GUOJIXIANGQI YUSHUXUE

国际象棋与数学

人民體育出版社

国际象棋与数学

〔苏〕叶·雅·基克 著
金铁男 译 宋亿太 校

人民体育出版社

责任编辑　徐家亮

国际象棋与数学

〔苏〕叶·雅·基克　著

金铁男　译　宋亿太　校

人民体育出版社出版

妙峰山印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米　32开本　$6\frac{16}{32}$印张　130千字

1989年1月第1版　1989年1月第1次印刷

印数：1—2,200册

统一书号：7015·2578　　定价：2.50元

ISBN　7-5009-0160-7/G·149

序　言

数学和国际象棋有许多地方相通。杰出的数学家格·哈尔基把人类活动的这两种形式进行过比较。在他所写的《数学家的自白》一文中指出，拆解国际象棋的棋题正象是解数学题一样，而下国际象棋就仿佛是在进行数学运算。

数学和国际象棋的思维形式十分近似，因此，有数学天分的人往往也具有下国际象棋的才能，这并不是偶然的。当然，并不是所有数学力学系的学生都会很认真地去研究国际象棋的各种布局变例，因为同时研究数学和国际象棋，一般说来是十分复杂的，但是，在数学力学系的学生中，也的确很难找出一个不会下国际象棋的人。

在精密科学领域内的著名学者和专家中，有不少是国际象棋的高手，例如，数学家阿·阿·马尔科夫院士，机械专家阿·尤·伊斯林斯基院士，物理学家、诺贝尔奖金获得者波·拉·卡比察院士等。

同时，很多国际象棋特级大师都受过数学或与数学相近似的学科的教育。甚至在国际象棋世界冠军中也有数学爱好者。第一位国际象棋之王斯泰尼茨就对数学感兴趣。他的后继者拉斯克博士是个职业数学家。第五位国际象棋世界冠军尤伟博士在荷兰曾领导一个计算中心。苏联第一个获得国际象棋世界冠军的鲍特温尼克是一位技术科学博士，也是电机工程的专家，后来他把全部精力投入国际象棋的算法研究，

其实他改行搞的是应用数学。国际象棋世界冠军塔尔在青年时代具有卓越的数学才能。当今国际象棋世界冠军卡尔波夫在数学中学毕业时曾获得金质奖章，他还在奥林匹克数学竞赛中多次获得优胜。中学毕业后，他考入国立莫斯科大学数学力学系，但后来他为了专门研究国际象棋而放弃了数学。

把数学和国际象棋这两个人类活动的领域进行对比，是十分有趣的，也是很值得专门研究的。可是，这个课题有点偏离本书的内容了。

国际象棋的棋盘、棋子和它的走法，常常用来图示各种不同的数学概念和解题。在有关控制论、博弈论、计算数学、战役研究、图论、数论和组合分析的书籍中，可以见到国际象棋的例证和术语。国际象棋对发展电子计算机程序设计的现代方法，具有很重要的地位。

数学和国际象棋还有一个共同点，即它们都有一种通俗的引人入胜的数学形式，棋盘上的数学游戏、解题和智力测验均属这种数学形式。我们把这种数学叫做国际象棋数学。几乎在每一本奥林匹克数学习题集或智力游戏和趣味数学的书中，都可找到与国际象棋棋盘和棋子有关的精彩的难题。其中很多题都包含有趣的历史故事，因而引起一些著名学者的注意。例如瑞士伟大的数学家奥伊勒解过关于马的行进路线的棋题，德国伟大的数学家卡尔·高斯解过八个后的棋题（本书对这两个棋题都将进行讨论）。

值得注意的是，奥伊勒醉心于国际象棋是在十八世纪，而高斯是在十九世纪中叶。尔后，在整整一百年的过程中，数学权威们都不曾研究过国际象棋（这里指的是国际象棋

走法的科学性）。由于控制论和计算技术突飞猛进地发展，在本世纪中叶，情况发生了急骤的变化。国际象棋便成为运用数学来解析电子计算机程序设计现代方法的一种最方便的模式。杰出的学者，如维涅尔、秋林格和申农等经常在自己的著作中涉及国际象棋。

本书将以较多的篇幅来讲述国际象棋数学（前十章）。将详细讨论国际象棋盘上各种类型的数学题和智力游戏，例如每个棋子的威力及其行经路线，棋子的排列和移动，棋盘的分割和覆盖。将介绍各种不同的国际象棋数学排局，讲述国际象棋棋盘的特殊几何性质。

接下去的两章，将介绍国际象棋有趣的、特殊的数学游戏，讲述在特殊的棋盘上运用特殊的棋子并采用特殊规则的走法。在第十三和十四两章，将运用数学对两个国际象棋问题作出解答，这两个问题是如何编制比赛程序表和计算棋手的等级分（代表他们的实力）。最后一章讲电子计算机应用到国际象棋上的成就：电子计算机进行实际下棋和分析残局。

作者写本书花了十多年时间，从1971年开始，那时在《量子》杂志上初次刊登作者写的《国际象棋数学笔记》。出版《国际象棋和数学》一书有两个过渡阶段：在1976年出版了我的《国际象棋棋盘上的数学》，在1981年出版了《国际象棋万花筒》（同卡尔波夫合著）。这两本书出版后，收到许多读者来信，对书中的好些问题提供了更加准确和完善的解答，有些读者还提供了他们自己的国际象棋数学游戏、问题和智力游戏。其中某些读者的建议，已收进本书。这里

举一个例子，申克曼提出的马移动排列的第三条路线（见第九章）是用一百零七步完成。读者提出了更简捷的方法，只用四十五步就可解决。当然，在写本书时也吸收了近年来一些刊物上发表的有关国际象棋数学这个题目的材料，其中包括《量子》杂志。

在这本小书中，要描绘出国际象棋数学的全貌来是不可能的。如果仅就本书所列出的问题给以详尽的解答，那么本书的篇幅就得增加几倍。这就是本书对很多问题只给以简单的求解方法、提示或答案的原因。当某些问题不要求大量的推论和计算，并且作者认为不失去风趣时，本书将尽可能给以全面的解答。

国际象棋数学这方面的材料浩瀚无涯。很多国际象棋的书籍、上述的数学分支的专题著作、趣味数学书籍、科普文章和重要数学杂志上的论述，都可以列入这方面的书目。因为这不是论文答辩，所以没有必要摘引文献。

目　录

第一章　棋盘数学

谈到国际象棋棋盘的数学问题和智力游戏，自然离不开棋子。但是，棋盘本身也可提供相当多有趣的数学问题。因此，在我们谈论国际象棋数学问题时，暂时撇开棋子，先从棋盘开始。

首先让我们讲一个与发明国际象棋有关的古老的传说，其中谈到在棋盘上进行算术的故事。

当印度国王第一次知道国际象棋时，他十分赞赏这个变化无穷、具有许多绝妙着法的独特游戏。国王听说它的发明者是他的一个臣民，便召见了他，要亲自给予奖励，以表彰他天才的发明。国王答应满足这位发明者提出的任何要求。当这位发明者要求奖给他麦粒时，国王对这样轻微的要求感到十分吃惊。他的要求是，在国际象棋棋盘上第一个格放一颗麦粒，第二个格放两颗麦粒，以后每一格放的麦粒颗数是前一格的两倍。国王命令尽快满足这位国际象棋发明者微不足道的要求。可是第二天宫廷数学家报告国王说，无法满足这位发明者提出的这个奥妙的要求。因为，不仅全国仓库所存的麦子不够，而且全世界粮仓所存的麦子也满足不了。那位发明者所要求的麦粒数是：

$$1+2+2^2+\cdots+2^{63}=2^{64}-1。$$

这是一个二十位数，它大得无法想象。计算结果表明，存放这些麦粒所需的仓库，以底面积80平方米来计算，就得从

地球延伸到太阳。当然，这里所讲的与数学的关系多少是一种假设而已，可是这个故事出人意外的结果，显然说明在国际象棋中包含有丰富的数学内容。

既然谈到了国际象棋的起源，那么提出一个运用棋盘某些数学性质的假设就很适当了。这个假设是，国际象棋源出自所谓幻方。

n阶幻方乃是$n \times n$的平方表，它包含从1到n^2的整数，并具有以下特性：横排数字、纵行数字以及两对角线数字之和都相同。8阶幻方各项的和均为260（图1）。神奇的幻方数字排列顺序的规律富有玄妙的艺术力。故而，杰出的德国艺术家裘列尔竟然受到这些数学内容的诱惑，以至于在他的著名版画《忧郁》中描绘了神奇的幻方。

让我们看一个古老的称为阿尔穆德纵南的布局。它是按现代象棋的排列阵式，由白黑两方对称走成的：

1.d3　d6　2.e3　e6　3.b3　b6
4.g3　g6　5.c3　c6　6.f3　f6
7.c4　c5　8.f4　f5　9.马c3
马c6　10.f3　马f6　11.车b1
车b8　12.车g1　车g8(图1)。

计算一下双方头两步棋走动的八个格——d2、d3、e2、e3、d6、d7、e6、e7——的数字总和，我们意想不到地得到了奇异的数字260。以下每走两步也得到同样的结果。类似的例子（它们的数字可以加大）使我们得出关于幻方与国际象棋相关的假设。而这种相关的所有痕迹至今已消失殆尽，可以用以下的原因来解释：很久以前，在迷信和神秘主义统

治的时代，古印度人和阿拉伯人认为幻方这些数字的结合具有神秘的性质，所以把那些正方形仔细地隐藏了起来。因而编造了一个聪明人发明国际象棋的传说。

在国际象棋的数学问题和智力游戏中，最普通的是棋盘的切割问题。最初的一个问题也带有传说。

相传东方有一位君主是国际象棋高手，他一生只输过四盘棋。为了对战胜他的四位棋手表示敬意，他指示在他的棋盘上镶四颗钻石，每一颗都镶在他的王被将死的格子上（见图2，这里用马来代替钻石）。

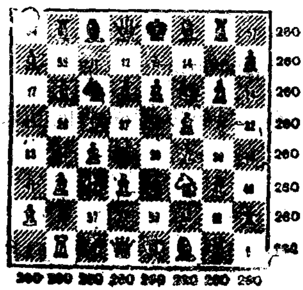


图 1　阿尔穆德然南布局神奇的正方形

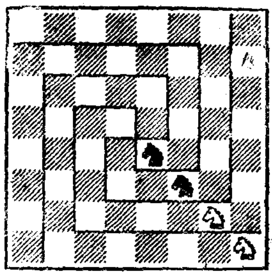


图 2　四颗钻石的传说

这位君主死后，他的儿子是个暴君，并且棋艺低下，他决定对那四位战胜过他父亲的棋手进行报复。他命令这四位棋手把镶有钻石的棋盘划分成形状一样的四块，并且每块上都要有一颗钻石。虽然这四位棋手完成了这位新君主的要求，可是他们还是被处死了，因为传说中提到，每位棋手可以使用棋盘上的一粒钻石。

关于分割棋盘的这种习题，经常可以在有趣的文献中见到。

△把棋盘分割成完全一样的四块（重合时相同），使每一块上都有一个马。必须按棋盘的纵向和横向来分割。

图2所示的便是这个习题的一种解法。把四个马放在棋盘不同的格上，那么我们会得出许多分割的题解。其意义不仅在于找到一种必须的分割办法，而且要计算出把棋盘分割成四块，每块都含有一个马的所有分割法的数目。这种习题最多有八百种解法，包括把马放在棋盘的角上。

下面一个分割题通常同杰出的国际象棋专家、智力游戏大师劳埃德的名字相联系。

△把国际象棋棋盘分割成形状或格的颜色均不相同的几部分，所有的小块都不允许翻转过来，但可以转动，请问最多能分割成几块？

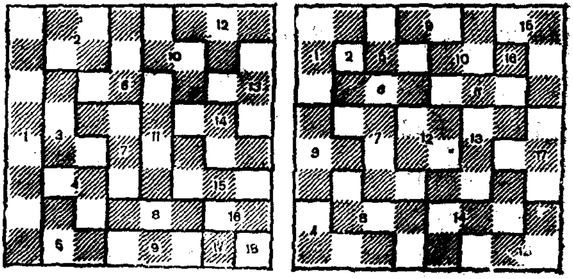
最多能分割成十八块。图3提供了两种分割法。图3a的分割法是劳埃德提出的，其特点是其中有一块含有八个格（数目最大了）。图3b的分割法表面上看起来是对称的，但没有一块超过五格。图3a中第17和第18以及第8和第9块，虽然形状一样，但方格颜色不同。其他一些小块例如3、6也不相同（不能把它们翻转过来）。

我们看图4a，提出的题目有三个，一是数学的（分割棋盘），两个是纯国际象棋的：

1)把棋盘分割成完全一样的四部分（重合时吻合）；

2)白方先走，将死黑王最简练的着法；

3)黑方先走，白方如何用最简练的着法将死黑王（合作走

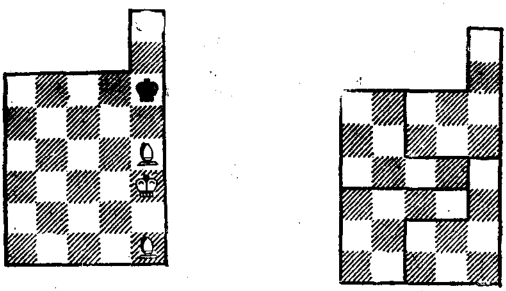


a　　b

图 3　分割棋盘的习题

法)。

解：1)图4b所示的便是必然的分割法；2)白方先走，十



b　　b

图 4　特殊棋盘上三个习题

二步将死黑王：1.象b4　王e5　2.王d3　王e6　3.王c4　王e5　4.象c2　王e6　5.象b3+　王e5　6.王c3　王e4　7.象d6　王e3　8.象d5　王e2　9.王c2　王e1(e3)　10.象c5(+)　王e2　11.象c4+王e1　12.象b4将死(黑王所走的全为迫着)；3)当黑方先走时，在1.…王e7之后便将

不死了，因为可以躲到角落里；2.象b4＋　王e8成了逼和；可是如果黑方采取配合的走法（提供白方将死的条件），那么总共只要走三步便可达到目的：1.…王d6　2.王d4　王e7　3.象b4＋　王e6　4.象d5将死。

在下面两个习题中，要求把棋盘分割成最小的几部分，也就是分成单个的格子。

△设被分割的部分允许互相叠贴在一起，这样使下一次分割时不是一块，而是几块在一起割。要使棋盘变为六十四块应分割几次呢？

首先把棋盘分割成两半。然后把这两半放在一起进行第二次分割，得到同样形状的四块，接着再依此分割下去。因为每分割一次，块数就比先前增加了一倍，那么在第六次分割之后，便得到了六十四块（$64=2^6$）。

△现在设每一块只能单独地分割，那么，分割几次才能得到单个的六十四块呢？

一般来说解这个习题会碰到一定的困难，尤其是紧接着上面的习题立即被提出来。大概解这个题的人，在某种程度上会有习惯性的思维方法。显然，一下子就能看出，必须进行六十三次分割。实际上，每次分割仅多了一块，但是在我们进行第一次分割之前，我们就有了一块（棋盘本身），于是，结果是六十四块（即棋盘格数）。

到目前为止，我们一直规定分割必须按棋盘的纵向和横向进行，也就是沿着格子进行分割。在下面两个习题里，就不考虑这个条件了。

△对棋盘进行一次切割，最多可穿过多少格？

对棋盘进行切割，也就是在棋盘上画直线。换句话说，我们需要确定在棋盘上画一根直线最多可穿过多少格子。棋盘的格子是由十八条直线，即九条竖线和九条横线画出来的。其中每一条直线与切割直线相交的只能有一个交点。但是这条切割直线只与构成棋盘边缘的四条直线中的两条相交。由此可知，切割直线与构成棋盘的十八条直线相交的交点最多是十六个。这些交点把这条切割直线分成十五段，其中每一段都处在一个棋格内。这样，对棋盘任意进行切割，穿过的格子最多不超过十五个。从图5可见，切割线穿过的格子正是这么多，这根切割线与棋盘对角线平行并经过两角格子某一边的中间。

因此，进行一次切割可以穿过棋盘上十五个方格。这样就自然形成了下面的一个习题。

△需要在棋盘上画多少条直线才能通过棋盘上所有的格子？

自然会想到画八条线，每一条线都顺着竖线或横线的方向画就够了。然而，用七条直线就能穿遍整个棋盘上六十四个格子。其中一条直线差不多画成对角线，并通过棋盘中心，而另外六条几乎与棋盘的另一条对角线平行（见图6）。

在本书里我们经常碰到的棋盘，不仅仅是 8×8 格的标准国际象棋棋盘，而且还会碰到另外一些规格的棋盘。对于一些矩形棋盘，我们很容易用一个公式来表示它们的规格，这个公式就是 $m\times n$，m 表示竖格，n 表示横格，正方形棋盘就用 $n\times n$ 来表示（也就是当 $m=n$ 时）。如果我们说偶数棋盘，那就是意味着棋盘的格数是偶数；如果说奇数棋盘，那正好

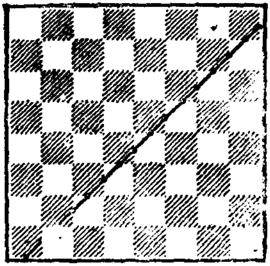


图 5　一条直线穿过十五格

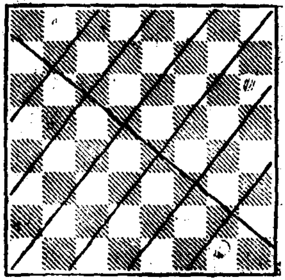


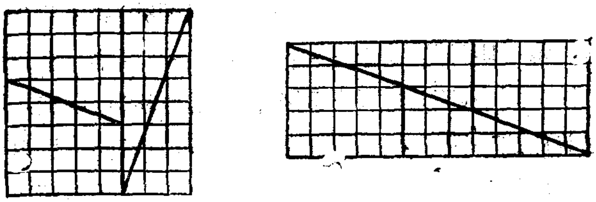
图 6　七条直线就能穿过棋盘上所有的格子

相反，棋盘的格数是奇数。通常如果不标明棋盘的规格，那就是标准的国际象棋棋盘，也即$m=n=8$。

对任何一个正方形棋盘来说，上述最后两个习题都很容易标出来。不难确定，在$n\times n$的棋盘上总能画出一条分割线，通过（$2n-1$）个格，并且完全能用（$n-1$）条分割线（当$n<3$时）穿过$n\times n$棋盘上所有的格。

下面我们用一个有名的离奇现象来结束与棋盘分割有关的问题。我们把棋盘分割成四部分，如图7a表示的那样（棋盘特意不画成黑白相间，以免读者混淆不清），然后再用这四部分来构成一个矩形（如图7b）。国际象棋棋盘的格数显然是六十四个，可是拼成矩形后却变成六十五格了。那么，在分割棋盘时不知从哪里拣来一个多余的格子呢！

这个离奇现象产生的原因，是我们的图画得不精确（我们故意画粗线，为的是掩饰误差）。如果我们画得很精确，那么图7b上矩形的对角线就得用拉长的菱形来取代，而菱形的几条边几乎是围在一起的。这个由几条边汇合在一起形成的



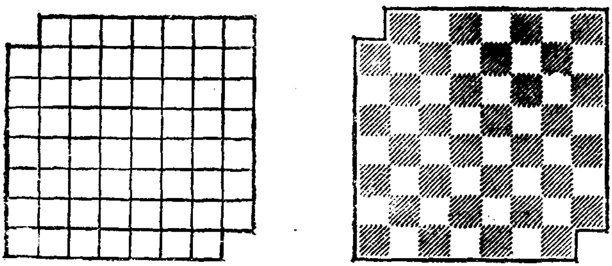
a　　　　b

图 7　棋盘切割的离奇现象

菱形被拉长了的部分的面积，恰好是一个方格。

我们从下面一个古老的智力游戏开始来研究另一个与棋盘习题有关的主题。

△能否用骨牌把 8 × 8 、对角的两个方格被割掉的正方形全部覆盖住(图8a)？



a　　　　b

图 8　骨牌棋题

首先，我们假定每个骨牌的大小是 2 ×1，每个骨牌能盖住棋盘上两个相邻的方格，也就是说每个方格被半个骨牌所覆盖。我们若能运用代数学的推理，问题就会解决得干脆利落。我们把这个缺损的正方形涂上黑白相间的颜色，使它