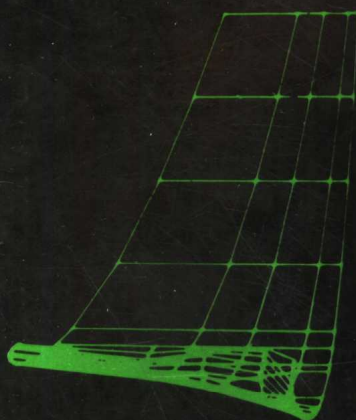
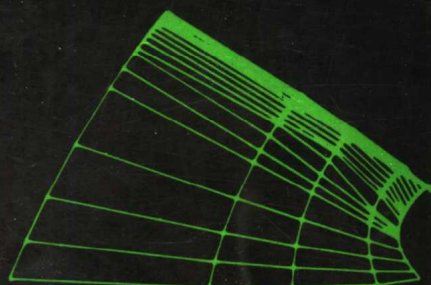
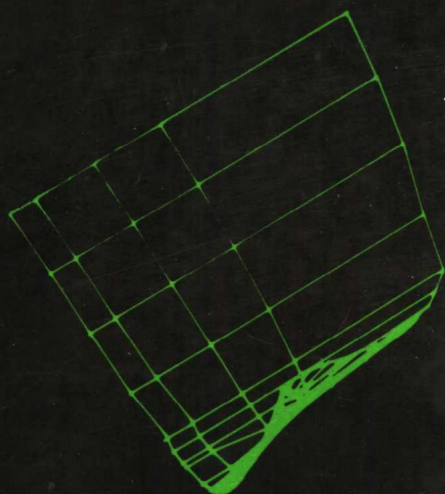


電腦繪圖的數學基礎

卓彰賢 葉秋煌 譯



國立編譯館主編

SUPER

超級科技圖書股份有限公司

電腦繪圖的數學基礎

卓彰賢 葉秋煌 譯

國立編譯館主編



超級科技圖書股份有限公司

SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER

電腦繪圖的數學基礎

MATHEMATICAL ELEMENTS FOR COMPUTER GRAPHICS

版權所有

超級

翻印必究

本書著作權屬國立編譯館所有

作者 卓彰賢、葉秋煌
發行人 林國富
發行所 超級科技圖書股份有限公司
業務部 永和市林森路 50 號 4 樓
電話 9251021
郵政劃撥帳號 1009155-4
行政院新聞局登記證局版台業字第 2405 號
承印者 申全盛彩色印刷廠
中和市員山路 294 巷 9 號
初版 中華民國七十四年十二月
二版 中華民國七十五年十月
定價 壹佰捌拾元整

SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER SUPER

前言

一個嶄新的和迅速發展的，被稱為“計算機繪圖”之領域正在湧現。這個領域同時結合了新舊兩個領域：古老的圖形語言方法和嶄新的計算機技術。幾乎每個人都會受到這種快速發展技術之影響。一個應用計算機繪圖的新時代正在開始。這裏不僅有最初已在軟體和硬體方面做出許多貢獻的大公司和機構，也有普通使用者。廉價的圖形顯示裝置、分時系統，加上小型與微型計算機之進展，促成了這種變化。今天，用計算機繪圖是實用、可靠、便宜和易於收效的。

本書的目的是用統一的方式對計算機繪圖技術的數學基礎提供初學的入門。雖然表達材料的方式是新的，但是沒有實際上新的數學材料。本書所有資料均散見於各種技術文獻中。本書試圖用同一種表示法將所有這些內容集中在一起。

在選材中，我們選用的方法基本上是數學性的而不是程序性的。故此，讀者能看到書中對旋轉、平移、透視、曲線曲面之描述等將比隱藏結、面的消除得到更為廣泛深入的討論。大學一年級的數學，對本書大部分內容將是足夠的先修課程。

在第一章討論了現代的計算機繪圖技術以後，隨著介紹了以齊次座標的矩陣方式來表示圖形元素的處理方法。然後，在以後的章節中討論了在數字計算機內表示點、直線、曲線、和曲面的現行方法，以及討論了操縱和顯示計算機之圖形輸出的軟體程序。

與幾何圖形之旋轉、平移、伸縮的一般方法一起，還給出了產生軸測圖、透視圖的數學方法。又介紹了定義以顯函數和參數表示之二維和三維曲線的過程。曲結定義方法中包括了使用圓錐曲結、圓弧插值、三次線規、拋物線混融、Bezier曲線和以B線規為基礎的曲線。書中也包括了描述曲面的數學簡介。

交談式繪圖組合程式中，大多數基本元素的計算機算法，在附錄中做為BASIC* 語言副程式繪出。但是算法中對那些實際顯示結果所必需的編碼，則有意不做介紹。不幸的是沒有一種標準的語言指令或副程式可以用於圖形顯示。雖然在附錄A中繪出了基本圖形和圖形要素的一些初步介紹，但是每一使用者都必須在他現有的計算系統和製圖設備的範圍內進行研究。

本書的基本想法是給大學水準主修科技學科的學生作計算機繪圖入門課程的基礎。這樣，它既適用於大學也適用於工藝學校，也適合於做為更高級的計算機程式課或者某些高級數學課之補充教材。再者，它也能使職業程式編譯人員在使用中獲益。最後，書中的正式計算程式，對有志於發掘計算機繪圖能力的使用者將是有用的。

致謝：

作者對美國海軍學校的鼓勵與支持表示衷心感謝。由校行政、全體教師、特別是學員們所提供的學術環境，十分有助於本書中資料的累積。

沒有一本書能不依靠多數人的幫助而寫成。在這裏我們向其中的幾位表示感謝。首先是史蒂夫·孔斯(Steve Coons)，他審閱了全部手稿，並提出了不少寶貴意見。李察·萊森費爾德(Rich Reisonfeld)審閱了B線規曲結與曲面的部分。Pierre Bezier教授審閱了Bezier曲結與曲面部分。伊凡·薩瑟藍(Ivan Sutherland)促成了第三章中三維重建方法之寫作。特別要感謝劍橋大學CAD(計算機輔助設計)小組中過去和現在之成員。尤其是羅賓·福雷斯特(Robin Forrest)查爾斯·藍(Charles Lang)與托尼·納托本(Tony Nutbourne)之工作，他們的工作對計算機圖學的科目提出了深刻的見解。最後，對路埃·納普(Louie Knapp)提供了一個B線規曲線之原始FORTRAN程式表示感謝。

* BASIC程式語言是Dartmouth學院之註冊商標

作者也感謝伊萬斯 (Evans) 與薩瑟藍計算機公司中許多人之幫助。特別是吉姆·卡藍 (Jim Callan)，他起草了一些文件，許多關於圖形表達、準備、顯示與交互作用之想法都是以這些文件為基礎的。也要感謝李·比羅 (Lee Billow) 為本書畫了所有的線圖。

第一章中不少藝術作品都是由許多計算機繪圖設備製造商所協力提供的。特別要提到的有：

- 圖 1-3, 1-17 伊萬斯 (Evans) 和薩瑟藍 (Sutherland) 計算機公司
- 圖 1-5, 1-7 Adage 公司
- 圖 1-8 Vector General 公司
- 圖 1-11 Xynetics 公司
- 圖 1-12, 1-18 CALCOMP 加利福尼亞計算機產品公司
- 圖 1-15 Gould 公司
- 圖 1-16 Tektronix 公司

D.F. 羅傑斯

J.A. 亞當斯

目 錄

前言

第一章 計算機繪圖技術引言	1
1-1 計算機繪圖概述	2
1-2 待顯示圖形的表示	3
1-3 準備要顯示的圖形	3
1-4 顯示已準備好的圖形	5
1-5 與圖形電腦交談	7
1-6 一些典型繪圖設備的介紹	11
1-7 繪圖裝置的分類	15
參考文獻	22
 第二章 點和直線	 25
2-1 引言	25
2-2 點的表示法	25
2-3 變換和矩陣	26
2-4 點之變換	26
2-5 直線之變換	28
2-6 中點之變換	29
2-7 平行線	31
2-8 相交直線	32
2-9 旋轉	33
2-10 反射	34
2-11 變比	34

2-12	聯合運算	35
2-13	一個單位正方形之變換	36
2-14	任意的二維旋轉方陣	38
2-15	二維平移和齊次座標	39
2-16	無窮遠點	44
2-17	繞一任意軸之二維旋轉	47
	參考文獻	49

第三章 三維變換與投影 51

3-1	引言	51
3-2	三維變比	52
3-3	三維錯移	54
3-4	三維旋轉	54
3-5	三維反射	58
3-6	三維平移	60
3-7	繞任意軸之三維旋轉	60
3-8	一般旋轉矩陣之各元素	61
3-9	仿射和透視幾何	65
3-10	軸測投影	66
3-11	透視變換	73
3-12	產生透視圖的方法	80
3-13	無窮遠點	86
3-14	三維資訊的重建	87
3-15	立體投影	93
	參考文獻	97

第四章 平面曲線 99

4-1	引言	99
4-2	非參數曲線	100
4-3	參數曲線	102

4-4	圓錐曲線的非參數表示	104
4-5	非參數化圓弧	108
4-6	圓錐曲線的參數表示	114
4-7	圓的參數表示	114
4-8	橢圓的參數表示	116
4-9	拋物線的參數表示	119
4-10	雙曲線的參數表示	121
4-11	圓錐曲線應用的程序	124
4-12	圓弧插值	126
	參考文獻	128

第五章 空間曲線 129

5-1	引言	129
5-2	空間曲線的表示	129
5-3	三次線規	132
5-4	標準化的參數	137
5-5	邊界條件	138
5-6	拋物線混融	149
5-7	Bezier 曲線	156
5-8	B 線規曲線	163
	參考文獻	175

第六章 曲面的描述及其形成 177

6-1	引言	177
6-2	球面	177
6-3	平面	182
6-4	曲面的表示	185
6-5	雙線性曲面	187
6-6	直紋曲面	189
6-7	線性孔斯 (Coons) 曲面	191

6-8	雙三次曲面塊	193
6-9	F 曲面塊	200
6-10	Bezier 曲面	200
6-11	B 線規曲面	206
6-12	一般孔斯 (Coons) 曲面	207
6-13	結論	212
	參考文獻	213

附錄A 計算機繪圖軟體 215

A-1	計算機繪圖的基本運算	216
A-1	計算機繪圖元素	218
A-1	正規空間	222

附錄B 矩陣運算 225

B-1	術語	225
B-2	加法和減法	226
B-3	乘法	226
B-4	方陣之行列式	227
B-5	方陣的反矩陣	228

附錄C 計算機算法 229

C-1	二維平移算法	229
C-2	二維變比算法	230
C-3	二維反射算法	231
C-4	一般二維旋轉算法	231
C-5	三維變比算法	232
C-6	繞 x 軸之三維旋轉算法	233
C-7	繞 y 軸之三維旋轉算法	234
C-8	繞 z 軸之三維旋轉算法	234
C-9	三維反射算法	235

C-10	三維平移算法	236
C-11	繞空間任意軸之三維旋轉算法	236
C-12	軸測投影算法	237
C-13	二測投影算法	238
C-14	等測投影算法	239
C-15	透視變換算法	240
C-16	重建三維座標算法	240
C-17	立體算法	243
C-18	非參數圓算法	244
C-19	參數圓算法	245
C-20	參數橢圓算法	246
C-21	參數拋物線算法	247
C-22	參數雙曲線算法	247
C-23	三點定圓算法	248
C-24	三次線規算法	250
C-25	拋物線混融算法	254
C-26	Bezier曲線算法	255
C-27	B 線規曲線算法	256
C-28	雙曲線性曲面塊算法	258
C-29	線性Coons 曲面算法	259
C-30	雙三次曲面塊算法	260
C-31	Bezier曲面算法	261

第一章 計算機繪圖技術引言

計算機繪圖是一門較新的技術，因此有必要弄清楚現行的術語。在這個領域裏，許多的術語和定義使用得很不嚴密，特別是計算機輔助設計（CAD），交互性繪圖（IG），計算機繪圖（CG），計算機輔助製造（CAM）等經常混淆使用，在某種意義上精確的意義存在著使人容易產生混亂。這些術語中，計算機輔助設計是最常用的。計算機輔助設計（CAD）可定義為：使用計算機來輔助進行任何一種單個零件，分系統或全系統的設計，這種使用不包括繪圖。設計過程可以說是總體的設計階段或零件的設計階段，這也包括設計與機助製造（CAM）的界面。

計算機輔助製造是除了設計過程之外，使用計算機輔助的製造或生產出一個零件。它包括機助設計結果的應用和零件所需程式編譯之間的直接界面〔編譯程式用APT（自動數控程式）和UNIAPT（聯合自動數控程式）等作語言〕，也包括對工具的操縱，這種操縱使用 hardwired 或 softwired（小型計算機）控制器從穿孔紙帶上讀取數據，獲得必要的指令去控制工具機或包括使用小型的計算機。

計算機繪圖是用計算機來作為定義、儲存、操縱、詢問和提供圖形輸出。這實質上是被動的操作，計算機把存儲的信息以圖形的方式準備好並顯示給觀察者。觀察者並不能直接控制所顯示的圖形。其應用是簡單的，例如用高速寬行打印機或分時電傳打字機終端來表示簡單函數的圖形；也可以是複雜的，如模擬一個太空艙的自動返回與著陸。

交談式繪圖也同樣用計算機來準備和顯示圖形資料，然而在交互性繪圖中觀察者能影響已顯示的圖形。也就是說，觀察者同圖形的對話是即時的，為了解實際時間限制的重要性，設想以適當的旋轉速度（例

2 電腦繪圖的數學基礎

如 $15^\circ/\text{秒}$) 旋轉一個由 1000 條線所組成的複雜三維圖形的問題，正如我們隨後將要看到的那樣，圖形的 1000 條線最便於用一個 1000×4 的線端點齊次座標矩陣來表示，而旋轉則最便於以該 1000×4 的矩陣乘一個 4×4 的變換矩陣來完成。為完成所要求的矩陣乘法，需要乘 16000 次，加 12000 次，除 1000 次，如果這個矩陣乘法用軟體來完成，時間是可觀的，為了明白這一點，讓我們看一台使用硬體浮點處理機的典型的微型計算機，它進行兩數相乘需用 6 微秒，兩數相加用 4 微秒，兩數相除用 8 微秒，這樣一來，上述的矩陣乘法需用 0.15 秒。

由於允許有動態運動的計算機顯示器要求圖形在每秒鐘內至少重劃（更新）30 次，才能避免閃爍，因而，很顯然的，上述速度不能使圖形平穩的變化。即使我們假定圖形在每秒鐘內只重算（修正）15 次，即每度重算一次，也仍然不可能用軟體完成平穩的旋轉。因此，這已不再是交談式繪圖了，為了重新得到交談式表示圖形的能力，可做幾件事情。巧妙地編譯程式，可以減少完成所需矩陣乘法的時間。不過，有一個限度，圖形的複雜性可以減少。但這樣一來最後顯示出的圖形可能不合要求。最後，矩陣乘法可用專門的數位型硬體矩陣乘法器來完成，這是最有希望的途徑，它可以容易地處理上面提到過的問題。

瞭解了這些術語之後，這一章的其餘部分將介紹計算機繪圖的概況，對現有的圖形顯示類型進行討論和分類。而計算機繪圖的基本畫法、設備控制和數據處理方面，其發展軟體系統所必須考慮的問題則列於附錄 A 中。

1-1 計算機繪圖概述

如上述，計算機繪圖是一門十分複雜而多樣化的學科。已涉及多種研究領域，諸如在計算機繪圖系統中所用到的元件的電子設計和機械設計，為使用計算機繪圖系統的觀察者準備和顯示圖形所使用的顯示表格和樹形結構的觀念。有關交談式計算機繪圖方面的討論刊載於 Newman 和 Sproul 的書中（參考資料 1-1），這裡僅試圖介紹那些對使用者有意義的課題。以這個觀點出發，計算機繪圖可劃分為以下範圍：

1 待顯示圖形的表示。

2. 準備要顯示的圖形。
3. 顯示已準備好的圖形。
4. 與圖形電腦交談。

這裡使用的“圖形”一詞是廣義的。即指被顯示在繪圖設備上的線、點、文字的任何集合。一個圖形可以像單線條或曲線那樣簡單，也可以是按比例繪製和帶註釋的圖形，或者像對飛機、船舶和汽車等複雜圖形的描繪。

1-2 待顯示圖形的表示

計算機繪圖中所表示的圖形基本上可看作是線、點和正文資料等的集合。線可以用其端點的座標 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 來表示，點用一組三座標 (x_1, y_1, z_1) 表示，而文字資料則由線點的集合來表示。

到目前為止，文字資料的表示是極其複雜的，它往往包括曲線或點陣，然而，由於幾乎所有的繪圖設備內，都裝有硬體或軟體字元產生器，所以，如果使用者不涉及模式識別、繪圖硬體的設計或特殊字元組，則他們可不必關心這些細節。通常用短的折線近似地表示曲線。但有時也用硬體曲線產生器來完成。

1-3 準備要顯示的圖形

圖形歸根究底是由點所組成的，這些點的座標通常在用來顯示圖形之前，貯存於外存儲器（陣列）中，這個外存儲器稱之為資料庫。很複雜的圖形要求有很複雜的資料庫，而這個資料庫的存取又要求一個複雜的程式。這些複雜的資料庫可以包括環形結構、樹形結構等等，而資料庫本身可以包含指示器、子結構和其他非繪圖資料。設計這些資料庫和存取程式是一個正在進行研究的題目，這顯然超出本書的範圍。其實，很多應用計算機繪製的圖包含有頗為簡單的圖形，對於這些圖形，使用者可以不用費力就能想出便於存取的簡單的資料庫結構。

4 電腦繪圖的數學基礎

點是繪圖資料庫的基本結構單元，把點作為繪圖的幾何實體來處理，有三種基本的方法或指令：把射線束、筆、游標、繪圖頭（以後統稱滑標）移到該點；畫一條線到該點；或在該點的位置上標一個點。確定一個點的位置，基本上有二種方法：採用絕對或相對（增量）座標。在相對或增量座標中，一個點的位置由該點對於前一個點的位移來確定。

不論用一個點的絕對座標或相對座標去表示該點的位置，都需要一個數。如果使用有限字長的計算機時，這就會帶來困難，通常用計算機的全字長表示座標的位置。計算機的全字長所能表示的最大整數是 $2^n - 1$ ，其中 n 是字的位元數。由於計算機圖形顯示器常採用 16 bit 的小型計算機，它能表示的最大整數是 32767。在很多應用這個數都是適用的。然而，當需要表示的整數大於計算機所能表示的數時，就會碰到困難。為了克服這個困難，起先，我們可以設想使用相對座標來表示一個數，比如 60000，亦即用絕對座標表示法把滑標置於 (30000, 30000) 的位置，然後用相對座標 (30000, 30000) 把射線束置於最後要求的那個點 (60000, 60000) 的位置上。然而，這是行不通的。因為試圖把相對位置積累起來以便超出所能表示的最大值，結果將產生一個符號相反或數值錯誤的數。對於陰極射線管 (CRT) 顯示器，通常將會產生“倒捲”現象。

擺脫這兩種困境的方法是使用齊次座標。使用齊次座標會增加一些新的複雜性，有時速度差一些，有時解析度差一些，但是，它能夠使用有限字長的計算機來表示大的整數。由於這個理由以及後面還要提到的其他理由，在本書中將廣泛使用齊次 (homogeneous) 座標表示法。

在齊次座標中，一個 n 維空間用 $n + 1$ 維來表示。即表示一個點的位置的三維數據 (x, y, z) 用四個座標 (hx, hy, hz, h) 來表示，其中 h 是一個任意數。

如果 16 位計算機所表示的每一個座標位置都小於 32767，則可使 h 等於 1，這就直接地表示座標的位置。而當某一個歐幾里或普通座標比 32767 大時，例如 $x = 60000$ ，則齊次座標的作用就明顯了，在這種情況下，可令 $h = 1/2$ ，於是點的座標定為 $(30000, 1/2 y, 1/2 z, 1/2)$ 全是 16 位計算機能接受的數。但是，由於 $x = 60000$ 和 $x = 59999$ 兩表

都用同一個齊次座標表示，因而分辨力有損失。事實上即使只有一個座標超過了一個特定計算機所能表示的最大數，則所有座標的分辨力都有損失。

1-4 顯示已準備好的圖形

掌握了有關資料庫的這些解說以後，還必須注意，準備要顯示的圖形所用的資料庫和表示圖形所用的顯示檔案幾乎是全然不相同的。資料庫表示整個圖形，而顯示檔案只表示圖形的某些部分、景像或場面，顯示檔案由資料庫經過變換而產生。在資料庫中的圖形，可以在顯示之前改變大小、旋轉、平移或去掉一部分圖形，或者以一個特定的點去觀察以獲得所需的透視。諸如旋轉、平移、變化和透視等許多操作，都可用包括矩陣乘法在內的簡單線性變換來完成。以後我們將看到，齊次座標對完成這些變換是十分方便的。

在第二、第三章中將要詳述，對於用齊次座標矩陣表示的一點，都能夠用四維方陣完成上述任何一種單獨的變換。當需要進行一系列變換時，可以把每一個單獨的變換依次加給這些點，以獲得預期的結果。但是，如果點的數目很大，這樣做是效率低和費時的。另一種更好的方法是把表示每一種所需變換的單獨矩陣相乘在連結 (concatenation) 4 變換方陣去乘點的矩陣。這種矩陣運算稱為。當在數據點集上進行矩陣連結運算時，它能收到節省大量時間的效果。

雖然在許多繪圖應用中，全部資料庫都要顯示出來，但有時却只需要顯示資料庫的某些部分。這種只顯示全部圖形資料庫的一個部分的過程稱為開“窗口”。“開窗”並不是容易的，特別是當圖形資料庫作了上述變換時更為困難。用軟體執行開“窗口”操作，一般是很浪費時間的，因而不可能進行動態即時交談式繪圖。再者，在高級的繪圖設備中，是用硬體來完成這種功能的。開“窗口”一般有兩種類型，即修邊和剪裁。修邊包括確定圖形中的那些線條或線條的那些部分是位於“窗口”之外的。於是這些線條或線條的一部分便被拋棄，不用顯示出來，也就是它們不通往顯示設備。在剪裁技術中，顯示設備有一個大於所需的

實際畫圖空間。即使在“窗口”外面的那些線條或線段都被畫出，但是只有那些在指定“窗口”之內的線條或線段才是可見的。用硬體完成修邊，通常比剪裁有更多的伏點。例如，修邊可得到一個比剪裁大得多的有效畫圖面積。在剪裁中，那些在“窗口”裡看不見的線條或線段也被畫出。這當然需要時間，因為線條產生器必須花時間畫出資料庫的全部（無論可見或是不可見），而不是像修邊那樣，只畫出資料庫的一部分。

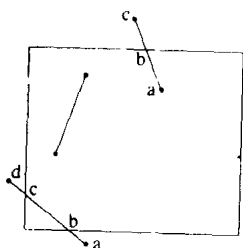
在二維空間中，一個“窗口”是由一個長方形的上、下、左、右四邊的數值確定。如果長方形的邊平行於座標軸，那麼修邊是最容易的。但如果不是這樣，“窗口”的旋轉可將資料庫作反方向旋轉來補償。二維的修邊示於圖 1-1。線條的保留，刪除或部分刪除，取決於它們是全部在“窗口”內還是在“窗口”外，或者是部分在“窗口”內還是在“窗口”外。在三維空間中，一個“窗口”由想像的截頭錐構成，如圖 1-2 所示。在圖 1-2 中，近外邊界面是 N ，遠處邊界面是 F ，而側面是 SL , SR , ST 和 SB 。作為圖形顯示過程的最後一步，必需把圖形資料庫中所用的座標（稱為使用者座標）變換成顯示設備中所用的座標（稱為顯示座標）。特別需要把通過開“窗口”處理的座標數據變換成顯示座標，使圖形出現在顯示器上所指定的區域，即觀察孔之內。如果是二維的，觀察孔由已給定的上、下、左、右邊確定，如果是三維，還要加上近處和遠處邊界面才能確定。在一般的情況下，變換為指定的三維觀察孔內的顯示座標，需要一個以想像的截頭錐（“窗口”）到六面觀察孔之間的線性映射（mapping）變換。

線條部分地在“窗口”內：

$a-b$ 部分顯示出來 $b-c$ 部分不顯示出來

線條全部在“窗口”內：

全部線條顯示出來



線條全部在“窗口”外不顯示出來

線條部分的在“窗口”內： $b-c$ 部分顯示出來 $a-b$ 不顯示出來

圖 1-1 二維的開“窗口”（修邊）