义务教育课程标准实验教科书

北师大版

新课标

数学

同步训练

九年级上册

由名教师出题
与新教材同步

青岛出版社

目　录

第一章 证明(二)

知识概括

1．本章给出的公理：

(1) 三边对应相等的两个三角形全等.(SSS)

(2) 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.(SAS)

(3) 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.(ASA)

(4) 全等三角形的对应边相等,对应角相等.

2．由上面的公理和已经证明的定理,可以证明下面的推论和定理：

(1) 推论：

① 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.(AAS)

② 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.

③ 等边三角形的三个角都相等,并且每个角都等于60°.

④ 有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

⑤ 在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

⑥ 三个角都相等的三角形是等边三角形.

(2) 定理：

① 等腰三角形的两个底角相等.(简单叙述为“等边对等角”)

② 有两个角相等的三角形是等腰三角形.(简单叙述为“等角对等边”)

③ 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

④ 如果三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么这个三角形是直角三角形.

⑤ 斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.(“斜边、直角边”或“HL”)

⑥ 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

⑦ 到一条线段两个端点距离相等的点,在这条线段的垂直平分线上.

⑧ 三角形三条边的垂直平分线相交于一点,并且这一点到三个顶点的距离相等.

⑨ 角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

⑩ 在一个角的内部,且到角的两边距离相等的点,在这个角的平分线上.

⑪ 三角形的三条角平分线相交于一点,并且这一点到三条边的距离相等.

3. 反证法:

在证明时,先假设命题的结论不成立,然后推导出了矛盾的结果,从而证明命题的结论一定成立,这种证明方法称为反证法.

4. 互逆命题、互逆定理:

(1) 在两个命题中,如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,那么这两个命题称为互逆命题,其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

(2) 如果一个定理的逆命题经过证明是真命题,那么它也是一个定理,这两个定理称为互逆定理,其中一个定理称为另一个定理的逆定理.

5. 尺规作图:

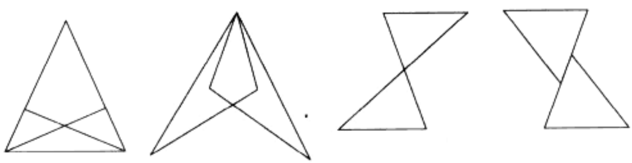
(1) 作线段的垂直平分线.

(2) 已知底边及底边上的高,求作等腰三角形.

(3) 作角的平分线.

要点分析

1. 在平面几何中,有很多问题都可以借助于三角形的全等来解决. 比如:线段的相等,角的相等.平行,垂直关系等.在运用三角形全等这一工具时,主要是找两个三角形,并找出满足它们全等的条件来,但几何图形是千变万化的.因此,解题时经常需要通过观察、想象图形的运动状况,把两个全等三角形中一个看成是另一个按平行移动、翻转、旋转等方法得到的.这就需要对常见的全等图形做到心中有数,下面将常见的基本图形列举如图 1 - 1:



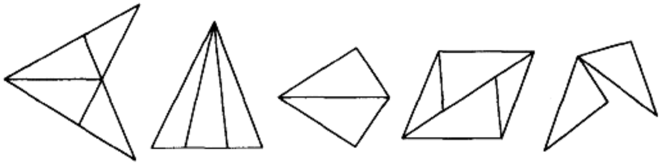


图 1-1

掌握以上全等形的对应边和对应角的位置关系，对我们从复杂的几何问题中迅速、准确地确定全等三角形是至关重要的.

2. 在证明三角形全等时，必须注意有关的三个元素对应相等，否则会出现错误. 如图 1-2，$\angle B = ACD$，$\angle ACB = \angle D = 90^\circ$，又 AC 是$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的公共边，故就判定$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 全等是错误的. 这是因为“角角边”判定两个三角形全等时，这两个角与一边不是仅仅“相等”就可以了，而必须是“对应相等”，即两个三角形中相等的边和角必须有相同的顺序. 实际上，在$\triangle ABC$ 中，AC 是锐角$\angle B$ 的对边，而在$\triangle ACD$ 中，AC 是直角$\angle ADC$ 的对边，这样的边就不存在“对应相等”的关系.

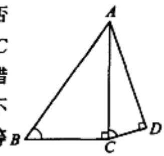


图 1-2

3. 在应用等腰三角形、线段的垂直平分线及角平分线的性质去证明两线段相等或角相等时，可以根据图形的特点添作辅助线，达到集中条件，建立关系，找出隐含在图形中的有关性质，借此达到解题的目的.

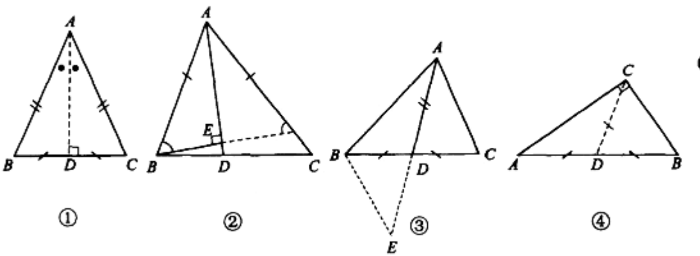


图 1-3

这里，常用的辅助线有：(1)“等腰三角形三线合一”. 如图 1-3①，作出等腰三角形底边上的高线，就可得到它就是底边上的中线与顶角的平分线. (2)“角平分线遇垂线，

延垂线截成等腰边”如图 1－3②，BE 垂直于角平分线 AD，则延长 BE 交 AC 于 F，有 $AB=AF$ 成立.（3）“遇到中线加倍延”. 如图 1－3③，延长中线 AD 到 E，使 $DE=AD$，连 BE，有 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$，$AC=BE$ 等.（4）“作直角三角形斜边上的中线”. 如图 1－3④，作斜边 AB 的中线 CD，则 $AD=CD=BD$ 等.

学习方法与建议

本章虽然涉及的公理、定理和推论较多，但不应死记硬背，学习中要抓住其中的关键字词，学会自己总结知识间本质的区别和联系，结合图形去理解和掌握，并应注意亲历知识的形成过程，学会不断反思，总结解决问题的方法和规律，注意对知识的理解，对问题的观察，尝试用所学知识来分析和解决问题.

本章知识框架图

三角形

↓

公理

(SSS,SAS,ASA,全等三角形的对应边相等，对应角相等）

定理　　　　推论

（等边对等角，等角对等边，勾股定理及其逆定理，斜边、直角边，线段垂直平分线定理与逆定理，角平分线定理与逆定理，三角形的三条角平分线相交于一点，并且这一点到三条边的距离相等）

（AAS，三线合一，等边三角形的判定与性质，直角三角形中，如果有一个角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）

典型例题分析

例 1 如图1－4，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AB 上一点，E 是 AC 延长线上一点且 $BD=CE$，DE 交 BC 于 F.

求证：$DF=FE$.

分析 要证 $DF=FE$，可证 DF、FE 所在三角形全等，通过分析 $\triangle BDF$ 和 $\triangle FCE$ 不全等，故应考虑作辅助线构造全等三角形.

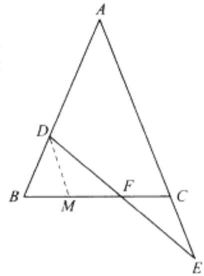


图 1－4

证明：过 D 作 $DM \parallel CE$ 交 BC 于点 M

$\therefore \angle DMB=\angle ACB$，$\angle E=\angle MDF$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle ACB$. $\therefore \angle DMB=\angle B$.

$\therefore BD=DM$. $\because BD=CE$，$\therefore DM=CE$.

$\therefore \triangle DMF \cong \triangle FCE$. $\therefore DF=FE$.

例 2 如图1－5，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC+CD$.

分析 要证 $AB=AC+CD$，结论是三条线段间的关系，可考虑延长 AC 到 E，使 $CE=CD$，则原结论可转化为证 $AB=AE$，只需 $\triangle ABD \cong \triangle AED$ 即可.

证明：延长 AC 到 E，使 $CE=CD$，连结 DE.

$\because CE=CD$，$\therefore \angle E=\angle CDE$.

又 $\because \angle ACB=\angle E+\angle CDE$，$\therefore \angle ACB=2\angle E$.

又 $\because \angle C=2\angle B$，$\therefore \angle B=\angle E$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$. $\therefore AB=AE$ 即 $AB=AC+CD$.

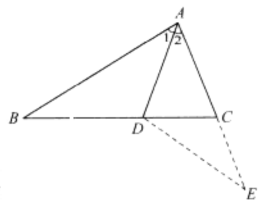


图 1－5

说明 证明一条长线段等于另两条线段之和的常用方法是延长一条短线段使其等于另一条短线段，再证明长线段等于延长的线段和，本题也可在 AB 上截取 $AE=AC$，再证 $EB=CD$，这种方法叫截长或补短法，在证明线段间的和(差)关系时常用到.

例 3 如图1－6，在 $\triangle MNP$ 中，$\angle MNP=45^\circ$，H 是高 MQ 和高 NR 的交点.

求证：$HN=PM$.

分析 要证 $HN=PM$，只须证 $\triangle PMQ \cong \triangle HNQ$，现已知 $\angle PQM=\angle HQN=90^\circ$，尚差两个条件，由 $\angle MNP=45^\circ$，$\angle MQN=90^\circ$，可证 $MQ=QN$，又由 $\angle 1+\angle P=90^\circ$，$\angle 2+\angle P=90^\circ$.

可证$\angle 1=\angle 2$，从而可得到结论.

证明：$\because MQ\perp PN$，$NR\perp PM$，

$\therefore \angle 2+\angle P=90^\circ$，$\angle 1+\angle P=90^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because \angle MNP=45^\circ$，$MQ\perp PN$，$\therefore MQ=NQ$.

又$\angle PQM=\angle HQN$，

$\therefore \triangle PQN\cong\triangle HQN$，$\therefore HN=PM$.

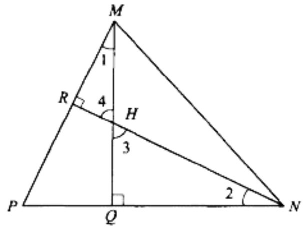


图 1-6

例 4 如图1-7，在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，AN平分$\angle BAC$，$AN\perp BN$于N，已知$AB=10$，$AC=16$，求MN的长.

分析 利用角平分线的性质，可考虑延长BN交AC于D，由$AN\perp BN$，$\angle 1=\angle 2$，可得$BN=DN$，$AB=AD$. 再由M、N分别为BC、BD的中点，得出MN为$\triangle BCD$的中位线，最后得出结论.

解 延长BN交AC于D.

$\because \angle 1=\angle 2$，$AN\perp BD$，

$\therefore AB=AD$，且$BN=DN$.

又$\because M$是BC的中点. $\therefore BM=MC$.

$$\therefore MN=\frac{1}{2}(AC-AD)=\frac{1}{2}(AC-AB)$$

$$=\frac{1}{2}(16-10)=3.$$

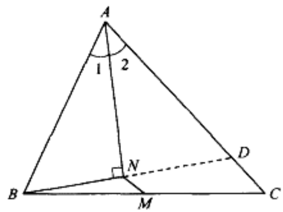


图 1-7

说明 当角平分线垂直于某一线段(该线段一端点在角的一边上)时，常构造等腰三角形.

例 5 如图1-8，一辆汽车在直线形公路AB上由A向B行驶，M、N分别是位于公路AB两侧的村庄.

(1) 设汽车行驶到公路AB上点P位置时，距离村庄M最近，行驶到点Q位置时，距离村庄N最近，请在公路AB上分别画出P、Q的位置(保留作图痕迹).

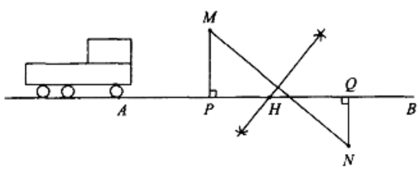


图 1-8

(2) 当汽车从A出发向B行驶时，在公路AB的哪一段上距离M、N两村庄都越来越近？在哪一段上距离村庄N越来越近，而离村庄M越来越远？(分

别用文字表述你的结果,不必证明).

(3) 在公路 AB 上是否存在这样一点 H,使汽车行驶到该点时,与村庄 M、N 的距离相等?如果存在,请在图中 AB 上画出这一点(保留画图痕迹,不必证明);如果不存在,请简要说明理由.

解析 (1) 过点 M 作 AB 的垂线垂足 P 即为所求.

过点 N 作 $NQ \perp AB$ 于 Q. Q 点即为所求.

(2) 当汽车从 A 向 B 行驶时,在 AP 这段路上,离两个村庄越来越近;在 PQ 上行驶时,离 M 越来越远,离村庄 N 越来越近.

(3) 点 H 存在,连接 MN,作 MN 的垂直平分线交 AB 于点 H,点 H 即为所求.

提示:本题文字阅读量大,关键是找出题中所包含的数学内容,然后用相应知识去解决.

一题多解

例 6 如图1-9,在$\triangle ABC$ 中,AD 平分$\angle BAC$,$AB + BD = AC$ 求$\angle B:\angle C$ 的值

分析 要让一线段等于其他两线段段的和或已知一线段等于其他两线的和时,通常考虑用"截长法"或"补短法".本题中,由于 AD 是$\angle BAC$ 的平分线,可利用角平分线的基本图 1-10 和图 1-11 来证明.

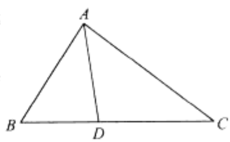


图 1-9

证法一:用补短法.

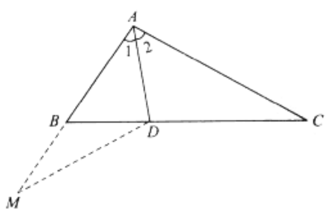


图 1-10

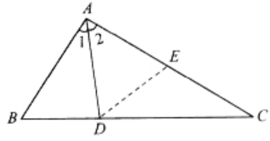


图 1-11

证明:延长 AB 到M,使 $BM = BD$.

连结 DM 则$\angle M = \angle BDM$,$AM = AC$.

$\because \angle 1 = \angle 2$,$AD = AD$,

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADC$.

$\therefore \angle M = \angle C$.

$\therefore \angle ABC = 2\angle M = 2\angle C$，即$\angle B : \angle C = 2:1$.

证法二：用截长法.

证明：在 AC 上截取 $AE = AB$，连结 DE.

$\because AB = AE, \angle 1 = \angle 2, AD = AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$.

$\therefore \angle B = \angle AED, BD = ED$.

又 $AC = AB + BD$，$\therefore EC = BD = ED$.

$\therefore \angle C = \angle EDC$.

$\because \angle AED = \angle C + \angle EDC = 2\angle C$,

$\therefore \angle B = 2\angle C$.

$\therefore \angle B : \angle C = 2:1$.

思维能力训练

A 组

一、选择题.

1. 如图 1－12，某同学把一块三角形的玻璃打碎成三块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的办法是（　　）

A. 带①去　　B. 带②去

C. 带③去　　D. 带①和②去

图 1－12

2. 如图 1－13，已知$\triangle ABC$中，$AQ = PQ$，$PR = PS$，$PR \perp AB$ 于 R，$PS \perp AC$ 于 S，则结论：

①$AS = AR$；②$QP // AR$；③$\triangle BRP \cong \triangle QSP$ 中（　　）

A. 全部正确　　B. 仅①和②正确　　C. 仅①正确　　D. 仅①和③正确

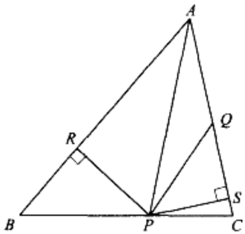


图 1-13

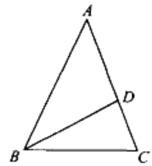


图 1-14

3. 已知，如图 1-14，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC=AD$，则$\angle A$ 的度数为(　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 36°　　D. 72°

4. 已知，如图 1-15，$\triangle ABC$ 是等边三角形，D 是 BC 边上任意一点，连结 AD 并作等边三角形 ADE，若 $DE\perp AB$，则$\dfrac{BD}{DC}$的值(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{3}{2}$

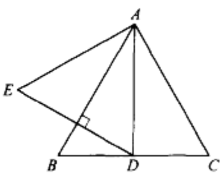


图 1-15

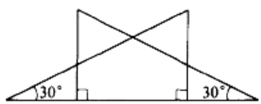


图 1-16

5. 将两个全等的有一个角为 30°的直角三角形拼成图 1-16，其中，两条直角边在同一直线上，则图中等腰三角形的个数是(　　)

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

6. 已知直角三角形两直角边的长分别是 3cm 和 4cm，则斜边上的中线等于(　　)

A. $\dfrac{5}{2}$cm　　B. $\dfrac{12}{5}$cm

C. 5cm　　D. 3cm

7. 如图 1-17，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，BE 与 CD 相交于点 O，则图中全等三角

形共有(　　)对

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 1

8. 一架长 2.5m 的梯子，斜立在一竖直的墙上，这时梯足距墙底端 0.7m，如果梯子的顶端沿墙下滑 0.4m，那么梯足将滑(　　)

A. 0.9m　　B. 1.5m

C. 0.5m　　D. 0.8m

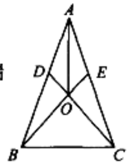


图 1-17

二、填空题.

1. 如图 1-18，在△ABC 中，AB 边的中垂线交 AC 于 E，若 $AE=2\sqrt{3}$，则 B、E 两点间的距离为______.

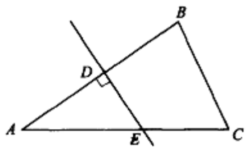


图 1-18

2. 如图 1-19，$\angle A=52^\circ$，O 是 AB、AC 的垂直平分线的交点，那么 $\angle OCB=$______.

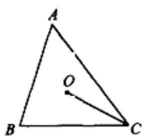


图 1-19

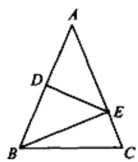


图 1-20

3. 如图 1-20，在△ABC 中，$AB=AC$，DE 是 AB 的中垂线，△BCE 的周长是 24，$BC=10$. 则 $AB=$______.

4. 如图 1-21，在 Rt△ABC 中，E 是斜边 AB 上的一点，把△ABC 沿 CE 折叠，点 A 与点 B 恰好重合，如果 $AC=4$cm，则 AB 长为______.

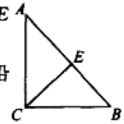


图 1-21

5. △ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=4$cm，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D 且 $BD:DC=5:3$，则 D 点到 AB 的距离为______ cm.

6. 如图 1－22，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BE=CD$，$BD=CF$，$\angle B=70^\circ$，则$\angle EDF=$______.

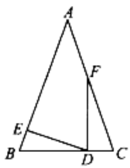


图 1－22

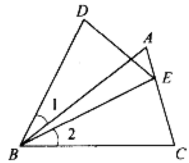


图 1－23

7. 如图 1－23，$AB=DB$，$\angle 1=\angle 2$，请你添加一个适当的条件，使$\triangle ABC\cong\triangle DBE$，则需添加的条件是______.

8. 在平静的湖面上，有一支红莲，高出水面 1 米，一阵风吹来，红莲吹到一边，花朵齐及水面，已知红莲移动的水平距离为 2 米，则这里的水深是______米.

三、作图题：

如图 1－24，两个班的学生分别在 M、N 两处参加植树劳动，现要在道路 AB、AC 的交叉区域内没一个茶水供应站 P，使 P 到两条道路的距离相等，且使 $PM=PN$. 有一位同学说："只要作一个角的平分线，一条线段的垂直平分线，这个茶水供应站的位置就确定了。"你说对吗？如果对，请在示意图上找出这个点的位置；如果不对，说明为什么.（不写作法，只保留作图痕迹）.

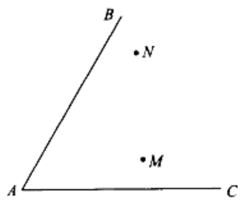


图 1－24

四、解答题.

1. 如图 1－25，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 9\text{cm}$，$\angle BAC = 120^\circ$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，AE 是 $\angle BAD$ 的平分线，$DF \parallel AB$ 交 AE 的延长线于 F，求 DF 的长.

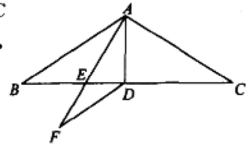


图 1－25

2. 如图 1－26，在 $\triangle MNP$ 中，$\angle MNP = 45^\circ$，H 是高 MQ 与 NR 的交点.

求证：$HN = PM$.

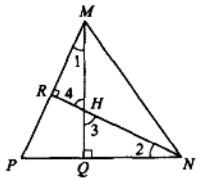


图 1－26

3. 已知：如图 1－27，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $\triangle AEF$ 是等边三角形.

求证：$CE = CF$.

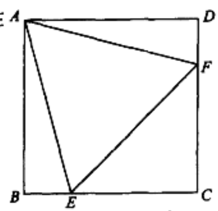


图 1－27

4. 如图 1－28，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，点 D 是 BC 上任意一点，$DE\perp AC$，垂足为 E，$BD=2$，$DE=3$.求 AB 的长.

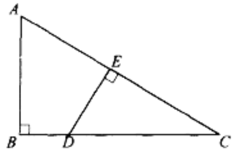


图 1－28

5. 如图 1－29，将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线折叠一次(折痕与折叠后得到的图形用虚线表示).将所有的全等三角形(包括实线、虚线在内)用符号写出来.

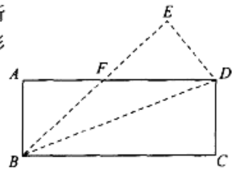


图 1－29

6. 如图 1－30，$AD=BC$，$AC=BD$.
求证：$\triangle AOD\cong\triangle BOC$.

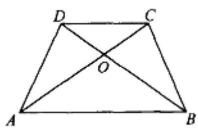


图 1－30

7. 如图 1－31，已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

求证：$\angle 5=\angle 6$.

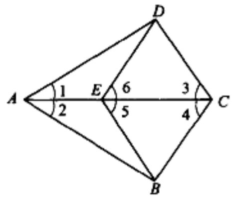


图 1－31

8. 如图 1－32，在等腰 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 是斜边 AB 上任一点，$AE\perp CD$ 于 E，$BF\perp CD$ 交 CD 的延长线于 F，$CH\perp AB$ 于 H，交 AE 于 G.

求证：$BD=CG$.

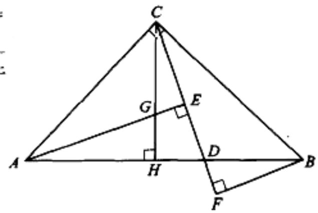


图 1－32

B 组

1. 阅读理解题：

九年级(1)班学生到野外活动，为测量一池塘两端 A、B 的距离，设计了如下几种方案：

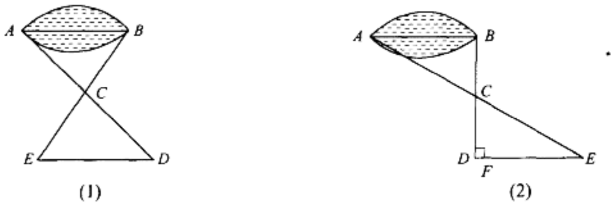


图 1－33

（Ⅰ）如图 1－33(1)，先在平地上取一个可直接到达 A、B 的点 C，再连结 AC，BC，并分别延长 AC 至 D，BC 至 E，使 $DC=AC$，$EC-BC$，最后测出 DE 的距离即为 AB 之长.

（Ⅱ）如图 1－33(2)，先过 B 点作 AB 的垂线 BF，再在 BF 上取 C、D 两点，使 $BC=CD$，接着过点 D 作 BD 的垂线 DE，交 AC 的延长线于 E，则测出了 DE 的长即为 A、B 的距离.

阅读后回答下列问题：

(1) 方案（Ⅰ）是否可行？______.理由是______.

(2) 方案（Ⅱ）是否可行？______.理由是______.

(3) 方案（Ⅱ）中作 $BF\perp AB$，$ED\perp BF$ 的是______，若仅满足 $\angle ABD=\angle BDE\neq 90°$，方案（Ⅱ）是否仍成立？______

2. 如图 1－34，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，AE 是 BC 边上的中线，过 C 作 $CF\perp AE$，垂足为 F，过 B 作 $BD\perp BC$ 交 CF 的延长线于 D.

(1) 求证：$AE=CD$；

(2) 若 $AC=12\text{cm}$，求 BD 的长.

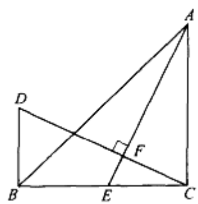


图 1－34