东北师范大学数学函授本科

立 体 几 何

馬忠林 張永順 任愚夫 编

东 北 师 范 大 学 函 授 教 育 处

1957. 7. 出 版

前　　言

这本講义是根据师范学院数学系初等数学研究“立体几何”教学大綱編写的，为了适於函授生的需要，又进行了一次修改与补充，虽然我們在教学中試用过兩次，但在內容方面仍难免有不妥当，甚至錯誤的地方，因此，希关心我們教学工作的同志們多賜批評与指正。

編者　　於东北师大数学系。

目　　录

前　　言

第一章　空間直線的平面

第二章　立体几何作圖、軌跡

第三章　多　面　体

第一章　空間直線与平面

这一章的內容，目的在於概括地复習中学立体几何里有关点、直綫、平面間相互关系，以便於順利地展开以后各个章节的討論，因为它們之間的相互关系是立体几何学的基础．

点、直綫、平面原是立体几何的基本概念．以后我們用拉丁字母A、B、C，……表示点；用a、b、c，……表示直綫；用希腊字母α、β、γ，…表示平面．

公理1．过兩个已知点A、B，有一条且只有一条直綫a．

公理2．每条直綫上至少有兩个点，並且有不在一条直綫上的三个点存在．

公理3．若A、B、C是不在一直綫上的三个点，則过这三点有一个且只有一个平面存在．

公理4．若一直綫上的兩个点在某一个平面上，則这直綫上的所有点都在这平面上．

这时，直綫叫做在平面上，或直綫被平面所包含，而平面叫做过这直綫的平面．

公理5．若兩平面α、β有一个公共点A，則必有过A点的一条公共直綫a．且所有公共点都在此直綫a上．

公理6．至少有四个点不在同一平面上。

根据上述公理，可以証明下列的定理．

定理1．过已知直綫a和不在这直綫上的一点A，可引一平面，且只可引一平面．

定理2．过兩相交直綫，可引一平面，且只可引一平面．

定理3．过兩平行綫可引一平面，且只可引一平面．

§1. 兩条直線的相互位置

空間兩条直綫，或在同一平面上，或不在同一平面上．如果在同一平面的情形，我們已在平面几何里研究过，它們不是相交就是平行．

如果兩直綫不在同一平面上（圖1），則叫做異面直綫。这样的直綫是存在的，因为至少有四个点A、B、C、D不在同一平面上，过四点中任意兩点的直綫与过另兩点的直綫，例如AB与CD，就不在同一平面上．

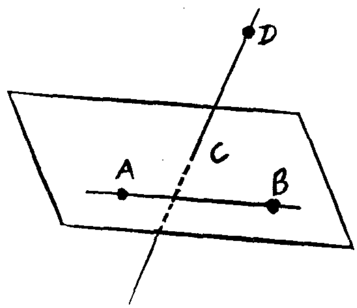

圖 1

总之，空間兩条直綫的相互位置有下列各种情形：

1）異面直綫，

2）在同一个平面上的兩直綫，这时：

（a）相交，

（b）平行．

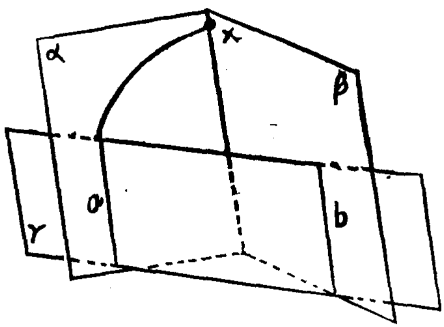

圖 2

下面討論关於平行直綫的定理．

定理4：如果分别通过兩平行綫的兩平面相交，則它們的交綫与兩已知平行綫平行。

証明．設平面α、β分别通过兩已知平行綫a和b，且相交於直綫c（圖2）．我們要証明c∥a∥b．

因为，a，c在同一平面α上，如果它們交於某一点x，則点x在c

上因而点 x 既在平面∝上又在β上．又点 x 在兩已知平行綫 a，b 所在的平面γ上，因而点 x 同时在平面β与γ上．因为这兩平面的公共点都在它們的交綫 b 上，所以点 x 必在 b 上．因此，点 x 是已知直綫 a 的 b 的公共点．但这与假設矛盾，因此 a 平行於 c．同理，可証 b 也平行於 c．

定理 5．如果兩直綫都平行於第三直綫，則这兩直綫互相平行．

証明．設 $a /\!/ c$，$b /\!/ c$，求証 $a /\!/ b$．

如果三直綫在同一平面上，这时，如在平面几何里証明，定理成立．

三已知直綫不在同一平面上时，在直綫 a 上取任意 A 点与直綫 b 作平面∝，再以点 A 与直綫 c 作平面β．設这兩平面交於过点 A 的直綫 a'，則 $a' /\!/ b$，$a' /\!/ c$（定理 4）．因为过点 A 平行於 c 的直綫只有一条，所以 a' 必重合於 a．又由於 $a' /\!/ b$，則 $a /\!/ b$．

定理 6．兩相交直綫分別与另兩相交直綫．平行时，則其交角相等或相补．

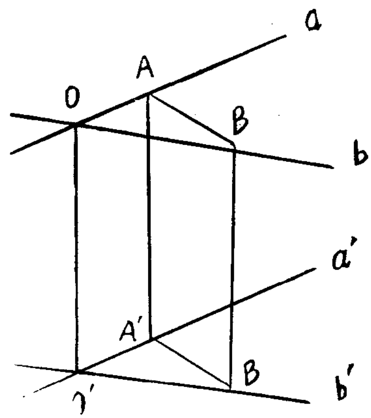

圖 3

証明．設 $a /\!/ a'$，$b /\!/ b'$（圖 3），a 与 b 交於点 O，a' 与 b' 交於点 O'，求証明∠（a，b）与∠（a'，b'）相等或相补．

在直綫 a、b 上各任取一点 A、B，連結兩点 O、O'，过点 A、B 作 OO' 的平行綫 AA'、BB'，这兩直綫与 a'，b' 交於点 A'、B'．四边形 $OO'A'A$、$OO'B'B$ 是平行四边形，所以 $AA \underline{\underline{/\!/}} OO'$，$BB' \underline{\underline{/\!/}} OO'$．因此 $AA' \underline{\underline{/\!/}} BB'$．

由此可知 $AA'B'B$ 是平行四边形，因而 $AB=A'B'$．但 $OA=OA'$，$OB=OB'$，所以 $\triangle OAB=\triangle O'A'B'$．因此 $\angle AOB=\angle A'O'B'$．

同样可証 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 的补角相补或 $\angle AOB$ 的补角与 $\angle A'O'B'$ 相补的情形．

系1．空間里对应边平行且方向相同（或相反）的兩角相等．

現在我們来研究空間兩直綫間的角这个概念。如果空間兩直綫在同一平面上，則这兩直綫間的角的定义，仍服从平面几何上的規定。至於兩異面直綫間的角，可借助於定理6来定义．

兩異面直綫間的角就是分別与这兩直綫的平行且相交的兩直綫間的角（圖4）．

虽然兩直綫交成相补的兩个角但一般来說，它們都可以叫做兩直綫間的角．如果把相交直綫看作是有向的，这时，則得到一个确定的角．

兩个異面直綫間的角是直角时，則說它們是互相垂直的．

定理7．通过直綫上的每一点可作無数直綫垂直於該直綫．

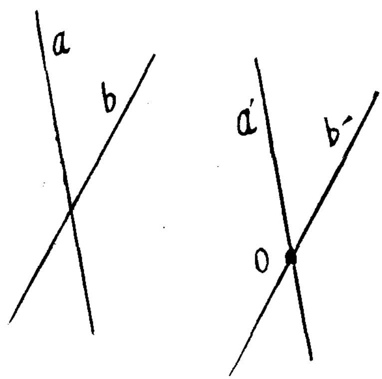

圖 4

証明，因为过已知直綫可作無数平面，在每个平面上，过已知直綫上的每个点都可作該直綫的一个垂綫．

§2. 直線与平面的相互位置

直綫与平面的相互位置有下面三种：

1）直綫在平面上（直綫上的所有点都在平面上），

2）直綫与平面平行（直綫上的任何点都不在平面上），

3）直綫与平面相交（直綫与平面有且仅有一公共点），

我們首先討論有关直綫与平面平行的定理.

定理8．不在平面上的一直綫与平面上的一直綫平行时，则它必平行於这个平面.

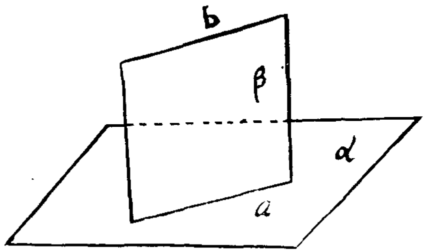

圖 5

証明. 設直綫b平行於平面∝上的一条直綫a（圖5），求証b∥∝.

直綫a，b平行，则它們在某一平面β上，如果b不平行於平面∝，则b与平面∝上的直綫a交於某一点，但这与a∥b的假設矛盾，所以直綫b与平面∝不相交，也就是b∥∝.

系1．通过平面外一点有無限多条直綫，平行於已知平面.

定理9．如果直綫a平行於已知平面，则通过直綫a的平面与已知平面的交綫，都平行於a；並且它們互相平行（圖6）.

証明. 設a平行於已知平面∝，通过直綫a的平面β，γ，δ，…与平面∝的交綫为b，c，d，…，要証明a∥b，a∥c，a∥d，…，以及b∥c∥d….

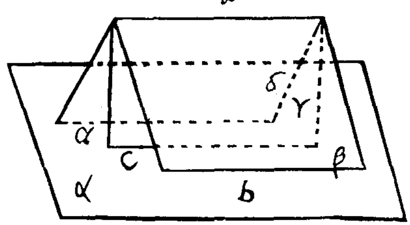

圖 6

因为a∥∝，a与∝無公共点，因此a与b無公共点，又a与b同在一平面β上，所以a∥b. 同理可証a∥c，a∥d，….

其次由定理5可知b∥c∥d….

系 1．一平面与一直線平行，过平面上一点引已知直線的平行線时，則这直線在已知平面上．

系 2．一直線平行於二相交平面时則平行二平面的交線．

系 3．过兩異面直線之一，且平行於另一直線的平面，有一个且仅有一个．

系 4．兩平行直線之一平行於某一平面，則另一直線也平行於这个平面（或在这平面上）

其次，討論有关直線与平面相交的定理．（主要是垂直）

定理10．二平行線之一与某一平面相交时，則另一直線也必与这个平面相交．

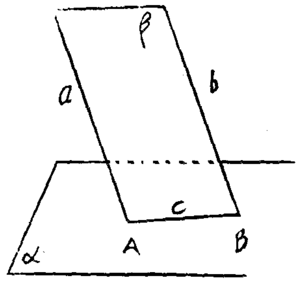

圖 7

証明．設兩平行線 a，b 之一例如 a，与平面 α 交於一点 A（圖 7）．因为 $a /\!/ b$，所以 a，b 所決定的平面 β 必与平面 α 交於过点 A 的某一直線 c，直線 c 在平面 β 上，且与直線 a 相交，那么它也必与 a 的平行線 b 相交．設交点为 B，則点 B 就是直線 b 与平面 α 的交点．

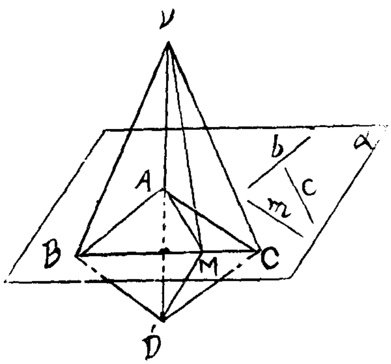

圖 8

定理11．如果一直線垂直於一平面上的任意兩相交直線，則它垂直於这个平面上的一切直線．

証明．設直線 a 垂直於平面 α 上的兩条直線 b，c．求証它也垂直於平面 α 上的任意直線 m（圖 8）．

过直線 a 与平面 α 的交点 A 作直線 AB、AC，使他們分別平行於 b、c，在直線 a 上点 A 向兩側截取線段 AD＝AD′．連結線段 BD、BD′、 CD，CD′，因为三角形ABD与ABD′相等，所以BD＝BD′，同理CD＝CD′.

作直綫BC，得出两个相等三角形BCD和BCD′，所以，角DCB等於D′CB.

作直綫AM平行於第三条已知直綫m，並且与BC交於点M，則△DCM＝△D′CM，由此DM＝D′M．因此它的底边DD′的中点A与頂点M的連綫AM是中綫，同时也是高，所以AM⊥a，但AM∥m，这就証明a⊥m.

如果一直綫垂直於平面上的任意直綫，則說这条直綫垂直於这个平面.

垂直於平面的直綫与平面的交点叫做垂足.

定理(逆定理)12．过直綫上的任意一点垂直於这直綫的所有直綫，都在过这点垂直於这直綫的平面上.

証明．設平面∝垂直於直綫a，点A是它們的交点.

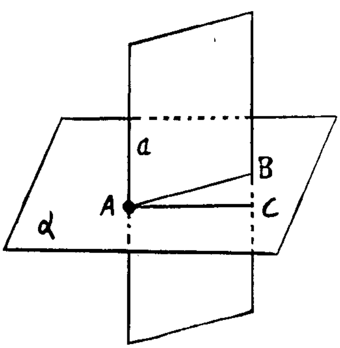

圖 9

如果AB垂直於直綫a（圖9），但它不在平面∝上，則过AB与a的平面β，与平面∝交於一直綫AC，根据定理11可知AC⊥a，这样就变为在同一平面β上，有两条直綫过直綫a上一点A且垂直於a，这是不可能的．所以AB必在平面∝上.

系1．过一点垂直於同一平面的直綫不能多於一条.

系2．过一点垂直於所設直綫的平面不能多於一个.

自一点向平面所作垂綫的垂足，叫做这点在这平面上的正射影（以后簡称射影）.

如果从一綫段兩端点向平面作垂綫，則在平面上以兩垂足为端点的綫段，叫做已知綫段在平面上的正射影.（簡称射影）

与平面相交但不与平面垂直的直綫，叫做斜綫.

定理13. 从平面外一点向平面引垂綫和斜綫时，則(1)垂綫短於斜綫；(2)有相等射影的斜綫相等；(3)相等斜綫的射影相等；(4)兩不等斜綫中較短的斜綫有較短的射影；(5)兩不等斜綫中有較短射影的斜綫較短.

斜綫与它在平面上的射影所成的角，叫做这斜綫与平面間的角.

定理14. 斜綫与平面間的角，小於这斜綫与平面上任意直綫（射影除外）所成的角.

証明. 設 AB 是已知斜綫，与已知平面 α 交於点 B（圖10）. a 是平面 α 上的任意直綫，点 A_0 是点 A 在平面 α 上的射影。

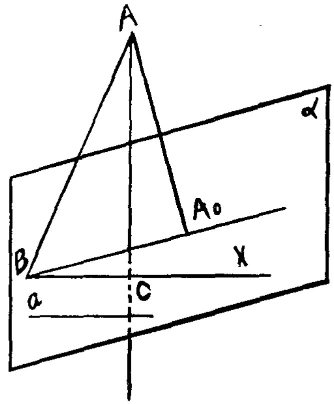

圖 10

設 BX 是平面 α 上过点 B 且平行於 a 的直綫，則直綫 AB 与直綫 a 所成的角等於 $\angle ABX$. 我們要証明 $\angle ABA_0$ 小於 $\angle ABX$.

在直綫BX上截取綫段 BC=BA. 在三角形 ABA_0 与ABC 中，有兩对相等的边，而第三边 $AA_0<AC$. 所以 $\angle ABA_0<\angle ABC$.

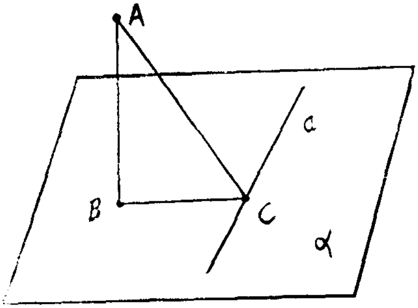

圖 11

定理15. 自平面外一点向平面和这平面上一直綫各作垂綫时，則过兩垂足的直綫垂直於平面上的已知直綫.

証明. 若直綫 AB 垂直於平面 α，AC 垂直於平面 α 上的一直綫 a，

点B和C分别是平面和直綫上的垂足，求証 $BC \perp a$.

因为 $AB \perp \alpha$，所以 $AB \perp a$. 又 $AC \perp a$，所以 a 垂直於 AB、AC所确定的平面. 也就是 $a \perp BC$.

系1. 自平面外一点向平面作垂綫，自垂足向平面上一直綫作垂綫时，则这垂足与已知点的連綫垂直於平面上的已知直綫.

这个命題，叫做三垂綫定理.

系2. 自平面外一点向平面上的一直綫作垂綫，过垂足在已知平面上作已知直綫的垂綫，在此兩垂綫所决定的平面內，自已知点作后一垂綫的垂綫时，則它必垂直已知平面.

定理16. 兩平行綫之一垂直於某一平面时，則另一直綫也垂直於这个平面.

証明. 如果兩平行綫 a，b 之一，例如 a 与平面 α 相交，則另一直綫 b 也必与这平面相交（圖12）. 由於直綫 a 垂直於平面 α 上的所有直綫，所以，直綫 a 的平行綫 b 也垂直这平面上的所有直綫，因此它垂直於这平面.

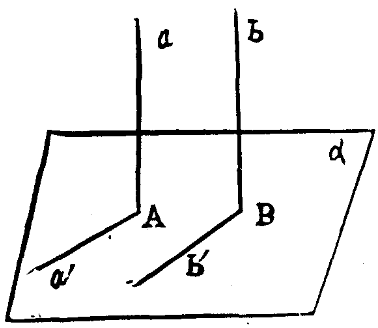

圖 12

系1. 垂直於同一平面的兩直綫平行（定理16的逆定理）.

因为，如果兩直綫 a，b 都垂直於平面 α，并且假定 a 不平行於 b，則可在过 a 与点B（b 与 α 的交点）的平面上作直綫 $b' \parallel a$. 由定理16可知直綫 b' 必垂直於平面 α，但过平面上一点B垂直於平面 α 的直綫不能多於一条. 所以直綫 b' 必重合於 b，也就是 $b \parallel a$.

系2. 垂直於同一平面的所有直綫，互相平行.

§ 3. 兩平面的相互位置

兩个平面間的相互位置有下面兩种情形:

1）平行（兩平面沒有公共点），

2）相交（兩平面有一公共直綫）.

首先討論有关兩个平面平行的定理.

定理17 .垂直於同一直綫的兩个平面互相平行.

証明. 設$\alpha \perp a$、$\beta \perp a$（圖13），求証$\alpha // \beta$.

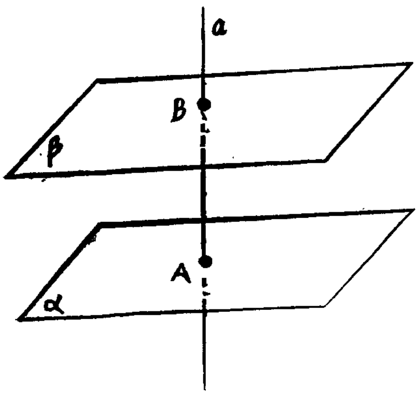

圖 13

如果α与β有一公共点x，三角形ABx將有兩个直角∠A与∠B，这是不可能的。所以α与β不能有公共点，也就是$\alpha // \beta$.

定理18. 如果一平面上的兩相交直綫平行於另一平面上的兩相交直綫，則此兩平面平行.

証明. 設$a // a'$，$b // b'$，且a与b、a'与b'相交，a、b在平面α上，a'、b'在平面β上（圖14）. 求証$\alpha // \beta$.

假設α与β相交於某直綫c，显然c至少与a、b兩直綫之一相交. 因此平面β也至少与a、b兩直綫之一相交. 这与假設矛盾. 因此$\alpha // \beta$.

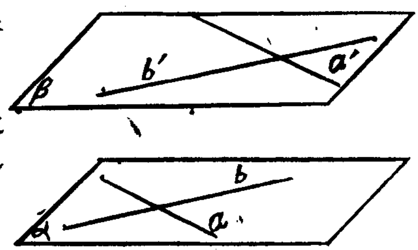

圖 14

系1. 过已知平面外的一已知点，有一个且只有一个平面平行於已知平面.

系2．兩个平面都平面於第三平面，則这兩平面彼此平行．

因为如果相交則通过它們的交点將有兩个平面平行於第三平面，这与系1矛盾．

定理19．兩平面互相平行，过其中一平面上的一点引另一平面的平行綫时，則这直綫在前一平面上．

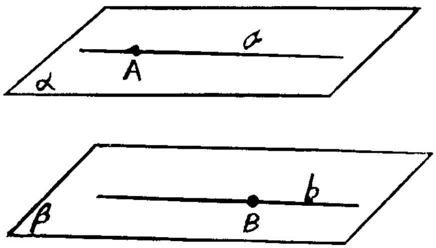

圖　15

証明．設二平面α，β平行（圖15），过平面α上的一点A引直綫a，使a∥β，求証a在平面α上．

过β上的一点B引直綫a的平行綫b，这时，因为a∥β，則b在平面β上（定理9系1），所以b平行於平面α．但直綫a过平面α上的一点A且平行於b，所以直綫a在平面α上．

系1．如果一直綫与兩平行平面之一相交，則必与另一平面相交．

現在討論有关兩平面相交的定理．

定理20．如果一平面与兩平行平面之一相交則必与另一平面相交．

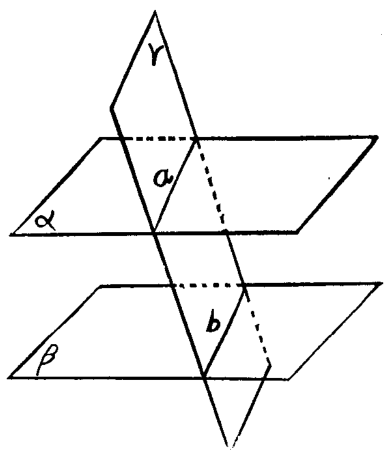

圖　16

証明．設平面γ与平行於平面β的平面α相交（圖16）．求証γ也与β相交．

假設平面γ不与β相交，則γ∥β，因此α∥β，这是不可能的．所以γ与β相交．

定理21．如果一平面与二平行平面相交，則兩交綫互相平行．

因为如果兩条交綫相交，則兩平行平面也必定相交，这与假設矛盾（圖16）。

平面被它上面的一直綫分成兩部分，其中每一部分，都叫做从該直綫引出的半平面。

直綫 a 和从它引出的兩个半平面 ∝、β 所成的圖形（圖17），叫做二面角。兩半平面 ∝，β 叫做二面角的面。直綫 a 叫做二面角的稜。稜为 a、面为 ∝、β 的二面角，常用 ∝－a－β 表示，（或∠(∝β)）。

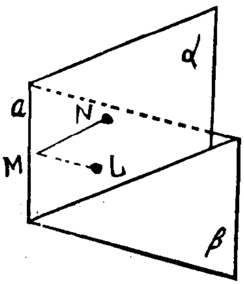

圖 17

自二面角的稜 a 上一点M，在二面角的兩个面上分别作稜 a 的垂綫 NM、LM时，∠LMN 叫做这个二面角的平面角（或示度角）。

二平面相交所構成的具有公共稜的二面角中，平面角互补的兩个二面角，叫做补二面角。平面角对頂的兩个二面角，叫做对稜二面角。

如果二面角的平面角为直角、鈍角或銳角，則其相应的二面角，分别叫做直二面角、鈍二面角或銳二面角。

直二面角的兩个面，叫做互相垂直的平面。

定理22. 过已知平面的一条垂綫的任意平面，必垂直於已知平面。

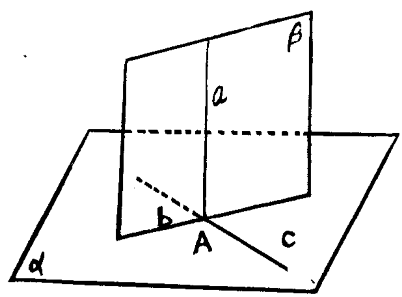

圖 18

証明. 如果直綫 a 垂直於平面 ∝（圖18），則过 a 可作无数平面，設平面 β 是其中的一个。

設 b 是平面 ∝、β的交綫，側a⊥b．过 a 在平面上的垂足A在平面 ∝ 上作 b 的垂綫c，則 a⊥c．但是∠(a，c)是二平面 ∝、β 所成二面角的