普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析教程

（下册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

（下册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等院校“十五”国家级规划教材，是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动而成的，原书在全国同类教材中有非常积极的影响。

本书分上、下两册。下册内容包括：反常积分，Fourier分析，多变量函数的连续性，多变量函数的微分学，隐函数和隐映射定理，曲面的表示与逼近，多重积分，曲线积分，曲面积分，场的数学，含参变量积分等。

本书可供综合性大学和理工科院校数学系作为教材使用，也可作为其他科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程．下/常庚哲，史济怀编．—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011921-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①常…②史…　Ⅲ.数学分析—高等学校—教材　Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第012683号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年6月第1版
印　　张	25.75	印　　次	2003年6月第1次印刷
字　　数	490 000	定　　价	26.90元

策划编辑　王　瑜
加工编辑　高尚华　文小西
封面设计　于　涛
责任绘图　朱　静
版式设计　马静如
责任校对　存　怡
责任印制　杨　明

目　　录

第 11 章　反常积分 ………… 1

§ 11.1　非负函数无穷积分的收敛判别法 ………… 1

§ 11.2　无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法 ………… 5

§ 11.3　瑕积分的收敛判别法 ………… 11

第 12 章　Fourier 分析 ………… 20

§ 12.1　周期函数的 Fourier 级数 ………… 20

§ 12.2　Fourier 级数的收敛定理 ………… 28

§ 12.3　Fourier 级数的 Cesàro 求和 ………… 40

§ 12.4　平方平均逼近 ………… 47

§ 12.5　Fourier 积分和 Fourier 变换 ………… 57

第 13 章　多变量函数的连续性 ………… 69

§ 13.1　n 维 Euclid 空间 ………… 69

§ 13.2　$\mathbf{R}^n$ 中点列的极限 ………… 74

§ 13.3　$\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集 ………… 77

§ 13.4　列紧集和紧致集 ………… 84

§ 13.5　集合的连通性 ………… 87

§ 13.6　多变量函数的极限 ………… 90

§ 13.7　多变量连续函数 ………… 95

§ 13.8　连续映射 ………… 102

第 14 章　多变量函数的微分学 ………… 107

§ 14.1　方向导数和偏导数 ………… 107

§ 14.2　多变量函数的微分 ………… 111

§ 14.3　映射的微分 ………… 116

§ 14.4　复合求导 ………… 119

§ 14.5　拟微分平均值定理 ………… 124

§ 14.6　隐函数定理 ………… 127

§ 14.7　隐映射定理 ………… 135

§ 14.8　逆映射定理 ………… 143

§ 14.9　高阶偏导数 ………… 148

§ 14.10 Taylor 公式 ………… 154
§ 14.11 极值 ………… 158
§ 14.12 条件极值 ………… 167
第 15 章 曲面的表示与逼近 ………… 177
§ 15.1 曲面的显式方程和隐式方程 ………… 177
§ 15.2 曲面的参数方程 ………… 182
§ 15.3 凸曲面 ………… 188
§ 15.4 Bernstein – Bézier 曲面 ………… 192
第 16 章 多重积分 ………… 197
§ 16.1 矩形区域上的积分 ………… 198
§ 16.2 可积函数类 ………… 204
§ 16.3 矩形区域上二重积分的计算 ………… 212
§ 16.4 有界集合上的二重积分 ………… 216
§ 16.5 有界集合上积分的计算 ………… 220
§ 16.6 二重积分换元 ………… 226
§ 16.7 三重积分 ………… 235
§ 16.8 n 重积分 ………… 245
§ 16.9 重积分物理应用举例 ………… 253
第 17 章 曲线积分 ………… 258
§ 17.1 第一型曲线积分 ………… 258
§ 17.2 第二型曲线积分 ………… 262
§ 17.3 Green 公式 ………… 269
§ 17.4 等周问题 ………… 275
第 18 章 曲面积分 ………… 279
§ 18.1 曲面的面积 ………… 279
§ 18.2 第一型曲面积分 ………… 286
§ 18.3 第二型曲面积分 ………… 289
§ 18.4 Gauss 公式和 Stokes 公式 ………… 297
§ 18.5 微分形式和外微分运算 ………… 305
第 19 章 场的数学 ………… 311
§ 19.1 数量场的梯度 ………… 311
§ 19.2 向量场的散度 ………… 313
§ 19.3 向量场的旋度 ………… 319
§ 19.4 有势场和势函数 ………… 322
§ 19.5 正交曲线坐标系中梯度、散度和旋度的表达式 ………… 328

第 20 章　含参变量积分 …… 335
§ 20.1　含参变量的常义积分 …… 335
§ 20.2　含参变量反常积分的一致收敛 …… 342
§ 20.3　含参变量反常积分的性质 …… 351
§ 20.4　Γ 函数和 B 函数 …… 364
§ 20.5　n 维球的体积和面积 …… 377
附录　问题的解答与提示 …… 380

第11章 反常积分

在§7.7中，我们介绍过两种反常积分——无穷积分和瑕积分，但对如何判断这两种积分的敛散，没有作进一步的讨论. 学过无穷级数之后，再来学习反常积分的收敛判别法，就会发现两者在许多方面基本上是一样的. 本章的目的是让读者学会判断反常积分敛散的方法，为讨论含参变量的反常积分作好准备.

§11.1 非负函数无穷积分的收敛判别法

在§7.7中定义过，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，是指 f 在任意有限区间 $[a,A]$ 中可积，而且

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

有有限的极限. 如果记

$$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$

那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，就是指 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 有有限的极限. 这里 $F(A)$ 就相当于无穷级数中的部分和.

在下面的讨论中，我们总假定 f 在任意有限区间 $[a,A]$ $(A>a)$ 中可积，不再一一说明.

设 $f\geqslant 0$，则积分 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 是上限 A 的增函数(这相当于正项级数中的部分和)，因而 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 对 A 而言有界. 这样我们就得到

定理 11.1 若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

根据这个定理，就能得到类似于正项级数中的比较判别法.

定理 11.2 设对充分大的 x，函数 f 和 g 满足不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

那么

1° 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2° 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样. □

设 $a>0$，则当 $p>1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛；$p \leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散，所以经常拿 f 和函数 $\frac{1}{x^p}$ 作比较，正像在正项级数中经常拿 a_n 和 $\frac{1}{n^\alpha}$ 作比较一样.

例 1 设 $a>0$，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ 是收敛的. 这是因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \leqslant \frac{1}{x^{4/3}},$$

而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$ 收敛，故由比较判别法知道原积分收敛. □

定理 11.2 的极限形式更便于应用.

定理 11.3 设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

那么

1° 当 $0<l<+\infty$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同时敛散；

2° 当 $l=0$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

3° 当 $l=+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样. □

例 2 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2-1}\mathrm{d}x$ 是收敛的，因为当 $x \to +\infty$ 时，

$$\frac{x^2}{x^4-x^2-1} \sim \frac{1}{x^2},$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 是收敛的，由定理 11.3，原积分收敛. □

例 3 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　由于当 $x \to +\infty$ 时，

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^3},$$

所以原积分收敛. □

设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是一收敛的无穷积分，这里 f 不一定是非负的，$\{A_n\}(A_1 = a)$ 是任一递增趋于 $+\infty$ 的数列，那么

$$\int_a^{A_{N+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

让 $N \to \infty$，即得

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这就是说，一个收敛的无穷积分总可以写成上式右端那样的级数. 反过来，如果存在某个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$，使得(1)右端的级数收敛，能否断言 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛呢？答案是否定的. 例如积分 $\int_0^{+\infty} \cos x\mathrm{d}x$ 是发散的，这是因为

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \cos x\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\sin A$$

不存在. 但若取 $A_n = n\pi$，它是一个趋于 $+\infty$ 的递增数列，这时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}\cos x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\mathrm{d}x = 0$$

却是收敛的.

但若 f 是非负的，那么答案是肯定的.

定理 11.4　设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1 = a)$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证明　因为 $\{A_n\}$ 是趋于 $+\infty$ 的递增数列，对于任意给定的 $A > 0$，总能找到正整数 N，使得 $A_N \leqslant A < A_{N+1}$. 由于 $f(x) \geqslant 0$，所以

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

从(2)收敛，即知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而且(3)成立． □

下面是应用这个定理的一个例子．

例 4 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛．

证明 因为被积函数是非负的，只要证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} \tag{4}$$

收敛即可．因为 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数，故有

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} &\leqslant (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x} = 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x} \\ &= 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+(1+n^6)\sin^2 x} \\ &\leqslant \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(n^3\tan x)}{1+(n^3\tan x)^2} \\ &= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \frac{2\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

由此即知级数(4)收敛，因而原积分收敛． □

从无穷级数收敛的定义立刻可以得到，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．自然联想到，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是不是 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$？这是不对的．例 4 就是这样一个例子．这里

$$f(x) = \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$$

是$(0,+\infty)$上的正值连续函数，虽然 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但当 $x\to+\infty$ 时，不仅 $f(x)$不趋于 0，而且是无界的，因为当 $x=n\pi$ 时，$f(n\pi)=n\pi$．

练习题 11.1

1．判断下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty} \frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$； (4) $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^p}$；

(5) $\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x, p>0$.

2. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 存在，那么必有 $b=0$.

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\cos^2 x}\ (\alpha>4)$ 收敛.

4. 证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I 的充分必要条件是，对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛于 I.

5. 设 a，$b>0$，证明

$$\int_0^{+\infty} f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

利用这公式计算积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$，其中 $a,b>0$.

$\left(\text{已知} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\right)$

---

§ 11.2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

和无穷级数一样，无穷积分也有相应的 **Cauchy 收敛原理**. 回忆一下，在练习题 2.5 的第 9 题中，我们已经证明过：$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在一个正数 A，只要 A'，$A''>A$，便有

$$|F(A')-F(A'')|<\varepsilon.$$

利用这个事实，立刻可得

定理 11.5（**Cauchy 收敛原理**）　积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 A'，$A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

这个定理说明，要想使反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，必须而且只需在充分远的、不管多长的区间上，积分值可以任意小.

根据定理 11.5，容易证明

定理 11.6 如果积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛,那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

证明 由于$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛,故对$\varepsilon>0$,存在$A_0$,当$A'$、$A''>A_0$时,就有$\int_{A'}^{A''}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$,所以

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \quad \square$$

仿照无穷级数中的说法,如果积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛,就说积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛**.

定理 11.6 断言,绝对收敛的积分一定收敛. 和无穷级数的情形一样,定理 11.6 的逆定理是不成立的(见下面的例 1).

如果积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,而$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散,就称积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**条件收敛**.

利用 Cauchy 收敛原理,可以得到类似于无穷级数中的 Dirichlet 和 Abel 判别法,但还需要一个类似于 Abel 引理的结果. 这就是下面的

定理 11.7(第二积分平均值定理) 若函数f在$[a,b]$上可积,g在$[a,b]$上非负且递减,则必存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 因为f在$[a,b]$上可积,g是$[a,b]$上的非负减函数,也是可积函数,因而fg在$[a,b]$上可积. 用分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

细分区间$[a,b]$,fg在$[a,b]$上的积分可写为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{1}$$

如果用K表示$|f|$在$[a,b]$上的一个上界,ω_i表示g在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,那么(1)右端第二个和数的绝对值不超过

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|\mathrm{d}x\leqslant K\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i.$$

因为 g 在$[a,b]$上可积，所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

于是(1)可写成

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

若记 $b_i = g(x_{i-1})$，$i=1,\cdots,n$，则因 g 是非负递减的，故有

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0, \tag{3}$$

再记 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$,那么 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = \int_a^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$. 由于 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的连续函数,它在$[a,b]$上的最大值和最小值分别记为 M 和 m,那么

$$m\leqslant S_k = \int_a^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_k)\leqslant M, k = 1,\cdots,n, \tag{4}$$

应用 Abel 的分部求和公式(引理 9.2)，(2)右端的和式可写成

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

利用(3)和(4)即得

$$mg(a) = mb_1\leqslant\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Mb_1 = Mg(a).$$

在上式中命 $\|\pi\|\to 0$，由(2)即得

$$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Mg(a).$$

由 F 的连续性，根据连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.\quad\square$$

如果 g 在$[a,b]$上非负且递增，则可用同样的方法证明，存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 g 在$[a,b]$中不保持定号，这时有

定理 11.8（推广的第二积分平均值定理） 设 f 在$[a,b]$中可积，g 在$[a,b]$中单调，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证明　不妨设 g 在$[a,b]$上递减，则对任意 $x\in[a,b]$，均有 $g(x)\geqslant g(b)$.

命
$$\varphi(x)=g(x)-g(b),$$
那么 φ 在$[a,b]$上非负且递减. 由定理 11.7 知道，存在 $\xi\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(a)\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x,$$
即
$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,\mathrm{d}x=(g(a)-g(b))\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
由此即得(5).

如果 g 在$[a,b]$上递增，则可命 $\psi(x)=g(b)-g(x)$，仍用定理 11.7 可得(5). □

第二积分平均值定理的好处是把两个函数乘积的积分化为一个函数的积分来处理. 下面的 Dirichlet 和 Abel 判别法正是利用了这样一个好处.

定理 11.9（Dirichlet 判别法） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在$(a,+\infty)$上有界；

2° g 在$[a,+\infty)$上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

那么积分
$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
收敛.

证明 应用推广的第二积分平均中值定理，有
$$\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(A')\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+g(A'')\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x,$$
其中 $\xi\in[A',A'']$. 由此可得
$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|+|g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|.\tag{6}$$
由条件 1°，存在常数 M，使得
$$|F(A)|=\left|\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M,A\in(a,+\infty).$$
因而
$$\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{A'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M,$$
$$\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M.$$

由条件 2°，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>0$，当 A'，$A''>A_0$ 时，有

$$|g(A')|<\varepsilon,\quad |g(A'')|<\varepsilon.$$

所以只要 A'，$A''>A_0$，由(6)便可推出

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right|<4M\varepsilon,$$

因而由 Cauchy 收敛原理，积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 1 证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

证明 因为对任意 $A\geqslant 1$，

$$\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2.$$

且 $\frac{1}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于 0，故由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因为

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

用和上面一样的方法知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散. □

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是一个条件收敛的例子.

定理 11.10（Abel 判别法） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；

2° g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，

那么积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 因为 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，只要 $A',A''>A_0$，便有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 由于 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，设 $|g(x)|\leqslant M$，$x\in[a,+\infty)$. 于是由推广的第二积分平均值定理即得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\quad+|g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2M\varepsilon.\end{aligned}$$