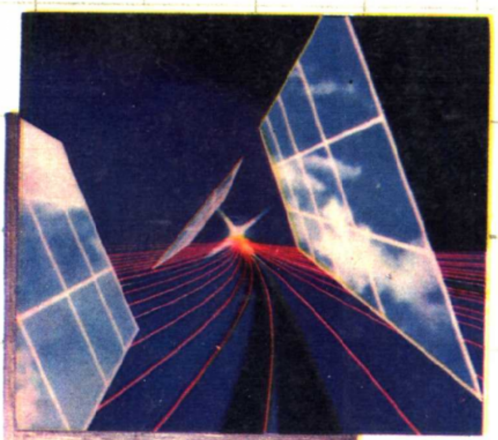
數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

# REDUCTION AND INDUCTION ANALOGY ASSOCIATION

# 化歸與歸納·類比·聯想

史久一　朱梧檟　著



数学方法论丛书

# 化归与归纳类比联想

史久一　　朱梧槚　编著

江 苏 教 育 出 版 社
1988·南京

数学方法论丛书
化归与归纳类比联想
史久一　朱梧槚
出版发行：江苏教育出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：淮阴新华印刷厂
开本 850×1168 毫米 1/28 印张 6.375 字数 138,300
1989 年 5 月第 1 版　1989 年 5 月第 1 次印刷
印数 1-3,600 册
ISBN 7-5343-0655-8
G・578　　定价：2.40 元(贴塑)

# 出版说明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富.16世纪以来，如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解.就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polyá)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段。特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物。这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学主以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍。因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初开始酝酿和筹备出版《数学方法论》丛书（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月．我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下．一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，本《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

本《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，本《丛书》中的大部分题材对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在本《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错．热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

# 引 言

所谓“化归”，从字面上看，应可理解为转化和归结的意思。数学方法论中所论及的“化归方法”，是指数学家们把待解决或未解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经能解决或者比较容易解决的问题中去，最终求获原问题之解答的一种手段和方法．匈牙利著名数学家路莎·彼得（Rozsa Peter）在她的名著《无穷的玩艺》一书中曾对“化归方法”作过生动而风趣的描述：“如上所述的推理过程，对于数学家的思维过程来说是很典型的，他们往往不对问题进行正面的攻击，而是不断地将它变形，直至把它转化为已经能够解决的问题．当然，从陈旧的实用观点来看，以下的一个比拟也许是十分可笑的，但这一比拟在数学家中却是广为流传的：‘现有煤气灶、水龙头、水壶和火柴摆在您面前，当您要烧水时，您应当怎样去做呢？’‘往水壶里注满水，点燃煤气，然后把水壶放在煤气灶上．’‘您对问题的回答是正确的，现把所说的问题稍作修改，即假设水壶中已经盛满了水，而所说问题中的其它情况都不变，试问，此时您应当怎样去做？’此时被问者一定会大声而颇有把握地回答说：‘点燃煤气，再把水壶放上去．’他确信这样的回答是正确的．但是更完善的回答应该是这样：‘只有物理学家才会按照刚才所说的办法去做，而数学家们却会回答：只须把水壶中的水倒掉，问题就化归为前面所说的问题了．’”（路莎·彼得著，朱梧槚等译，无穷的玩艺，第84页至第85页，南京大学出版社，1985年）稍作考虑便可看出，在路莎·彼得之如上的一番议论中包含着这样一层意思，即化归方法乃是数学家们所常用的一种方法，也是数学方法论中的基本方法或典型方法之一，从而是人们寻找真理、发

现真理和处理问题的一种重要手段.

让我们通过以下四个简单的例子去进一步阐明化归方法的具体含义.

例 1 在设定我们已经会求矩形面积的前提下，去求解：

(1) 平行四边形面积；

(2) 三角形面积；

(3) 多边形面积.

解 (1) 由于我们已经会求矩形面积，因而我们会很自然地想到用割补法把平行四边形化为与之等积的矩形.

(2) 可用拼接法，把两个三角形拼成一个平行四边形，从而把问题转化为(1)的情形.

(3) 可用分割法将多边形分割成若干个三角形，这样就把问题转化为(2)的情形了.

例 1 中 3 个小题的求解过程有一个共同的特点，那就是它们都不是利用面积的最基本的概念(含单位正方形的个数)去求其面积，而都是将未解决的问题转化归结为一个已经能解决的问题，从而求获原问题之解答. 这正是化归方法的重要特色.

例 2 求证 $f(n)=n^3+6n^2+11n+12$ $(n\in N)$能被6整除.

现把原式适当地变形：

$f(n)=n^3+6n^2+11n+12=(n+1)(n+2)(n+3)+6.$

上式表明，$f(n)$是三个连续自然数之积与 6 之和. 因而问题转化为往证：

①三个连续自然数之积总能被 6 整除.

如果我们对①的证明方法已经掌握，那么原问题便可由此而获证. 但若我们对①的证法仍属未知，那么因为$6=2\times 3$，而 2 与 3 又互质，因而①又可被转化为往证：

② 三个连续自然数之积，既被2整除，又能被3整除。

由于对②的处理方法为大家所熟知，因此原问题可由此而获解。

例3　在边长为2的正方形内，任意放置5个点，求证其中必存在两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{2}$。

注意$\sqrt{2}$这个数值，它使我们联想到单位正方形对角线的长。如所知，在单位正方形内，任意两点间的距离都不大于对角线的长，从而小于或等于$\sqrt{2}$。因此原问题便转化为在所设条件下往证“至少有两个点落在同一个单位正方形之中”。如图1所示，我们把边长为2的正方形划分为四个单位正方形，那么问题便可进一步转化为“证明在四个单位正方形内任意放置5个点，至少有两个点在同一正方形内”。由于这个问题与大家在生活中早就体验过的下述问题完全一样，即“在四个抽屉内放五个苹果，至少有一个抽屉内要放进两个苹果”。因而原问题也就获证。

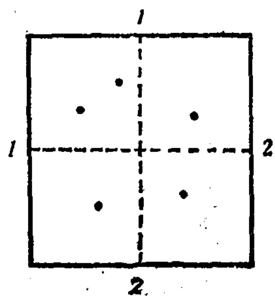


图 1

例4　已知$A$，$B$，$C$是$\triangle ABC$的三内角，求$y=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$的最大值。

注意到函数式中的$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，它容易使我们联想到正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（$R$是三角形外接圆半径）。

考虑到$y$值的大小与三角形外接圆半径的大小无关，因此不妨假定$R=1$，于是根据正弦定理便可将原函数式变形为

$$y=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\sin A\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A,$$

其中$\frac{1}{2}bc\sin A$是我们所熟悉的三角形面积公式。于是原问题就转化为求单位圆内接三角形面积之最大值。这是一个为我们所熟悉并能求解的问题，从而原问题也就由此而得解。事实上，由于圆内接三角形中以正三角形面积最大，因而当$A=\frac{\pi}{3}$，$b=c=\sqrt{3}$时$\frac{1}{2}bc\sin A$取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$。故所求$y$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{8}$。

以上四例之形式虽各不相同，求解或证明的具体过程也各各相异，但其思考方式却有一个共同的特点，即都是通过转化，或再转化，将待解决的问题归结为一个已经能解决的问题，或者归结为一个较易解决的问题，甚至为人们所熟知的常识问题。这种求解问题的手段与过程可图示如下：

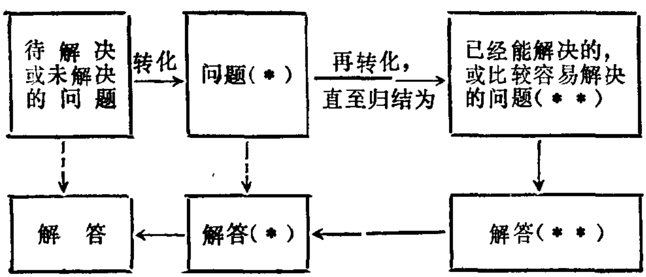



图 2

图 2 也可视为化归方法的一般模式。

化归方法之所以成为数学方法论的基本方法之一，是有其理论上的客观背景的。

如所知，数学是一门演绎推理的学科，于是在同一个数学分支内部（或建立在同一个理论基础上的几个数学分支内部），就产生了如下的事实：任何一个正确的结论，都可按照需要与可能成为推断其它结论的依据（如例 1）。这表明在任何一个数学系统的展开中，都有形或无形地存在着如下的结论链：

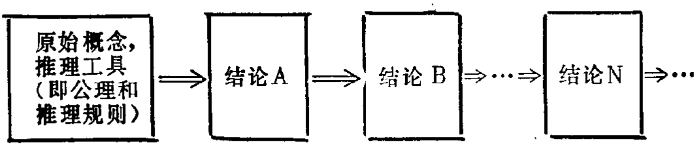



图 3

所谓有形和无形是指有许多数学分支是已经公理化或形式公理化了的，如欧几里得几何等。但事实上，现有许多数学分支都采取素朴的陈述形式，如康托（G.Cantor）的古典集合论等。但若对这些素朴陈述的数学理论稍作分析整理，就不难看出，仍然有它们的不定义概念和无条件承认的一些思想规则，这就是无形地存在着的相当于形式公理体系中之推理工具（公理和推理规则）或原始概念的东西。另外还要注意两点：第一点，图 3 的表达形式是不全面的，事实上，一个数学系统的“结论集”往往是树枝形的偏序集，而并非直线型的全序集；第二点，图中之“⇒”往往还是可逆的。当然更多的情况是不可逆的。

由于结论链的存在，势必大大加快演绎推理的步伐。因为我们由此而大可不必事事都去“请示”原始概念与推理工具。只须把待解决问题转化为结论链中的某一环节就可以了。这就是化归方法在理论上的客观背景和化归方法之所以

能成为数学方法论的典型方法之一的根本原因。

然而，通过以上四例，我们还可看到，所谓"通过转化的手段把待解决问题归结为已经能解决或比较容易解决的问题"，只是在原则上教给我们一种解决数学问题的基本手段，至于对每一个具体问题如何去具体实现这种转化过程，以及能否依靠或单独依靠化归方法解决问题，这既要在总体上去作多方面的探索，还要加上具体实现化归过程时的种种数学技巧。譬如在例 2 中，我们是怎样想到将 $f(n)$ 化成 $(n+1)(n+2)(n+3)+6$ 的形式的？在例 3 中又是怎样想到把原正方形分割为四个单位正方形的？这些都说明，我们即使在总体上已经决策，将解决问题的方案纳入化归方法的模式，仍然面临着如何寻找正确的化归途径和怎样选择恰当的转化手段等等技巧问题，而这也正是本书所要着重讨论和研究的一个问题。

我们将从特殊与一般，分解与组合，关系映射反演原则和归纳、类比、联想及其在化归中的作用等四个方面去讨论上述问题，这也是本书正文四章的具体内容。但要说明的是，首先本书所涉及的数学知识都被限制在中学数学的教学范围之内，其次，由于本书是从数学方法论的角度来研讨有关数学题材的，它既非题解，也非复习资料，因此我们的兴趣主要在于如何去探索和发现解题的方法。尽管本书中会较多地给出某些具体的证明方法，但这也不是单纯为了让读者获知一个具体的解题过程，而仍然是为了具体阐明某种处理问题的思想背景和思想方法。

# 目录

# 一、特殊与一般

如所知，“从特殊到一般”与“由一般到特殊”乃是人类认识客观世界的一个普遍规律，而在人类探索世界奥秘的奋斗中诞生和发展起来的任何一门学科，都将受到这一规律的制约．数学当然也不例外，同样要被纳入这一规律的模式之中．因而我们首先将从认识论的角度去探索化归方法的哲理所在，以便能在更高层次上去对这一方法进行分析和总结．

我们注意到，人类认识世界的普遍规律至少在如下两个方面制约着化归方法的运用．

一方面，由于事物的特殊性中包含着普遍性，即所谓共性存在于个性之中，而相对于“一般”而言，特殊的事物往往显得简单、直观和具体，并为人们所熟知，因而当我们处理问题时，若能注意到问题的普遍性存在于特殊性之中，进而去分析考虑有没有可能把待解决的问题化归为某个特殊问题的思考方式，不仅是可行的，而且是必要的．

另一方面，由于“一般”概括了“特殊”，“普遍”比“特殊”更能反映事物的本质，因而当我们处理问题时，若能置待解决问题于更为普遍的情形之中，进而通过对一般情形的研究而去处理特殊情形的思考方式，同样也是可行的和必要的．

须知，上面所说的两个方面乃是同一事物之相反相成的两个方面．如从化归方法的总体角度来看，这两个方面是缺一不可的．而从各个具体问题的角度考虑，则每个方面又有其独特的作用．它们互相制约、互相补充，使我们在处理问题时既不失之偏颇，又不致无所适从．例如，当我们求解一

元二次方程$x^2+4x+3=0$的根时，一方面可以从研究系数特征（特殊因素）入手，用因式分解法去解这个方程。另一方面，也可把它置于更为一般的形式$ax^2+bx+c=0$中去考虑，亦即运用求根公式求解。正由于这两个方面的相互补充，才使得求解方程的方法更为完善。

## 1.1 特殊与一般的关系

在本节中，我们不去全面论述特殊与一般的关系，只想略论这个关系在判断命题真假中的作用。因为命题的真假对于化归来说，乃是一个起码而又十分重要的问题。

就命题的真假而言，特殊与一般之间存在着如下的关系：

若命题$P$在一般条件下为真，则在特殊条件下$P$也真。我们把这种关系叫做关系$A$。

为方便计，我们把关系$A$的逆否命题陈述如下，并称之为关系$B$：

若命题$P$在特殊条件下为假，则在一般条件下$P$亦假。

关系$A$和$B$，对于化归而言都有着不可低估的作用。

例如，凭借关系$B$，我们就可利用“特殊”而否定“一般”，从而实现化归。

其中饶有趣味的一例便是费马素数猜想被否定一事。

费马(P·Fermat）是法国的一个律师，他直到年近30岁时才对数学发生兴趣，经常利用公务之余自学研究，并卓有成效。他发现了解析几何原理，并最早用极限思想确定曲线的位置，因而堪称微积分学的先驱者。他还与帕斯卡(Pascal)一起奠定了古典概率的基础。他对数论的发展颇有贡献。1640年他对形如$2^{2^n}+1$之数进行计算时，发现当$n=0,1,2,3$时都是素数。于是他进一步验证了$n=4$的情形，结果发现，

$2^{2^4}+1=65537$ 仍然是一个素数．因此他就大胆地猜想：所有 $F_n=2^{2^n}+1$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 都是素数．

既是"猜想"，那就存在两种可能：要么真，要么伪．对此费马自己不能作出判断，于是公之于世，希望能有人帮助他证明这个猜想．

然而，证明其真并未易事，若干年过去了，未能有人取得实质性的进展．那么能否判断其伪呢？根据关系 $B$，只须找出一个反例．但这也并非轻而易举的事。直到1732年，善于计算的欧拉(L·Euler)发现 $F_5=2^{2^5}+1=641\times6700417$．反例找到了，从而费马猜想被否定．

应当指出，关系 $B$ 的否定作用并不是消极的，恰恰相反，它的功能正在于去伪存真，因而是具有积极意义的。特别当一个猜想长期不能获证时，人们就会利用关系 $B$ 去寻找反例，但若多次试图否定而否定不了时，则又会激励人们去探索新的证明途径，从而推动了数学的发展．哥德巴赫(Goldbach)猜想便是一例．我们将在后面详细介绍它的历史和现状．

关系 $B$ 的去伪存真作用还可帮助我们在求解"选择题"时迅速地找到正确答案．

如所知，目前国内外流行的数学试题中，对于选择题有一个不成文的"规矩"，即在所给几个答案中有且只有一个正确的答案，根据这个"规矩"，设法找出和排除所有的错误答案，乃是可行的方案之一，因为剩下的一个便是正确的了．这个方案初看似乎没有直接找出正确答案好，因为它需要把题中所给答案一一处理，然而如果考虑到特殊情况，则往往会发现较易处理的因素，这就不难理解此种方案的优越之处了．我们不妨把这种处理方法称为"排除法"．

**例1.1.1** 当 $x\in[-1,0]$ 时，在下面关系式中正确的

是……………………………………………………………………（　　）

（$A$）$\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

（$B$）$\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$；

（$C$）$\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

（$D$）$\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

**解**　我们取特殊值$x=-1$，很快发现($A$)、($D$)两个结论不正确，既然这两个结论在特殊条件下为假，那么可以肯定，在一般条件下也为假．还剩下两个结论，哪一个是正确的呢？再取其它特殊值判断，如取$x=0$时我们又发现($B$)中等式不成立．那么剩下的($C$)就是正确的了．必须注意，我们选($C$)作为正确答案并不是因为当$x$为$-1$或0时($C$)都正确，而是利用了上面所说的"规矩"，即四个答案有且只有一个正确．

关系$B$的否定作用还可在反证法中体现出来．

我们知道，用反证法证明"若$A$则$B$"就是往证"既$A$且非$B$"为假．具体做法是从$A$与$\overline{B}$出发导出矛盾．这个矛盾常表现为某种"否定"，如矛盾于假设条件、矛盾于公理、矛盾于已证定理等等，实即表现为否定假设条件、否定公理、否定已证定理等．这些否定当然都是不能成立的，因而从反面肯定了原论题之结论．

**例1.1.2**　试证明$\sin\sqrt{x}$不是周期函数．

**证**　反设$\sin\sqrt{x}$是周期函数，则若$f(x)=\sin\sqrt{x}$有零点（特殊值），那么该零点必然也周期地出现．现$f(x)=\sin\sqrt{x}$确实有零点$x=k^2\pi^2(k\in Z)$，然而，它并不周期地出现，因为随着$|k|$的增大，$k^2$的分布越来越稀，这就导致了矛盾．

**例1.1.3**　证明若$a\leqslant b+\varepsilon$对于任何$\varepsilon>0$恒成立，则$a\leqslant b$．

我们用反证法证明这个命题，就是证明"若$a>b$，则存在$\varepsilon>0$能使$a>b+\varepsilon$成立"，显然，只须取一个特殊的$\varepsilon>0$使

$a>b+\varepsilon$成立就可以了．例如取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}>0$，就有$b+\varepsilon=b+\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}<a$．因而原命题得证．

**例1.1.4** 证明质数的个数无限多．

今反设只有$n$（有限数）个质数：

$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$．

若能在这$n$个质数之外又找出一个新的质数（即寻找一个特例），这就否定了"只有$n$个质数"的假设．

考虑数$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\cdots\cdot P_n+1$．

如果$P$是质数，那么$P$显然不在$P_1,P_2,\cdots,P_n$之中，因为它比其中任何一个都大，此时问题已经获证．

如果$P$是合数，则$P$必有一个质因数，设为$r$，这个$r$也一定不在$P_1,P_2,\cdots,P_n$之中．因为若设$r=P_i$（$i=1,2,3,\cdots,n$），则$\dfrac{P}{r}=\dfrac{P}{P_i}$必有余数1，这样$r$就不是$P$的因子了。

从而不论何种情况，在所设的$P_1,P_2,\cdots,P_n$之外还存在着新的质数．所以质数有无限个．

再论关系$A$在化归方法中的作用．这种作用可简单地概括为"确定"二字，即所谓由"一般"正确确定"特殊"正确．

任何公式、定理、法则的应用都是关系$A$的具体运用．不过，我们的兴趣却在关系$A$的逻辑结构的另一层意思上：即若我们确认某个命题的唯一结论在一般条件下成立，那么在特殊条件下这个结论必也成立，并且进一步得知这个特殊条件下的结论就是一般条件下的这个唯一结论．这对寻找化归途径十分有用．不过应注意"确认"和"唯一"这个前提．

**例1.1.5** 证明等腰三角形底边上任意一点到两腰距离之和是一个定值．