6. $||x|-|y||\leqslant |x-y|$

7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$　　　8. $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} (x \neq 0)$

性质 1－4 可以由绝对值的定义直接得到. 下面仅证明性质 5 和 6，其它留给读者.

性质 5 的证明　由绝对值的定义直接得到

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

将上述两式相加，就得到

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

于是有

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

性质 6 的证明　注意到 $x = (x - y) + y$，在性质 5 中用 $x - y$ 取代 x，可以得到

$$|x| \leqslant |x - y| + |y|$$

即

$$|x| - |y| \leqslant |x - y| \tag{1.1.1}$$

同样的方法又可以得到

$$|y| - |x| \leqslant |x - y| \tag{1.1.2}$$

联合 (1.1.1)，(1.1.2) 两式，就得到性质 6.

由绝对值的性质可以看出，$|x| \leqslant r (r > 0)$ 等价于 $-r \leqslant x \leqslant r$，因此集合 $\{x \mid |x| \leqslant r\}$ 与集合 $\{x \mid -r \leqslant x \leqslant r\}$ 是相同的.

四　若干常见的实数集

今后我们经常要考虑实数集 R 的子集. 接触最多的是各种区间. 它们是：

开区间　$(a, b) = \{a < x < b\}$;

闭区间　$[a, b] = \{a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开半闭区间　$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;

无穷区间$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$(-\infty,+\infty)=R$.

通常用大写英文字母 I 表示区间.

这里需要说明的一点是,$+\infty$,$-\infty$以及∞只是一种符号,而不是数,因而不能参与四则运算.

例 1.1.2 利用区间表示集合$S=\{x\mid x^2+x-12>0\}$.

解 不等式左端分解因式,将不等式化成等价的形式:

$$(x-3)(x+4)>0$$

等式左端是两个因子的乘积,为了使这个乘积为正数,必需且只需使它们符号相同,即或者 $x-3>0$,$x+4>0$,或者 $x-3<0$,$x+4<0$. 即或者 $x>3$,$x>-4$ 同时成立,或者 $x<3$,$x<-4$ 同时成立. 前一种情形意味着$x\in(3,+\infty)$,后一种情形意味着$x\in(-\infty,-4)$. 也就是说,不论$x\in(3,+\infty)$,还是$x\in(-\infty,-4)$,都满足不等式 $x^2+x-12>0$. 因此有,

$S=\{x\mid x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$.

用 ϕ 表示空集. 我们已经知道,空集不含任何元素,因此空集是任何集合的子集. 今后在提到一个集合时,如果不加特别声明,一般都是非空集.

设 S 为一个非空数集,如果存在正数 M,使得对于所有的 $x\in S$,都有 $|x|\leqslant M$ 则称 S 为有界集.

集合 A 中如果有最大的数 b,则称 b 为 A 的最大值. A 的最大值记作 $\max A$. 集合 A 中如果有最小的数 c,则称 c 为 A 的最小值. A 的最小值记作 $\min A$.

例如,闭区间$[0,1]$和开区间$(0,1)$都是有界集. 闭区间$[0,1]$的最小值和最大值分别是 0 和 1,而开区间$(0,1)$既无最大值,也无最小值. 这说明,有界数集未必有最大值和最小值.

五 平面上的点

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy 交于点 O,每条

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbo