高等学校教材

实变函数与泛函分析基础

（第二版）

程其襄　张奠宙　魏国强
胡善文　王漱石　编

高等教育出版社

高等学校教材

实变函数与泛函分析基础

（第二版）

程其襄　张奠宙　魏国强
胡善文　王漱石
编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析基础/程其襄等编.—2版.
—北京:高等教育出版社,2003.8
ISBN 7-04-011918-8

Ⅰ.实... Ⅱ.程... Ⅲ.①实变函数-高等学校-
教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025094 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京未来科学技术研究所 有限责任公司印刷厂	版　　次	1983 年 12 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		2003 年 7 月第 2 版
印　　张	11.25	印　　次	2003 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	280 000	定　　价	17.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

内容提要

本书初版于 1983 年,为高师院校和其他高校广泛采用。进入 21 世纪之后,高等教育发生了很多变化。本书作者根据多年来的使用情况,以及数学的近代发展,进行了全面的修订。实变函数部分是修订的重点,泛函分析只作了少量的改动。总体来看,原书的基本框架不变。

这次修订的原则是,首先是继续保持原书简明易学的风格,删除了若尔当测度、佩亚诺曲线等枝蔓,减少过度形式化的论述。其次是着重阐述实变函数和泛函分析的思想方法,在每章的引言中作一些说明。此外,为了帮助学生克服做实变函数题目的困难,书中增加了部分例题,并进行评讲。一些较难的题目与简解作为附录三附在书后,供有兴趣的读者参考。

本书共计 11 章:集合、点集、测度论、可测函数、积分论、微分和不定积分;以及度量空间和巴拿赫空间、线性泛函与线性算子、希尔伯特空间、巴拿赫空间的基本定理、线性算子的谱。

本书可作为高等师范院校和其他高校数学系的教学用书,也可以作为自学参考书。

第二版前言

《实变函数与泛函分析基础》一书，初版于 1983 年，由华东师范大学数学系程其襄教授主持，张奠宙、魏国强具体编写。在试教阶段阎革兴、钱自强提出了许多宝贵意见。出版之后，蒙许多同行厚爱，曾多次印刷使用，并提出许多宝贵意见与建议。现在十余年过去了，情况有了许多变化，遂决定在初版的基础上改写。

第二版继续保留了程其襄先生许多重要思想，特别是保持了全书简明易懂的特点，结合我们多年使用本书的经验和全国许多兄弟院校的意见作了全面的改写。

与初版相比较，第二版作了以下几方面改动：

第一，删去枝蔓（如若尔当测度、佩亚诺曲线等），以突出实变函数和泛函分析的思想方法，尽快进入实变函数和泛函分析的核心内容；

第二，把初版的第五章拆成“积分论”和“微分与不定积分”两章，改变原来的过分冗长，并且把积分与微分两个不同的内容混在一起的状况；

第三，在第二章增加了紧性的内容，并且改写了部分定理的证明，例如用简单函数逼近可测函数、勒贝格控制收敛定理等，以利于教师讲授和读者理解；

第四，在实变函数部分增加了部分例题，并对这些例题的证明作了一定的说明，希望这有助于读者克服做习题时的困难；

第五，我们把初版中“可测集两个定义等价性的证明”和“半序集和佐恩（Zorn）引理”两个内容分别作为附录一和附录二放在全书最后，并在最后附录三中按章增加了例题，这些例题属于扩展性

的题目,仅供参考。

在实变函数部分增加的例题,可以根据学时数,由教师选讲或请学生自己阅读。

程其襄教授于2000年不幸逝世,第二版的改写工作由张奠宙主持,并写了全书的引言和主要章节的前言。魏国强、胡善文对全书进行具体的修改和编写。王漱石补充了实变函数部分的若干例题,并编写了附录三中的大部分例题。全书的文字由魏国强进行了必要的加工。

本书改版过程中,得到了华东师范大学数学系领导的关心与支持。本书能尽快与读者见面,也归功于高等教育出版社同志们的辛勤工作,特别是文小西编审对该书的初稿提出了许多有益的建议。

最后,向使用过本书初版并提供修改意见的同行们,表示深切的感谢。

由于我们水平有限,书中难免存在不少缺点与疏漏之处,恳请使用本书的教师与读者批评、指正。总之,我们恳切地希望得到各位的继续帮助。

编　　者

2003年元月于华东师范大学

第一版前言

本书是按照教育部于1980年颁发的高等师范院校试用的《实变函数与泛函分析》教学大纲编写的。泛函分析部分作了适当的增加,可供选修课使用。

在编写本书过程中,我们注意做到:

第一,以最精简的形式介绍实变函数论和泛函分析,但仍保持这两门学科的核心部分,使读者获得进一步学习时所必需的基础知识。

第二,尽可能做到直观易懂与严密处理相结合。如测度理论的介绍,先讲若尔当测度和黎曼积分,从内外测度的想法引出卡氏可测条件,最后由卡氏条件出发建立 n 维欧氏空间上的勒贝格测度。这样既可以介绍测度论的直观背景,又可以照顾到抽象空间上测度论的某些想法。

第三,适当注意师范性特点,介绍了有关材料。如半序与复数体,面积与测度(包括任意子集均可测的可能性问题),佩亚诺曲线,广义函数等等,供教学时参考。

本书前五章为实变函数部分,重点在建立勒贝格测度和积分理论,至于微分、不定积分、重积分等尽可能简略些,以便节约篇幅和教学时数。后五章为泛函分析部分,如时数少,可只介绍度量空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间;时数稍多的可讲线性泛函和线性算子的重要定理;如能达到50学时以上,则可介绍全部内容。本书只介绍自伴全连续算子的谱理论,比较易懂。

本书在程其襄教授主持下编写。实变函数部分取材于他在1964年所使用的讲义。迄1980—1981年,在哈尔滨师范大学领

导的支持下，由阎革兴，钱自强同志试教，他们对原讲义作了修改和补充，还编写了佩亚诺曲线等内容。泛函分析部分由张奠宙和魏国强负责编写。全书的文字由张奠宙进行了必要的加工，最后由程其襄教授定稿。

在写作本书过程中，方初宝、游若云、丁传松、邱达三等同志提出了有益的建议。徐小伯、王宗尧和胡善文同志在试教工作中提出了很好的意见。俞鑫泰、王漱石、柴俊、黄旦润、张文耀、赵焕光等同志也给予许多帮助。在出版过程中，承北京师范大学孙永生先生、北京师范学院林有浩先生等仔细地审阅了全书，提出了详尽的修改意见。我们向上述各位同志，表示诚挚的谢意。

编　　者

1982 年 10 月于华东师大

郑重声明

策　　划　王　瑜
编　　辑　文小西
封面设计　于文燕
责任绘图　朱　静
版式设计　王艳红
责任校对　杨雪莲
责任印制　杨　明

目　录

第一篇　实变函数

第二篇 泛函分析

第一篇 实变函数

常常听说“实变函数很难学”. 确实，在 20 世纪 50 年代，一位数学系的老师能够讲授实变函数论，往往就能使学生们刮目相看. 可是，半个世纪过去了，大学数学系的学生成倍、成几十倍地增加. 大家都学一点实变函数，实变函数也就不神秘了. 时至今日，甚至一些工程师也需要知道一点“勒贝格积分”，把平方可积函数空间当作一种常识.

实变函数论是 19 世纪末、20 世纪初，主要由法国数学家勒贝格(Lebesgue，1875—1941)创立的. 它是普通微积分学的继续，其目的是想克服牛顿和莱布尼茨所建立的微积分学存在的缺点，使得微分和积分的运算更加对称、更加完美.

我们以前学过的微积分，有一个明显的不足：黎曼意义下可积的函数类太小. 例如，定义在$[0,1]$上的狄利克雷函数 $D(x)$(有理数点上取值 1，无理数点上取值 0)，看上去非常简单，但是它不可积(黎曼意义下). 于是数学家们想到，这大概是黎曼积分的定义有问题了，应该引进一种新的积分才是. 这就是勒贝格研究实变函数的出发点.

那么黎曼积分究竟有什么缺陷呢? 让我们细细咀嚼一下黎曼积分的定义. 对一个由 $y=f(x)$围成的曲边梯形来说，要求它的面积，总是用内填外包法. 首先将定义区间分割为小区间. 然后以小区间 Δ_i 的长度为底、函数在 Δ_i 上的下确界 m_i 为高的那些矩形内填，并且以相同的底，Δ_i 上的上确界 M_i 为高的那些矩形外包. 如果在每个小区间内函数值的差别很小(连续函数就是这样，小区间上函数的上下确界 M_i 和 m_i 差别不大)，那么当把区间分得很

细的时候,能使这种差别的总和很小,那么内填外包的矩形面积之差可以无限小,彼此都趋向于一个定值 L,这就得到了定积分:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\sum\limits_i m_i \Delta X_i \arrow[dr] & \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta X_i \leqslant \arrow[d] & \sum\limits_i M_i \Delta X_i \arrow[dl] & (*) \\
& L & &
\end{tikzcd}$$

回过头来看看狄利克雷函数 $D(x)$,不管你把[0,1]区间划分成多么小的 n 个区间,每个小区间里都有无理数和有理数,$D(x)$ 的函数值分别取值 0 和 1,他们彼此之差到处都是 1.(*)式的左端恒为 0,右端恒为 1,不会趋于相同的值,于是黎曼意义下就是"不可积"的了.

如上所述,用黎曼积分求曲边梯形的面积,是用以 ΔX_i 为底边的那些矩形进行"内填外包"的.那么,我们能不能换个脑筋,换成用 Δy_i 为底边的矩形去内填外包呢?记得苏轼咏庐山诗有"横看成岭侧成峰"的意境,恰好可以形容这一思想.勒贝格自己也曾经这样比喻说:假如我们要数一堆硬币,你可以一叠叠地竖着数,也可以一层层横着数(如图 0.1).这就是说,求曲边梯形面积时不要去分定义域[0,1],而是分值域,把函数值相差不多的那些点集放在一起考虑,用横放着的小矩形面积之和加以逼近,岂不是柳暗

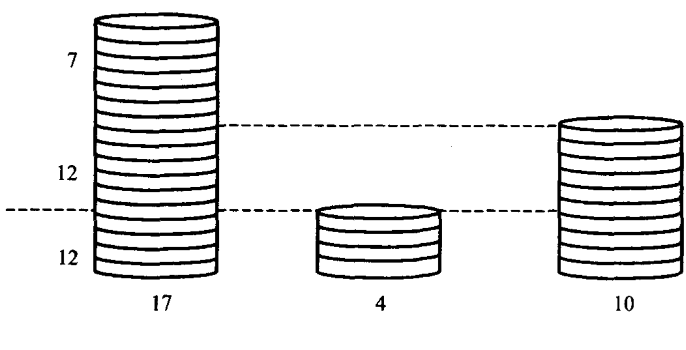

图 0.1　横着数、竖着数都是 31

花明又一村了吗(如图 0.2)? 仍以 $D(x)$为例,它只取两个函数值 0 和 1,取 0 的是[0,1]中的无理数集 I,取 1 的是[0,1]中的有理数集 Q.假定 I 的"长度"是 $m(I)=1$,Q 的长度 $m(Q)$是 0,不管把 Y 轴上的[0,1]区间分得如何细,因为 $D(x)$只有两个值,它和[0,1]构成的曲边梯形"面积"始终是

$$1\cdot m(Q)+0\cdot m(I).$$

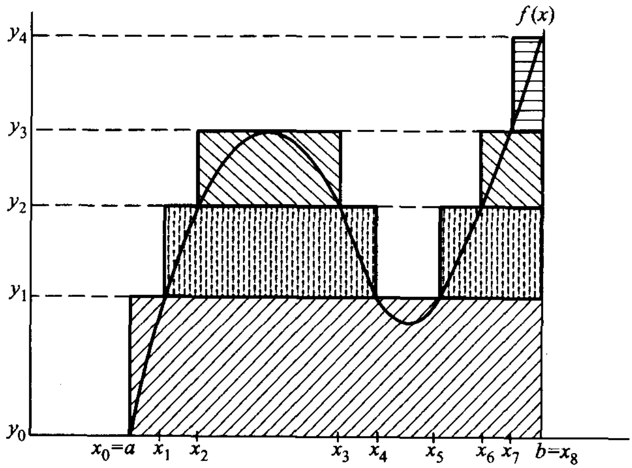

图 0.2 勒贝格积分示意图.由 $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ 围成的曲边梯形面积,可以用横向分割方式形成的矩形面积近似地加以表示:

$$(b-a)(y_1-y_0)+[(x_4-x_1)+(b-x_5)](y_2-y_1)+$$
$$[(x_3-x_2)+(b-x_6)](y_3-y_2)+(b-x_7)(y_4-y_3).$$

这样,问题归结为如何来确定 $m(Q)$和 $m(I)$了.众所周知,在微积分课程里,Q, I 之类的集合是没有"长度"的.这要求我们重新制定一套理论.按照勒贝格创立的测度论,$m(Q)=0$, $m(I)=1$,于是 $D(x)$的勒贝格积分该是 0,问题迎刃而解!

于是,本书的内容就顺着勒贝格的思路走,先讨论集合,再讨

论集合的“长度”，即测度.然后定义新的积分，并找出和某种微分的关系.实变函数的理论，就这样顺理成章地展开了.亲爱的读者，只要你把握住了这条思路，你就不会觉得实变函数的概念像是“帽子里突然跑出了一只兔子”，而是合情合理、明白可亲的一门学问了.