中学数学逻辑问题

楊景星　楊景芳　編著

福建人民教育出版社

中学数学邏輯問題

楊景星 楊景芳 編著

*

福建人民教育出版社出版

（福州城守前7号）

福建省書刊出版业营业許可証出字第002号

福州第一印刷厂印刷 福建省新華書店發行

开本787×1092 1/32 印張2 1/4 字数 48(千)

1962年10月第1版 1962年10月第1次印刷

印数1—5,650册

統一书号：7159·301

定 价：（6）0.20元

編著者的話

通过多年的努力，在中学数学教学中，培养学生的邏輯思維能力已取得一定成績。这是解放以来，数学教学质量提高的一个突出方面。当然，我們不能因此认为这个工作已經做得十分完美无缺，問題存在于教师在做这个工作时还不夠意識化、系統化。为了进一步加强学生邏輯思維能力的培养，以便在原有基础上继續提高，那么，全面熟悉中学数学邏輯知識，考慮相应的教学方法，有計划有步驟地进行工作，就成为当前教师的重要任务之一。

鑑于有关內容的书本在目前出版界中还是十分缺乏，而中学数学教师又迫切需要这一方面的材料。为此，当福建人民教育出版社約定我們写这本书时，虽然自知能力薄弱，还是乐于承担下来。

本书內容除比較全面系統地介紹中学数学邏輯知識外，还涉及如何培养学生邏輯思維能力的問題。它既可供中学数学教师在教学上参考，也可作为高等师范院校数学系科学生的补充讀物。

从邏輯学的观点看来，現行中学数学教材中，有关邏輯的問題，基本上是属于古典形式邏輯的范疇，从中学生的知識水平和接受能力出发，訓练內容也应以这方面的知識为主。而中学数学教学中培养学生邏輯思維又必須以此二者为依据。因此，凡与中学数学关系不大的邏輯知識书中并未列入，其內容既未能如邏輯学那么完整，編写的体系又是根据数学科的特点

来考虑的。

限于作者的水平，书中的缺点或錯誤在所难免，倘望讀者多加指正。

楊景星　楊景芳

1962.8.

引　言

加里宁在《論共产主义教育》一书中向青少年学生指出："第一，因为数学可以使人們的思想紀律化，能教会人們合理地去思維着。无怪乎人們說，数学是鍛炼思想的『体操』……。第二，因为——……—实际运用数学的范圍是很广闊的。将来不管你們研究哪一門科学，不管你們进哪一个大学，不管你們在哪一个部門里作工，如果你們想在那里作出某种成績，那么，到处都必須要有数学知識。"* 从这一段話中可以清楚地看到：通过数学教学，不仅应当使学生获得系統的数学知識，掌握解决实际問題的技能，与此同时，还要注意培养学生的邏輯思維能力，給他們以必要的邏輯方面的鍛炼。

数学是一門邏輯性很强，邏輯因素十分丰富的学科，它不容許含糊地表述一个对象，必須恰如其分地反映事物的眞实情况，既要善于从已有的判断作出新的判断，对于命題的眞确性又需要經过严密的論証。也就是說，它要求明确地闡述概念，恰当地下判断，合乎邏輯地进行推理。显然，它比其他学科更加明显而严格地服从邏輯規律，要更多地运用邏輯方法。因此，把培养学生邏輯思維作为数学教学的任务之一，是由数学科的特点所决定的。

經驗証明，学生具有合理的邏輯习惯和較强的思維能力，不但有助于透徹理解和系統掌握数学知識，并且运用数学知識解决实际問題的技能也将得到相应的提高。时常可以看到，学生由于缺乏最低限度的邏輯知識而产生了形形色色的錯誤，或者因为思維能力薄弱，造成了学习数学的困难。因此，培养学生的邏輯思維能力又是数学教学本身所需要的。

由此可知，加里宁所指出的数学教学的两个任务，不但不互相排斥，而且应該相輔相成，彼此促进。为了做好这个工作，教师首先必須具有一定的邏輯知識，熟悉中学数学課里究竟蘊藏着哪些邏輯因素，其次，要善于根据具体教材的特点，抓住数学課在培养学生邏輯思維能力方面的有利条件，充分地加以利用，这样就能促使数学教学质量的不断提高。

然而，数学課，特别是中学数学課，在培养学生的邏輯思維能力方面的作用是有其局限性的。应該承认，学了数学并不等于学了邏輯学。为此我們不能脫离实际地片面追求邏輯上的完整、严謹，搬弄大量的邏輯术語，或者把和中学数学关系不大的邏輯知識强加进去；而是应当在加强基础知識教学，培养技能技巧的同时，充分发掘教材內在的邏輯因素，有意識地訓练学生依照邏輯法則，正确地思考和表达数学問題，引导他們自覺地运用邏輯方法，随时揭露并糾正学生在邏輯上所犯的錯誤，从而达到預期的目的。

从邏輯学的观念看来，数学知識是一个用概念、判断和推理三种形式組成的統一体。那末，中学数学的邏輯問題也就必須分別从这三方面来进行探討。

* 加里宁：《論共產主义教育》第123頁。外国文书籍出版局印行 一九五〇年。莫斯科

目　　录

第一章 數學概念

邏輯学中把我們所思考的环繞着人們周圍的那些事物、現象叫做思維对象，通常又簡称为对象。各个对象間彼此相似或彼此相异的一切性质叫做属性。任何对象都有无数属性，其中有些是最根本最重要的属性，借助于它們就可以把这一类对象和那一类对象区别开来，这些属性叫做本质属性或本质特征。概念正是反映并确定对象的本质属性的一种思維形式。

作为研究客观世界的空間形式和数量关系的数学，它所考察的对象是十分現实的資料，而这些資料却表現为非常抽象的形式——数学概念。

中学数学里包含着大量的概念，这些概念是学生学习中賴以正确思維的基础。常常因为对一个概念的理解不夠清楚透彻，使学生的思維能力得不到充分发揮而陷于一种凌乱迟鈍的境地；在进行运算的过程中，也可能由于一个概念的疏忽或理解得不十分确切而导致全盘失敗。显然，只有树立起清晰明确的概念，才有可能牢固掌握基础知識，自覚形成技能技巧，以及創造性地运用数学知識解决日常生活中和生产实际中的有关問題。为此，数学概念的教学，在中学数学課中一向被认为是一个重要的組成部分。

第一节 概念的內涵和外延

內涵和外延是概念的两个方面。

概念的內涵是它所包括的对象的一切本质属性的总和。例如：

方程的內涵是等式、含有未知数等两个本质属性的总和。

一弧度的內涵是量角单位、角的对弧长等于半徑长等两个本质属性的总和。

菱形的內涵是四边形、两組对边互相平行、邻边相等等三个本质属性的总和。

正多面体的內涵是多面体、各个面都是全等的正多边形、各个多面角都是全等的多面角等三个本质属性的总和。

每个概念都有內涵，但就一个个概念来看，內涵却有深有淺，內涵深的就是指概念所包含的本质属性多，內涵淺的就是指概念所包含的本质属性少。內涵深淺是相对的，只有当一个概念和另一个概念比較时才能体現出来。例如：

数列，遞增数列，遞增而有界的数列等概念的內涵是由淺到深。

正方体，正多面体，多面体等概念的內涵是由深到淺。

概念的外延是适合該概念的一切对象的全体。例如：

实数的外延中包含有有理数和无理数。

三角函数的外延中包含有正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数，正刈函数和余刈函数。

三角形的外延中包含有銳角三角形，直角三角形，等腰三角形，等边三角形，……等等。

棱柱的外延中包含有斜棱柱，直棱柱，三棱柱，四棱柱，……等等。

每个概念都有外延，但就一个个概念来看，外延却有广有狭，外延广的就是指概念所适用的范圍大，外延狭的就是指概念所适用的范圍小。广和狭是相对的，只有把一个概念和另一个概念比較时，才能体現出来。例如：

銳角三角形，三角形，多边形等概念的外延是由狭到广。

初等函数，初等超越函数，三角函数等概念的外延是由广

到狭。

概念的內涵和外延之間有着相互制約的关系，即內涵深的外延就狭，內涵淺的外延就广。反之亦然。例如：

在复数（a+bi，其中a,b是任意实数）的內涵中加上“b≠o这个本质属性后就是虛数。由于复数中不仅有虛数，还有实数，所以虛数的外延比复数狭。如果在虛数的外延中再加上“a＝o”这个本质属性后就是純虛数，因为它把非純虛数的虛数从中排斥出去，故其外延又比虛数狭。

在四边形的內涵中加上“两組对边互相平行”这个本质属性后就是平行四边形。在平行四边形的內涵中加上“两邻边相等”（或“一角为直角”）这个本质属性后就是菱形（或矩形）。在菱形（或矩形）的內涵中加上“一角为直角”（或“两邻边相等”）这个本质属性后就是正方形。另一方面，如果在四边形的內涵中加上“只有一組对边平行”这个本质属性后就是梯形，在梯形的內涵中加上“两腰相等”（或“一角为直角”）这个本质属性后就是等腰梯形(或直角梯形)。显然，由于每次增添了一个本质属性后就使新概念的內涵比原概念深，而其外延却比原概念狭。若以图1表示之就显得更清楚。

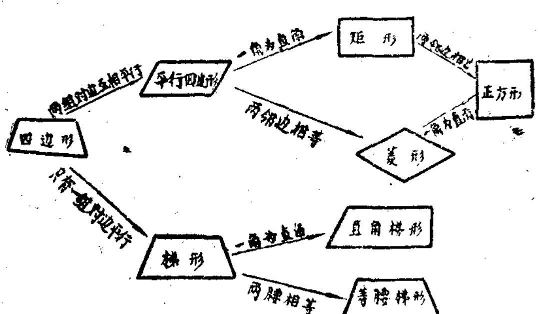

图1

下面是以另一种形式来表明多面体，棱柱，平行六面体，……諸概念的內涵和外延間的相互制約的关系：

正方体

↑

三度相等的长方体

↑

底为矩形的直平行六面体

↑

側棱垂直于底面的平行六面体

↑

底面是平行四边形的棱柱

↑

有两面平行，其余相鄰两面的交綫互相平行的多面体

研究概念的內涵和外延时还应当区分它們的种和属。

如果概念甲的外延只是概念乙的外延的一部分时，或者說，概念乙的內涵只是概念甲的內涵的一部分时，那么概念乙称为种概念，而概念甲称为属概念。种概念和属概念是相对的，同一概念由与它比較的概念的外延或內涵来决定，可能是种概念，也可能是属概念。例如：

有理数对整数来說是种概念，对实数来說是属概念。

平行四边形对菱形来說是种概念，对四边形来說是属概念。

然而并非所有概念之間都具有种属关系，有些概念彼此之間并无确定的关系，也就无从比較。

学生如果沒有养成邏輯习慣，也就不会仔細地考慮每一个概念的內涵和外延，对概念只是滿足于一知半解，这就往往使得他們非但不会正确的表述一个概念，甚至也沒有眞正的理解概念，其結果是造成对概念的理解含混不清。例如：

有些学生把“能使式子两边相等的未知数的值必须是并且只能是有限个”作为方程的本质属性而列入方程的內涵之中，于是把无解的方程如$x+1=2+x$和不定解的方程如$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$一律排斥在方程的范圍之外。相反的，有些学生却忽略了“等式”是方程的一个本质属性，把它从方程的內涵中抽取出去，于是誤代数式如$\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{3}$为方程，濫用了方程同解变形中去分母的方法，从而产生了錯誤。这是沒有掌握方程內涵的結果。

有些学生把矩形和正方形对立起来，当他們解“长度为l的鉄絲，怎样才能圍得最大面积的矩形。”而求得各边长均为$\frac{l}{4}$时，（即应圍成正方形时）开始怀疑自己解法的錯誤或者认为是題目的錯誤，因为他們不懂得正方形是矩形的一种特殊情况。这是沒有掌握矩形的外延的結果。

有些学生形式地記住了棱柱的定义，錯誤地认为互相平行的两面必須处于水平位置。由于把这个非本质的属性誤当为本质属性看待，从而影响到对直棱柱概念的正确理解，于是在計算鉄路的土方时就不懂得这是一个求以鉄路的梯形截面为底、路基的长为高的直棱柱的体积問題。

由此可見，概念的內涵不容許任意变更，概念的外延也应該相应地固定下来，这就是所謂概念的确定性（明显和精确）。忽略了它，既談不上掌握基础知識，更不可能处理好实际問題；因而它是数学概念教学中值得重視的一个关鍵性問題。

另一方面，应該认識概念的确定性是相对的，是在一定条件下确定而非永恆不变的。这是因为客观事物处于不断发展的过程中，人們对客观事物的认識又在不断深化，作为反映客观事物的本质属性的思維形式的概念，也就要随着发展和变化，这就是所謂概念的灵活性。概念的灵活性的表現是多方面的：

1.有些概念在发展过程中，內容不断丰富、充实，終于达到了最完善的境地。例如：

学生在学习平几中，开始接触到角的概念时，认識它是“从同一点引出的两条射綫所組成的图形。”在平面三角中把角的概念加以扩張后，就应該把它理解为：“射綫圍繞着它的端点旋轉所成的旋轉量。”这是由靜到动的发展。角的最初涵义只限于小于180°的正角，后来便把180°的角包括进来，而后又扩充到360°的角，进一步又充实为大于360°的角，这是由小到大的发展。規定了方向以后，不但有正角、等于零的角，而且有了負角，这是由正到負的发展。学过立几以后，又有异面直綫的夹角，直綫与平面的夹角，平面与平面的夹角等，这是由平面到空間的发展。

2.有些概念发展以后更加抽象化一般化，后者包括了前者，前者是后者的特殊情况。由于发展后的概念具有較高的抽象性，也就显示出其应用的广泛性和优越性。例如：

在平几中，关于銳角A（A是直角三角形的內角）的三角函数的定义是：

$$\sin A=\frac{A\text{的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos A=\frac{A\text{的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{A\text{的对边}}{A\text{的鄰边}},\text{等等。}$$

在平面三角中，关于任意角α的三角函数的定义是：

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{的終边上任取一点P的纵坐标}}{\text{P點到原點的距离}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\alpha\text{的終边上任取一点P的横坐标}}{\text{P点到原点的距离}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\alpha\text{的終边上任取一点P的纵坐标}}{\text{P点的横坐标}}\quad\text{等等。}$$

显然，任意角的三角函数的定义，不仅沒有同銳角三角函数的定义发生矛盾，而且把它包括进去了。

在中学数学里，两度学过正反比例的概念。算术里认为："两个量，若其中一个量扩大（或縮小）若干倍，另一个量也跟着扩大（或縮小）同样的倍数，这样的两个量間的变化关系叫做正比例关系。""两个量，若其中一个量扩大（或縮小）若干倍，另一个量反而縮小（或扩大）同样的倍数，这样的两个量間的变化关系叫做反比例关系。"到了代数里学习函数时，这两个概念就得到进一步的发展："两个变量x, y間的函数关系如果能用公式$y=kx$（这里k是一个不等于零的常量）来表示，那么这两个变量間的关系就叫做正比例关系。""两个变量x, y間的函数关系如果能用公式$y=\frac{k}{x}$（这里k是一个不等于零的常量）来表示，那么这两个变量間的关系就叫做反比例关系。"后者不仅能用函数观点，借助于函数的解析式来闡明正反比例的概念，并且比前者更具有一般性。因为在算术里，k只能取正有理数，但在代数里，k却可以取不等于零的任何实数。

实数a的絕对值概念以式子表之为：$|a|=\begin{cases} a, 若a\geqq 0 \\ -a, 若a<0。\end{cases}$

复数$a+bi$（a，b是实数）的絕对值概念以式子表之为：$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$。由于$b=0$时，$a+bi$是实数，此时$|a+bi|=|a|=\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, 若a\geqq 0 \\ -a, 若a<0。\end{cases}$可见，实数的絕对值是复数的絕对值的特殊情况，前者可以統一于后者。

3.有些概念发展以后和原概念的涵义不同，或者除了原来的涵义以外，还可以有新的涵义，对此，就必須針对不同情况

分别对待，切忌混为一談，造成錯誤。例如：

零本是用来表示“沒有”的，但后来人們又用它来表示“某物”。“沒有”与“某物”是两件相反的东西，然而“零”這个概念在发展后居然使这两个不同涵义的东西在不同場合下通过它体現出来了。如攝氏溫度計上的零点，这个零就不应該理解为“沒有”。因为它是用来作为划分較高溫度和較低溫度的标准。又如对数表中$\lg 2=0.3010$中最后的一个零却是用来表示这个近似值的精确度；有些学生任意删去这个零，說明了它們还停留在对零的概念的最原始的涵义的理解上面，对它的发展缺乏足夠的认識。另有些学生，把方程唯一的根为零說成无根，也是犯了同样的錯誤。

在指数概念的发展过程中，我們看到：当指数为自然数n时，$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个a}$；当指数为零时，$a^0=1\,(a\neq 0)$；当指数为負数$-s$时，$a^{-s}=\dfrac{1}{a^s}\,(a\neq 0)$；当指数为分数$\dfrac{n}{m}$时，$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}\,(a>0)$；当指数为无理数$\alpha$时，$a^{\alpha}\,(a>0)$是永远介于$a^{\alpha_n}$和$a^{\alpha'_n}$間的一个数。（$\alpha_n$和$\alpha'_n$分别表示$\alpha$的任何同样精确度的不足近似值和过剩近似值。）这里指数概念的每一次扩充，其前后涵义均有所不同。似此情况，尤其不能不引起我們注意。

由于中学数学課里，概念的建立是一个由簡单到复杂、由个别到一般的不断深化不断发展的过程。所以只注意概念的确定性，忽略了概念的灵活性，就是看不到事物的发展变化，学生对概念的涵义就会覺得前后矛盾，无所适从，甚至引起思想上的混乱。相反的，只注意概念的灵活性，不注意概念的确定性，

就无异于否定了概念的内涵和外延，也就談不上让学生形成清晰明确的概念。因为一个概念的涵义纵然不是永恆不变的，但是在某一种場合下要求有确定的意义也还是应該的。事实上，只有概念的确定性和灵活性的結合，才有可能既深入又全面地反映事物发展的必然規律，也才会使学生对概念理解得更透彻，掌握得更牢固。为此，在教学概念时，必須妥善处理二者的关系。

第二节　对概念下定义

定义是揭露概念的内涵的一种邏輯活动。由于概念的内涵是指概念所包括对象的一切本质属性的总和，因此，下定义就是列举概念的本质属性的过程。

由于每一个概念都有很多个属性，企图从所有的属性中把一切本质属性一一挑出，是件极端困难甚至是办不到的事。邏輯学規定了下定义的方式，从而排除了上述的困难。这种方式就是通常所采用的“种属定义”。所謂“种属定义”就是通过揭露最邻近的种概念和属差（即在同一种概念中被下定义的概念和其他属概念的根本差别），来給概念下定义。用公式表示就是：

被下定义的概念＝最邻近的种概念＋属差。例如：

“只含加、減、乘、（包括乘方）除等四种运算的代数式叫做有理式。”的定义中，“代数式”是有理式最邻近的种概念，“只含加、減、乘、（包括乘方）除等四种运算”是属差。

“两个端点位在同一圓上的綫段叫做弦。”的定义中，“綫段”是弦最邻近的种概念，“两个端点位在同一圓上”是属差。

“底面为正多边形的直棱柱叫做正棱柱。”的定义中，“直棱柱”是正棱柱最邻近的种概念，“底面为正多边形”是属差。

由此可見，每一个定义都是由两个部分組成的，即：被下定义的概念和下定义的概念。例如，在上述的諸定义中，“有理式”，“弦”，“正棱柱”等都是被下定义的概念。而“只含加、減、乘、(包括乘方)除等四种运算的代数式”，“两个端点位在同一圓上的綫段”，“底面是正多边形的直棱柱”等都是下定义的概念。

有时同一概念有两个最邻近的种概念，这个概念就可以用两种不同的方法来下定义。例如，正方形的两个最邻近的种概念是菱形和矩形，因此，我們既可把它定义为“一角为直角的菱形。”又可把它定义为“邻边相等的矩形。”

給概念下定义，除了首先必須具备該概念所适用的对象的有关知識，熟悉其本质属性，对概念所反映的对象有深刻的了解外，还应当遵守下定义的規則，否則，所下定义不一定能恰到好处，有时甚至是錯誤的。这些規則是：

1.定义应当是相称的

这就是說，被下定义的概念和下定义的概念，其外延应当完全相等，因而两者的位置是可以互换的。换句話說，如果“甲是乙”是概念甲的定义，那么“乙是甲”也应該是概念甲的定义。例如：

“两組对边互相平行的四边形就是平行四边形。”反过来，“平行四边形是两組对边互相平行的四边形。”都一样可以作为平行四边形的定义。

“无限不循环小数就是无理数。”反过来，“无理数就是无限不循环小数。”都一样可以作为无理数的定义。