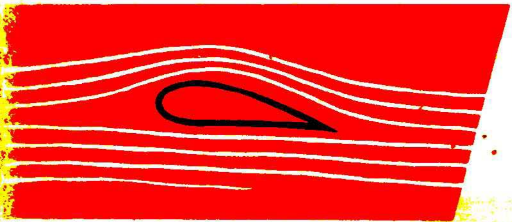

复数的应用

莫　由

上海教育出版社

中学生数学課外讀物

复 数 的 应 用

莫 由

上海教育出版社

一九六六年·上海

内容提要

复数是中学代数課程中数的概念的最后一次扩展．初学复数时，对它的存在往往会感到怀疑，认为它是虚无飄渺的数．事实上，复数的应用非常广泛，它是研究現代科学技术的重要工具之一．

本书先扼要地叙述了复数发展的簡史，再在讀者原有知識的基础上，闡明了复数的几何解釋，复数和向量的关系，复变函数的概念等．然后着重介紹了怎样应用复数来解决某些数学、物理、力学問題，如簡諧振动、物体在流体里的运动、代数方程的求根等．本书可供高中三年級学生閱讀．

中学生数学課外讀物

复 数 的 应 用

莫 由

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版

（上 海 永 福 路 123 号）

上海市书刊出版业营业許可证出 090 号

中华书局上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：2 5/16　字数：48,000

1964年9月第1版　1966年2月第3次印刷

印数：163,001—205,000本

統一书号：7150・1537

定　价：（七）0.18元

編輯說明

数学，在中学里是一門基本工具学科，通过这一学科的教学，必須使中学生掌握数学这个工具，为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础．为了使中学生学好数学，除了必須用最大的努力提高教学质量以外，还需要各方面的配合．我們編輯这套中学生数学課外讀物，目的就在于配合教学，使中学生更好地掌握基础知識，进一步提高基本技能，同时扩大他們的眼界，培养他們对数学的爱好，以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要．

这套讀物的內容主要包括下列两个方面：一、就中学数学課程中的一些問題，介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識，并提供一些必要的习題，以加强基本訓练和提高运用知識解决实际問題的能力；二、就一些与中学数学有关的专題，介紹数学方法，邏輯知識，数学某些分支的概况，数学史方面的知識，等等．

这套讀物的編写还是一种新的尝試．无論在选題、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要，希望教育工作者和讀者对我們提出宝貴的意見，同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物，帮助我們做好这套讀物的編輯工作．

中学生数学課外讀物編审委員会

1964 年 4 月

目　录

前　言

大家知道，在解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（这里 a、b、c 都是实数，并且 $a\neq0$）时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到負数开平方的問題．最簡单的一个例子是在解一元二次方程 $x^2+1=0$ 时，就会遇到要把負数 -1 开平方．为了使負数开平方有意义，也就是要使这类方程有解，我們需要再一次扩大数的范圍．这时引进了一种所謂虛数，用符号 i 当作虛数的单位，并且規定它具有这样的性质：

(1) $i^2=-1$；

(2) 它与实数在一起可以进行通常的四則运算．

根据这个規定，在扩大了的数的范圍里，就会出現形如 $a+bi$（这里 a、b 都是实数）的数，我們把它叫做复数．

但是，复数究竟有什么用处呢？負数的开平方究竟有什么实际意义呢？虛数是不是眞的“虛无飄渺”的呢？在学习复数的时候，誰都会对这些問題感到怀疑．事实上，虛数并不虛，它在解决数学、物理、力学、地图学等等方面的許多問題中，都扮演着重要的角色．在这本小册子里，我們将举出一些簡单的例子来說明复数的一些应用，来回答上面所提出的这些問題．

在沒有具体地談到复数的应用之前，我們将首先簡要地叙述一下复数发展的簡史，让我們来看看，在历史上是怎样解决这些問題的．

一 复数简史

早在 1545 年，意大利米兰城的一位医生卡尔丹，在叙述三次方程解法时首先产生了負数开平方的思想．他把 40 看作为 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积．然而，这只不过是一种純粹形式的表示而已．这样表示，究竟有什么好处，当时誰也說不上．所以在那时，許多人根本不承认負数开平方后还是“数”．十七世紀的法国大数学家笛卡儿也說負数开平方是“不可思議的”，因而把这样的“数”叫做“虛数”．这个名称就一直沿用到現在．在当时虛数还沒有明显的实际意义的情况下，笛卡儿抱这种怀疑态度是完全有理由的．这种情况持續很久，直到十八世紀中叶以前，除了牛頓等个别数学家有时提到虛数以外，关于虛数的理論很少发展．人們一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制．

1747 年法国著名数学家达朗貝尔对复数的研究推进了很大一步．他指出，如果按照多项式的四則运算规則对虛数进行运算，那末它的結果总是 $a+b\sqrt{-1}$ 的形式（a、b 都是实数）．这实际上提出了复数的概念．不过“复数”这个名詞是在十九世紀由德国数学家高斯給出的．

关于复数理論最系統的叙述，是由瑞士数学家欧拉作出的．他在 1777 年系統地建立了复数理論，发現了复指数函数和三角函数間的关系，創立了复变函数論的一些基本定理，并开始把它們用到水力学和地图学上．用符号“i”作为虛数的单位，也是他首創的．此后复数才被人們广泛承认和使

用. 从虚数的出現到正式被人們承认，中間經历了两个多世紀.

在欧拉之后，挪威的一位測量学家外塞尔在前人工作的基础上，正式提出把复数 $a+bi$ 用平面上的点 (a, b) 来表示. 使复数的全体和平面上点的全体建立了一一对应的关系，形成了复平面的概念. 这一复数的几何解釋，更加稳固了复数的立足点.

到了十九世紀，复变函数的理論得到了蓬勃的发展，經过法国数学家哥西、德国数学家黎曼和魏尔斯脫拉斯的巨大努力，已經形成了很系統的理論，并且深刻地滲入了代数学、数論、微分方程等数学分支；同时，它在流体力学、热力学等方面也有了很多的应用.

但是，使复变函数論进一步深入到工程部門中去，还是本世紀初的事。例如，俄国学者儒可夫斯基以复变函数作为基本工具創造了机翼理論，第一次給出了計算机翼升力的公式. 二十世紀以来，复变函数論也被广泛地应用在理論物理、彈性理論、天体力学等方面. 現在，复数和复变函数的理論，已成为科学家和技术人員普遍熟悉的数学工具. 虚数之"虚"，只剩下历史上的意义了。

二　复数和复平面

复数所以能应用于实际，首先就由于它得到了几何的解釋。这里，我們就来談談复数的几何解釋，并且举例說明复数在刻划平面图形方面的应用。

我們知道，平面直角坐标系(通常也把它叫做笛卡儿坐标平面)內的每一个点 M 都可以用一对排定順序的实数 (a, b) 来唯一地表示，这里，a 是点 M 的横坐标，b 是点 M 的纵坐标（图 1）．反过来，每一对排定順序的实数 (a, b) 也都可以用笛卡儿坐标平面內以 a 为横坐标、b 为纵坐标的唯一的点来表示．这就是說，笛卡儿坐标平面內的点与排定順序的“实数对”之間存在着一一对应的关系．

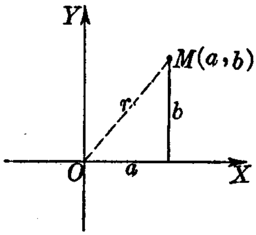

图 1

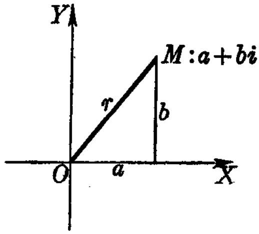

图 2

事实上，复数 $a+bi$ 也就是排定了順序的一对实数 a 与 b，这里，a 是它的实数部分，而 b 是它的虛数部分的系数．因此，如果我們取 a 当做点 M 的横坐标，b 当做点 M 的纵坐标，每一个复数 $a+bi$ 也就都可以用笛卡儿坐标平面內的唯一的点 M 来表示．（图 2）

这样，平面上的点与复数之間也就建立了一一对应的关系．

很明显，用这样的方法来表示与实数 a，也就是 $a+0i$ 所对应的点都在横軸上，而表示与純虛数 bi，也就是 $0+bi(b\neq 0)$ 所对应的点都在纵軸上．

通常我們把这种表示复数的平面叫做**复平面**，它的横軸叫做**实軸**，纵軸叫做**虛軸**．

这里可以看出，笛卡儿坐标平面和复平面是同一种平面的两种不同的解釋．在笛卡儿坐标平面內的每一个点，可以看成是一对排定順序的实数 (a, b)；而在复平面內的每一个点，可以看成是一个复数 $a+bi$．注意到这一点，我們就可以把笛卡儿坐标平面內用坐标法来解决的問題，轉化为复平面內用复数来解决的問題．

例如，在笛卡儿坐标平面內的任何一个点 $M(a, b)$ 与原点 $O(0, 0)$ 的距离 r 可以应用公式

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

来計算，而这里的 $\sqrt{a^2+b^2}$ 就是复数 $a+bi$ 的模数 $|a+bi|$．由此可知，在复平面內表示复数 $a+bi$ 的点 M 与原点 O 的距离就是这个复数的模数；反过来，复数 $a+bi$ 的模数就代表着复平面內表示这个复数的点 M 与原点 O 之間的距离，也就是綫段 OM 的长．

应用这样的解釋，就可以引进一个非常重要的公式．設两个复数 $A=a_1+b_1i$, $B=a_2+b_2i$，我們来考察它們的差 $A-B$ 的模数 $|A-B|$ 的几何意义．

$$\begin{aligned}&|A-B|\\&=|(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)|\\&=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|\\&=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.\end{aligned}$$

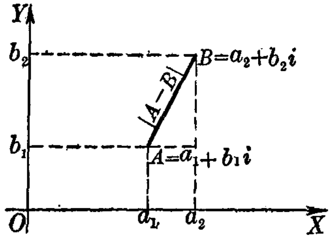

图 3

这里，$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$ 也正是笛卡儿坐标平面內的两点 $A(a_1, b_1)$ 和 $B(a_2, b_2)$ 間的距离公式．由此我們就得到結論：

两个复数 A、B 的差的模数，就是复平面內表示这两个

复数的点之間的距离.

这个事实,我們可以从图 3 里清楚地看出.

我們知道,平面內的图形可以看成是适合某种条件的点的集合,它可以用它上面的点在給定直角坐标系里的坐标 (x, y) 所适合的方程来刻划. 例如,斜率是 k, y 軸上的截距是 b 的直綫就可以用方程

$$y=kx+b$$

来刻划.

既然上面已經建立了平面上的点 (x, y) 与复数 $x+yi$ 之間的一一对应关系,很自然地,我們也就可以把平面內的图形解釋为适合于某个方程的复数的集合,而应用复数这一工具来刻划它.

下面我們将举例来説明两方面的問題:

(1) 怎样用复数所适合的方程来刻划适合某种几何条件的平面图形,也就是,怎样把平面上点所适合的几何条件轉化为复数所适合的代数条件;

(2) 怎样从复数所适合的方程来确定平面图形的特征,也就是,怎样把复数所适合的代数条件轉化为平面上点所适合的几何条件.

現在我們来看下面几种曲綫的例子.

(1) 圓

圓是到某一定点的距离是常量的点的軌迹. 換句話說,圓上的每一个点都具有和某一定点的距离是常量这个特征.

根据这个特征,設 $z=x+yi$ 表示适合条件的点, $A=a+bi$ 表示定点,正实数 r 表示圓的半徑,我們就有

$$|z-A|=r.$$

这个方程就刻划了以 A 为圆心，r 为半徑的圓.（图 4）

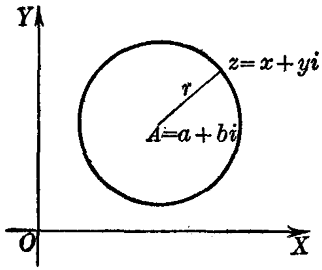

图 4

通过計算，我們可以驗証这个方程与笛卡儿坐标平面內的圓的方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 是一致的. 事实上，因为

$$\begin{aligned}|z-A| &= |(x+yi)-(a+bi)| \\ &= |(x-a)+(y-b)i| \\ &= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.\end{aligned}$$

所以由

$$|z-A|=r,$$

可得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方后就得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

(2) 椭圓

椭圓是与平面上两定点距离的和为常量的点的軌迹. 换句話說，椭圓上的任何一点 M 都具有和两个定点 A、B（椭圓的焦点）之間的距离的和是常量这个特征. 就是：

$$MA+MB=k.$$

这里，k 是一个正常数，它大于表示綫段 AB 的长的数.

根据这个特征，設 $z=x+yi$ 表示适合条件的点 M，$A=a_1+b_1i$、$B=a_2+b_2i$ 表示两个定点，我們就有

$$|z-A|+|z-B|=k. \quad (|A-B|<k)$$

这个方程就刻划了以 A、B 为焦点，动点到焦点的距离的和是 k 的椭圆.（图 5）

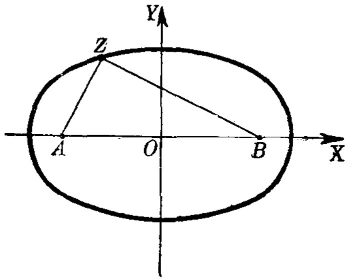

图 5

我們知道，在笛卡儿坐标平面內椭圓的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

当 $a>b$ 的时候，a 表示椭圓的长半軸的长，b 表示椭圓的短半軸的长. 这时，椭圓的两个焦点是 $(c, 0)$ 和 $(-c, 0)$，这里 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，椭圓上任意一点到两个焦点的距离的和是 $2a$.

这个方程很容易改用复数来表示. 例如，对于椭圓

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

来說，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，所以焦点的坐标是 $(\sqrt{5}, 0)$，$(-\sqrt{5}, 0)$，定长 $k=6$. 由此可知，这个椭圓就可以改用方程

$$|z-\sqrt{5}|+|z+\sqrt{5}|=6$$

来刻划.

容易看到，如果椭圓的焦点在 y 軸上，例如，对于椭圓

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

来説，它就可以改用方程

$$|z-\sqrt{5}i|+|z+\sqrt{5}i|=6$$

来表示．(图 6)

(請讀者自己驗証．)

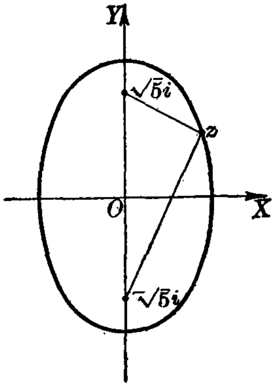

图 6

(3) 双曲綫

双曲綫是与平面上两定点距离的差是常量的点的軌迹．换句話說，双曲綫上的任何一点 M 都具有和两个定点 A、B (双曲綫的焦点) 之間的距离的差是一个常量这个特征．就是：

$$MA-MB=\pm k.$$

这里，k 是一个正常数，它小于表示綫段 AB 的长的数．

根据这个特征，設 $z=x+yi$ 表示适合条件的点 M，$A=a_1+b_1i$，$B=a_2+b_2i$ 表示两个定点，我們就有

$$|z-A|-|z-B|=\pm k.\quad (|A-B|>k)$$

这个方程就刻划了以 A、B 为焦点，动点到焦点的距离的差是 k 的双曲綫．

我們知道，在笛卡儿坐标平面内的双曲綫的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这里，a 表示双曲綫的实半軸的长，b 表示双曲綫的虚半軸的长．这双曲綫的两个焦点是 $(c, 0)$ 和 $(-c, 0)$，这里 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，双曲綫上任意一点到两个焦点距离的差的絕对值是 $2a$.

这个方程也容易改用复数来表示. 例如,对于双曲綫

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$$

来說， $a=\sqrt{6}$， $b=3$， $c=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$，所以焦点是 $(\sqrt{15}, 0)$，$(-\sqrt{15}, 0)$，定长 $k=2\sqrt{6}$ (图 7). 由此可知，这双曲綫就可以改用方程

$$|z-\sqrt{15}|-|z+\sqrt{15}|=\pm 2\sqrt{6}$$

来刻划.

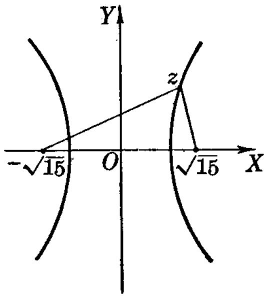

图 7

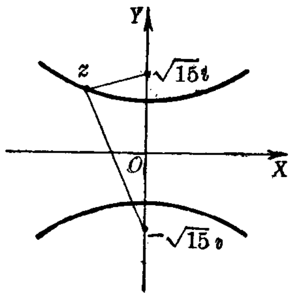

图 8

容易看到,如果双曲綫的焦点在纵軸上,例如,双曲綫

$$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$$

它就可以改用方程

$$|z-\sqrt{15}\,i|-|z+\sqrt{15}\,i|=\pm 2\sqrt{6}$$

来刻划. (图 8)

(請讀者自己驗証.)

上面所举的这些例子，都是用关于复数 z 的方程来表示平面內的曲綫. 类似地，我們还可以应用关于复数 z 的不等

式来表示平面内的区域.

所謂平面內的区域就是指平面內由某些曲綫(特殊的,也可以是直綫)所限制的部分,它可以看成是适合某种几何条件的点的集合. 例如,在笛卡儿坐标平面内以原点为中心, r 为半徑的圓的內部是平面內的一种开区域, 它可以看成是与原点的距离小于 r 的点的集合. 根据这个特征, 这个开区域就可以用不等式

$$x^2+y^2<r^2$$

来表示,这里 (x, y) 表示适合条件的点的坐标. 很明显的,如果我們改用复数 $z=x+yi$ 来表示适合条件的点, 那末这个开区域也就可以用关于复数 z 的不等式

$$|z-0|<r,$$

就是

$$|z|<r$$

来表示. (图 9)

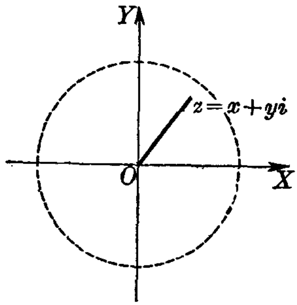

图 9

类似的, 对于上面所說的这个圓的外部的点都适合条件"与原点的距离大于 r", 因此可以应用不等式

$$x^2+y^2>r^2$$

或者

$$|z|>r$$

来表示.

如果把上面所說的圓的內部和圓合并在一起, 就組成了平面內的一个閉区域. 这个閉区域就可以用不等式

$$x^2+y^2 \leqq r^2$$

或者

$$|z| \leqq r$$

来表示.

应用关于复数 z 的不等式来表示平面区域，有时是很方便的. 現在我們来看几个平面区域的例子.

(1) 复平面的上半平面(不包括实軸在內)

很明显的,在这个开区域里的任何一个点 $z=x+yi$ 的虛数部分的系数总是大于零. 根据这个特征，我們就可以用不等式

$$I_z>0$$

来表示复平面的上半平面(图10). 这里，符号 I_z 表示复数 $z=x+yi$ 的虛数部分的系数.

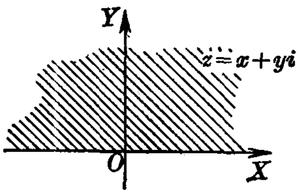

图 10

事实上，这个不等式也就是

$$y>0.$$

(2) 复平面的左半平面(不包括虛軸在內)

很明显，在这个开区域里的每一个点 $z=x+yi$ 的实数部分都小于零. 根据这个特征,我們就可以用不等式

$$R_z<0$$

来表示复平面的左半平面(图 11). 这里,符号 R_z 表示复数 z 的实数部分.

事实上,这个不等式也就是

$$x<0.$$