

# 工科数学理论 与方法的 复习与提高

洪潮兴 陈凤平 主编



华南理工大学出版社

# 工科数学理论与方法的 复习与提高

主编 洪潮兴 陈凤平  
参编 陈小莹 马东魁

华南理工大学出版社  
·广州·

## 内容简介

本书是作者根据多年的教学经验,并按照 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写的复习指导书。全书共分高等数学、线性代数以及概率论与数理统计三部分。内容涵盖了大学工科数学本科教学的基本要求。本书不仅是考生备考的复习指导书,也是广大在读本科生课外学习数学的指导书。

## 图书在版编目(CIP)数据

工科数学理论与方法的复习与提高/洪潮兴,陈凤平主编. —广州:华南理工大学出版社, 2002.7

ISBN 7-5623-1838-7

I. 工… II. ①洪…②陈… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 039750 号

总发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

发行电话: 020-87113487 87111048 (传真)

E-mail: scut202@scut.edu.cn

<http://www2.scut.edu.cn/press>

责任编辑: 詹志青

印刷者: 中山市新华印刷厂有限公司

开本: 850×1168 1/32 印张: 26 字数: 700 千

版次: 2002 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1~4000 册

定价: 38.00 元

版权所有 盗版必究

# 前 言

我们在长期大学数学教学(尤其是课外辅导环节)的实践中,以及从 1978 年开始至今的考研教学复习辅导班的教学实践中,积累了一些经验,也总结了一些体会,因而编成本书。

本书参照 2002 年教育部修订的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲进行编写。我们编写的指导思想不在于帮考生押题,而在于帮考生复习最基本的内容,掌握最基本的运算以及一些解(证)题的基本技巧,从而全面加深对相关内容的理解。20 多年的考试实践也表明以这样的指导思想来进行备考复习是十分有益的。

本书内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分,分为 19 讲,每讲的内容没有统一的格式,而是根据内容需要和特点有区别地用不同格式来实现。我们是在读者对相应的本科教材已基本掌握的前提下来编写本书的,因此,本书直接引用相当多的教材内容。

参加本书编写的有洪潮兴、陈凤平、陈小莹、马东魁老师。由洪潮兴、陈凤平任主编。

我们希望得到同行的不吝赐教,也希望得到广大读者的意见和建议。

编 者

2002 年 5 月于华南理工大学

# 目 录

## 第一编 高等数学

|                                                       |      |
|-------------------------------------------------------|------|
| 1 极限与连续 .....                                         | (3)  |
| 1.1 用极限定义验算极限 .....                                   | (3)  |
| 1.2 定式的极限 .....                                       | (6)  |
| 1.2.1 连续函数的极限 .....                                   | (6)  |
| 1.2.2 极限的四则运算法则 .....                                 | (6)  |
| 1.2.3 复合函数求极限法则 .....                                 | (7)  |
| 1.2.4 无穷小与无穷大的关系 .....                                | (7)  |
| 1.2.5 无穷小的基本性质 .....                                  | (7)  |
| 1.3 计算未定式极限的直接方法 .....                                | (8)  |
| 1.3.1 分式有理式的 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型 .....       | (8)  |
| 1.3.2 含根式的 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型 .....         | (8)  |
| 1.3.3 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 型未定式 ..... | (9)  |
| 1.3.4 含三角函数、反三角函数的 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型 ..... | (11) |
| 1.3.5 幂指数函数 $[1^\infty]$ 型未定式 .....                   | (12) |
| 1.3.6 含对数式的 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型 .....        | (13) |
| 1.3.7 含指数式的 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型 .....        | (14) |
| 1.3.8 等价无穷小因式替换 .....                                 | (15) |

---

|       |                |      |
|-------|----------------|------|
| 1.4   | 洛必达法则          | (17) |
| 1.5   | 极限存在的准则        | (21) |
| 1.5.1 | 准则 I (夹逼准则)    | (21) |
| 1.5.2 | 准则 II          | (23) |
| 1.6   | 求极限的其他方法举例     | (26) |
| 1.6.1 | 导数定义           | (26) |
| 1.6.2 | 辅以拉格朗日中值定理     | (27) |
| 1.6.3 | 带皮亚诺余项的泰勒展开式   | (28) |
| 1.6.4 | 借助定积分定义        | (29) |
| 1.6.5 | 利用级数的性质        | (30) |
| 1.7   | 关于函数的连续性       | (31) |
|       | 习题 1           | (38) |
| 2     | 一元函数微分法        | (43) |
| 2.1   | 导数的概念          | (43) |
| 2.2   | 初等显函数的微分法      | (48) |
| 2.2.1 | 基本导数公式表        | (48) |
| 2.2.2 | 求导运算法则         | (48) |
| 2.3   | 求导方法的拓广        | (52) |
| 2.3.1 | 高阶导数           | (52) |
| 2.3.2 | 隐函数的导数         | (56) |
| 2.3.3 | 由参数方程所确定的函数的导数 | (58) |
| 2.4   | 微分             | (61) |
| 2.4.1 | 微分的概念          | (61) |
| 2.4.2 | 微分的意义          | (62) |
| 2.4.3 | 弧微分            | (65) |
|       | 习题 2           | (66) |
| 3     | 微分中值定理         | (71) |
| 3.1   | 预备定理(费马定理)     | (71) |

---

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 3.2 拉格朗日中值定理          | (72)  |
| 3.2.1 用于证明恒等式         | (73)  |
| 3.2.2 用于证明不等式         | (74)  |
| 3.2.3 应用导数研究函数        | (77)  |
| 3.2.4 各种含介值的等式与不等式的证明 | (79)  |
| 3.3 泰勒中值定理的用法         | (85)  |
| 3.3.1 选择已知条件最多的点作为展开点 | (85)  |
| 3.3.2 选择在问题所要讨论的点处展开  | (87)  |
| 3.3.3 在极值点处展开         | (89)  |
| 3.3.4 中点的特别作用         | (91)  |
| 习题 3                  | (94)  |
| 4 应用导数研究函数            | (96)  |
| 4.1 函数的单调性            | (96)  |
| 4.2 函数的极值与最值          | (102) |
| 4.3 导数的几何意义           | (106) |
| 习题 4                  | (110) |
| 5 不定积分                | (115) |
| 5.1 不定积分与原函数的概念       | (115) |
| 5.2 积分法               | (117) |
| 5.2.1 分项积分法           | (118) |
| 5.2.2 第一换元法           | (120) |
| 5.2.3 第二换元法           | (133) |
| 5.2.4 分部积分法           | (139) |
| 5.2.5 非常规积分举例         | (145) |
| 习题 5                  | (147) |
| 6 定积分                 | (150) |
| 6.1 定积分的概念            | (150) |
| 6.2 变上限积分             | (153) |

---

|       |                      |       |
|-------|----------------------|-------|
| 6.3   | 定积分的计算法              | (158) |
| 6.3.1 | 直接计算法                | (158) |
| 6.3.2 | 间接计算法                | (165) |
| 6.4   | 定积分证题选               | (173) |
|       | 习题 6                 | (183) |
| 7     | 向量代数与空间解析几何          | (193) |
| 7.1   | 向量代数的基本知识            | (193) |
| 7.2   | 空间平面与空间直线            | (198) |
| 7.2.1 | 基本方程                 | (198) |
| 7.2.2 | 相互关系                 | (200) |
| 7.2.3 | 过直线作平面               | (202) |
| 7.3   | 空间的曲面与曲线             | (206) |
| 7.3.1 | 空间曲面方程               | (206) |
| 7.3.2 | 空间曲线                 | (211) |
|       | 习题 7                 | (214) |
| 8     | 多元函数微分法及其应用          | (216) |
| 8.1   | 多元函数的极限与连续           | (216) |
| 8.1.1 | 二元函数的极限的定义           | (216) |
| 8.1.2 | 二元函数的连续性             | (218) |
| 8.2   | 偏导数与全微分              | (220) |
| 8.2.1 | 偏导数                  | (220) |
| 8.2.2 | 高阶偏导数                | (222) |
| 8.2.3 | 全微分                  | (224) |
| 8.3   | 多元复合函数求导法则           | (227) |
| 8.3.1 | $m \times n$ 复合的求导法则 | (227) |
| 8.3.2 | 一阶全微分形式的不变性          | (230) |
| 8.3.3 | 复合函数的二阶偏导数           | (232) |
| 8.4   | 隐函数的导数               | (234) |

---

|       |                         |       |
|-------|-------------------------|-------|
| 8.4.1 | 由一个多元方程确定的隐函数 .....     | (235) |
| 8.4.2 | 方程组所确定的隐函数的导数 .....     | (239) |
| 8.5   | 多元函数的极值 .....           | (241) |
| 8.5.1 | 无条件极值 .....             | (241) |
| 8.5.2 | 条件极值 .....              | (243) |
| 8.6   | 多元函数微分法的其他应用 .....      | (249) |
| 8.6.1 | 方向导数与梯度 .....           | (249) |
| 8.6.2 | 空间曲线的切线 .....           | (253) |
| 8.6.3 | 空间曲面的法线与切平面 .....       | (254) |
| 8.6.4 | 二元函数的二阶泰勒公式 .....       | (256) |
| 习题 8  | .....                   | (257) |
| 9     | 多元函数积分学 .....           | (262) |
| 9.1   | 多元数量值函数积分的概念 .....      | (262) |
| 9.2   | 二重积分算法 .....            | (263) |
| 9.2.1 | 直角坐标下的二重积分计算方法 .....    | (264) |
| 9.2.2 | 积分顺序的选择 .....           | (266) |
| 9.2.3 | 极坐标下的二重积分算法 .....       | (270) |
| 9.2.4 | 对称性的运用 .....            | (274) |
| 9.2.5 | 二重积分的换元法 .....          | (278) |
| 9.3   | 三重积分算法 .....            | (281) |
| 9.3.1 | 投影法 .....               | (281) |
| 9.3.2 | 截面法 .....               | (286) |
| 9.3.3 | 柱面坐标下的三重积分算法 .....      | (288) |
| 9.3.4 | 球面坐标下的三重积分算法 .....      | (290) |
| 9.4   | 对弧长的曲线积分(第一型曲线积分) ..... | (292) |
| 9.4.1 | 对弧长的平面曲线积分的算法 .....     | (292) |
| 9.4.2 | 对弧长的空间曲线积分 .....        | (295) |
| 9.5   | 对面积的曲面积分的算法 .....       | (295) |

---

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| 9.6 第二型曲线积分(对坐标的曲线积分) .....    | (299) |
| 9.6.1 第二型曲线积分的算法 .....         | (299) |
| 9.6.2 格林公式及其应用 .....           | (302) |
| 9.6.3 两类曲线积分的关系 .....          | (311) |
| 9.6.4 二元全微分求积问题 .....          | (312) |
| 9.7 第二型曲面积分(对坐标的曲面积分) .....    | (315) |
| 9.8 高斯公式 .....                 | (319) |
| 9.8.1 高斯公式 .....               | (319) |
| 9.8.2 两类曲面积分的联系 .....          | (322) |
| 9.9 斯托克斯公式 .....               | (325) |
| 9.9.1 斯托克斯公式及应用 .....          | (325) |
| 9.9.2 向量场的旋度 .....             | (328) |
| 习题9 .....                      | (329) |
| 10 无穷级数 .....                  | (335) |
| 10.1 判定数项级数收敛的各种方法 .....       | (335) |
| 10.1.1 利用级数收敛的定义判定级数的敛散性 ..... | (335) |
| 10.1.2 级数收敛的必要条件 .....         | (339) |
| 10.1.3 正项级数收敛的充分必要条件 .....     | (340) |
| 10.1.4 正项级数的比较判别法 .....        | (343) |
| 10.1.5 比值判别法 .....             | (346) |
| 10.1.6 正项级数的根值判别法 .....        | (347) |
| 10.1.7 任意项级数的判别法 .....         | (351) |
| 10.1.8 泰勒公式在级数判别中的作用 .....     | (357) |
| 10.2 幂级数 .....                 | (359) |
| 10.2.1 函数项级数的一般概念 .....        | (359) |
| 10.2.2 幂级数的收敛性 .....           | (360) |
| 10.2.3 特殊幂级数的求和法 .....         | (366) |
| 10.3 将函数展开为幂级数 .....           | (370) |

|                                                       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|
| 10.4 傅里叶级数·····                                       | (376) |
| 习题 10 ·····                                           | (383) |
| 11 微分方程·····                                          | (388) |
| 11.1 高等数学各单元的微分方程·····                                | (388) |
| 11.1.1 求解函数方程·····                                    | (388) |
| 11.1.2 导数·····                                        | (390) |
| 11.1.3 导数的几何物理意义·····                                 | (391) |
| 11.1.4 曲率公式·····                                      | (395) |
| 11.1.5 积分方程·····                                      | (397) |
| 11.1.6 定积分应用·····                                     | (400) |
| 11.1.7 化偏微分方程为常微分方程·····                              | (401) |
| 11.1.8 二元函数全微分求积问题·····                               | (404) |
| 11.1.9 级数中的微分方程·····                                  | (406) |
| 11.2 微分方程的一些补充知识·····                                 | (408) |
| 11.2.1 高阶、常系数、线性齐次微分方程的通解·····                        | (408) |
| 11.2.2 一些常见类型的二阶、常系数、线性非齐次<br>微分方程的特解 $y^*$ 的求法 ····· | (409) |
| 11.2.3 欧拉方程·····                                      | (411) |
| 11.2.4 二阶微分方程的常数变易法·····                              | (412) |
| 11.2.5 二元一阶线性常系数方程组·····                              | (416) |
| 习题 11 ·····                                           | (422) |

## 第二编 线性代数

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 12 矩阵的基本运算·····             | (431) |
| 12.1 矩阵的乘法·····             | (431) |
| 12.1.1 基本内容·····            | (431) |
| 12.1.2 善于用矩阵乘法表示各项基本内容····· | (432) |
| 12.2 矩阵的初等变换·····           | (440) |

---

|        |                  |       |
|--------|------------------|-------|
| 12.2.1 | 基本内容             | (440) |
| 12.2.2 | 用于计算行列式的性质       | (442) |
| 12.2.3 | 求逆矩              | (447) |
| 12.2.4 | 求解矩阵方程           | (450) |
| 12.2.5 | 有关向量组的计算         | (454) |
| 12.2.6 | 解线性方程组           | (456) |
| 12.2.7 | 向量空间中的基本计算       | (461) |
| 13     | 线性代数中的几个重要概念     | (465) |
| 13.1   | 向量组的线性相关与线性无关    | (465) |
| 13.1.1 | 一个向量组间各向量的基本关系   | (466) |
| 13.1.2 | 两个向量组之间的线性关系     | (470) |
| 13.2   | 秩                | (474) |
| 13.2.1 | 有关秩的概念           | (474) |
| 13.2.2 | 有关秩的性质           | (475) |
| 13.3   | 伴随矩阵 $A^*$ 的一些性质 | (478) |
| 13.4   | 正交向量组与正交矩阵       | (482) |
| 13.4.1 | 向量的内积与两向量正交      | (482) |
| 13.4.2 | 正交向量组            | (483) |
| 13.4.3 | 正交向量组与正交矩阵的性质    | (484) |
| 13.4.4 | 施密特正交化程序         | (485) |
| 14     | 矩阵的特征值与特征向量      | (489) |
| 14.1   | 矩阵的特征值与特征向量      | (489) |
| 14.1.1 | 基本概念与求法          | (489) |
| 14.1.2 | 特征值、特征向量的性质      | (492) |
| 14.2   | 相似矩阵             | (498) |
| 14.2.1 | 相似矩阵的概念与性质       | (498) |
| 14.2.2 | 矩阵与对角形相似         | (500) |
| 14.2.3 | 实对称矩阵的对角化        | (506) |

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 14.3 二次型        | (511) |
| 14.3.1 化二次型为标准形 | (511) |
| 14.3.2 二次型的正定性  | (519) |
| 习题 12,13,14     | (526) |

### 第三编 概率论与数理统计

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 15 事件及其概率                | (549) |
| 15.1 基本概念                | (549) |
| 15.1.1 随机试验与随机事件         | (549) |
| 15.1.2 随机事件之间的关系与运算      | (550) |
| 15.1.3 事件的运算规律           | (551) |
| 15.2 古典概型                | (553) |
| 15.2.1 摸球问题              | (553) |
| 15.2.2 分房问题              | (557) |
| 15.2.3 取数问题              | (561) |
| 15.3 几何概型                | (562) |
| 16 概率的性质和概率公式            | (566) |
| 16.1 概率公式                | (566) |
| 16.1.1 概率公理及加法公式         | (566) |
| 16.1.2 条件概率与乘法公式         | (567) |
| 16.1.3 事件的独立性            | (567) |
| 16.1.4 全概率公式和逆概率公式       | (568) |
| 16.2 概率公式运用举例            | (568) |
| 16.3 重复独立试验与伯努利概型        | (576) |
| 习题 15,16                 | (579) |
| 17 一维随机变量                | (585) |
| 17.1 随机变量的分布函数           | (585) |
| 17.1.1 分布函数 $F(x)$ 的基本性质 | (585) |

|        |                          |       |
|--------|--------------------------|-------|
| 17.1.2 | 分布函数和概率计算·····           | (587) |
| 17.2   | 离散型随机变量·····             | (589) |
| 17.2.1 | 离散型随机变量的分布律(列)·····      | (589) |
| 17.2.2 | 常见分布·····                | (590) |
| 17.2.3 | 离散型随机变量函数的分布·····        | (595) |
| 17.2.4 | 离散型随机变量的数字特征·····        | (596) |
| 17.3   | 连续型随机变量·····             | (600) |
| 17.3.1 | 概率密度函数·····              | (600) |
| 17.3.2 | 常用分布·····                | (602) |
| 17.3.3 | 连续型随机变量的数字特征·····        | (609) |
| 17.4   | 连续型随机变量的函数的分布·····       | (614) |
| 18     | 多维随机变量·····              | (619) |
| 18.1   | 二维随机变量的联合分布与边缘分布·····    | (619) |
| 18.1.1 | 二维随机变量及其联合分布·····        | (619) |
| 18.1.2 | 离散型二维随机变量的分布律·····       | (620) |
| 18.1.3 | 二维连续型随机变量·····           | (622) |
| 18.2   | 随机变量的独立性·····            | (627) |
| 18.2.1 | 随机变量的独立性·····            | (627) |
| 18.2.2 | 条件分布·····                | (627) |
| 18.3   | 常见分布·····                | (631) |
| 18.3.1 | 均匀分布·····                | (631) |
| 18.3.2 | 二维正态分布·····              | (632) |
| 18.4   | 二维随机变量的数字特征·····         | (633) |
| 18.4.1 | 数学期望与方差·····             | (633) |
| 18.4.2 | 协方差和相关系数·····            | (634) |
| 18.5   | 二维随机变量函数的分布·····         | (638) |
| 18.5.1 | 二维离散型的随机变量的函数的分布·····    | (638) |
| 18.5.2 | 求 $Z = X + Y$ 的概率密度····· | (640) |

---

|           |                                            |       |
|-----------|--------------------------------------------|-------|
| 18.5.3    | 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数( $X, Y$ 独立) ... | (640) |
| 18.5.4    | 求 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数( $X, Y$ 独立) ... | (641) |
| 18.5.5    | 商的分布 .....                                 | (641) |
| 18.6      | 大数定律与极限定理 .....                            | (643) |
| 18.6.1    | 切比雪夫不等式 .....                              | (643) |
| 18.6.2    | 大数定律 .....                                 | (644) |
| 18.6.3    | 极限定理 .....                                 | (646) |
| 习题 17, 18 | .....                                      | (648) |
| 19        | 数理统计初步 .....                               | (658) |
| 19.1      | 数理统计的基本概念 .....                            | (658) |
| 19.1.1    | 总体、样本 .....                                | (658) |
| 19.1.2    | 统计量及其分布 .....                              | (659) |
| 19.1.3    | 一个正态总体的抽样分布 .....                          | (665) |
| 19.2      | 参数估计 .....                                 | (670) |
| 19.2.1    | 参数的点估计 .....                               | (670) |
| 19.2.2    | 参数的区间估计 .....                              | (678) |
| 19.3      | 假设检验 .....                                 | (682) |
| 19.3.1    | 基本思想 .....                                 | (682) |
| 19.3.2    | 一个正态总体的均值与方差检验 .....                       | (685) |
| 19.3.3    | 两个正态总体的均值差与方差比的检验 .....                    | (689) |
| 习题 19     | .....                                      | (692) |
| 附录        | 习题解答与提示 .....                              | (697) |
| 习题 1      | .....                                      | (697) |
| 习题 2      | .....                                      | (705) |
| 习题 3      | .....                                      | (712) |
| 习题 4      | .....                                      | (717) |
| 习题 5      | .....                                      | (724) |
| 习题 6      | .....                                      | (730) |

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 习题 7 .....          | (749) |
| 习题 8 .....          | (751) |
| 习题 9 .....          | (759) |
| 习题 10 .....         | (772) |
| 习题 11 .....         | (783) |
| 习题 12, 13, 14 ..... | (800) |
| 习题 15, 16 .....     | (811) |
| 习题 17, 18 .....     | (811) |
| 习题 19 .....         | (815) |

# 第一编

# 高等数学