開明青年叢書

數學漫談

許蒓舫著

開明青年叢書

數學漫談

許蓴舫著

開明書店

數學漫談

每册定價5,000元　　32開本 118定價

著者	許蒓舫
出版者	開明書店 （北京西總布胡同甲50號）
印刷者	華義印刷廠
發行者	三聯·中華·商務·開明·聯營 聯合組織 中國圖書發行公司

1952年3月初版　　10（發3580）

1952年8月二版（3501—8500）

作者的話

這個集子，包括十八個短篇，原都是在雜誌上發表過的．現在把它集起來出版，是爲了供給同學們一些學習數學的課外資料．

學習數學是應該和實際結合的．本書每篇裏面都舉了一兩個具體問題，用來作爲例證，幫助同學們對於數學原理作深入的鑽研．本書裏所舉的例子，特別是‘益智謎’，很多都已在我國民間流傳了許多年．讀者可以從這裏體會到祖國人民在數學方面所表現出來的智慧．希望同學們在看這本書的時候，也從這一點去認識．

作者學識膚淺，這一本集子如有什麼錯誤地方，請讀者儘量的指正．

許蒓舫 一九五二年三月

目　　次

益智謎面

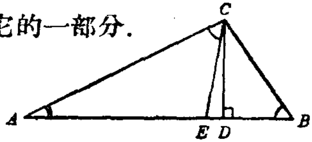
‘不要隨便下斷語’

——歪理兩條——

法國的數學家笛卡兒曾經說：‘天下的事理，非見到極明白，决不要隨便就下斷語.’ 這一句名言告訴我們在推斷事理的時候，應當十二分地小心，不要憑着主觀，自己覺得這樣，就以爲一定是這樣．這種主觀的判斷，沒有客觀的眞憑實據，只好算是武斷，其結果一定要陷入錯誤.

這樣空泛地說，也許不容易明白，現在來就幾何方面舉兩個有趣的例子吧．幾何學的論證都是有客觀的根據的，當我們證明一個問題的時候，每一句話都應當有確實可靠的理由．假如我們憑了主觀‘想當然耳’的作出結論來，就一定要弄得謬誤百出的．下面兩個命題的證明，粗看好像都‘言之成理’，可是只要仔細推敲一下，就不難看出它們都是不能成立的‘歪理’.

〔命題一〕 直線的全長等於它的一部分.



設 AB 是一直線，拿 AB 做邊作 $\triangle ABC$（使 $\angle A$ 爲銳角），又作 $CD \perp AB$，作 CE，使 $\angle ACE = \angle B$，於是因 $\angle A = \angle A$，得

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle ACE \ (a.a. = a.a.).$$

$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle ACE = \overline{BC}^2 : \overline{CE}^2$（$\backsim\triangle$之比等於對應邊之

平方比).

又 $\triangle ABC:\triangle ACE = AB:AE$ (等高△之比等於底之比).

$\therefore$ $$\overline{BC}^2:\overline{CE}^2 = AB:AE \text{ (等於同比的二比相等)}.$$

$$\overline{BC}^2:AB = \overline{CE}^2:AE \text{ (更調)}.$$

但 $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB\times AD$ (畢氏定理的推廣),

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 - 2AE\times AD \text{ (同上)}.$$

$\therefore$ $$\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\times AD}{AB} = \frac{\overline{AC}^2+\overline{AE}^2-2AE\times AD}{AE} \text{ (代入)}.$$

即 $$\frac{\overline{AC}^2}{AB} + AB - 2AD = \frac{\overline{AC}^2}{AE} + AE - 2AD \text{ (分項,約分)},$$

$$\frac{\overline{AC}^2}{AB} - AE = \frac{\overline{AC}^2}{AE} - AB \text{ (消去同類項,移項)},$$

$$\frac{\overline{AC}^2 - AB\times AE}{AB} = \frac{\overline{AC}^2 - AB\times AE}{AE} \text{ (通分,歸併)}.$$

於是 $$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AE} \text{ (以 } \overline{AC}^2 - AB\times AE \text{ 除兩邊)}.$$

$\therefore$ $$AB = AE \text{ (兩邊各取倒數)}.$$

這就是證明了直線 AB 的全長等於它的一部分 AE. 然而幾何公理中明明有'全量大於部分'的一條,況且在事實上 AB 比它的一部分 AE 長,連三歲的小孩子都知道的. 那末上舉的證明究竟錯誤在哪裏呢?

細考上述證明的各步,似乎都有定理或公理可以根據,是無法駁倒的;其實末第二步應用的除法公理在代數學中明明

有一個限制，忽略了這點，就犯了隨便下斷語的毛病. 玆訂正如下：

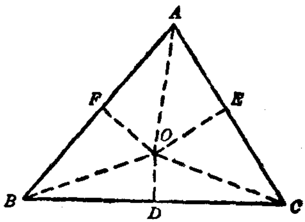
由定理'相似三角形的對應邊成比例'，知道

$$AB:AC=AC:AE.$$

化為等積式，得 $\overline{AC}^2=AB\times AE.$

移項，得 $\overline{AC}^2-AB\times AE=0.$

於是在前舉證明中的末第三步應是 $\frac{0}{AB}=\frac{0}{AE}$，決不能化為 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AE}$. 即末第二步以 $\overline{AC}^2-AB\times AE$ 除兩邊，實際是用了 0 除兩邊，根本是不合理的. 換句話說，因為 0 被任何數除，商總是 0，總能相等，所以雖得 $\frac{0}{AB}=\frac{0}{AE}$，但不能決定 $AB=AE$. 說得更簡單些，因 $\frac{0}{3}$ 和 $\frac{0}{5}$ 都等於 0，故 $\frac{0}{3}=\frac{0}{5}$；但 $3\neq5$，是誰都知道的.



〔命題二〕 凡三角形都有二角相等.

設$\triangle ABC$，作 $\angle A$ 的平分線 AO，BC 的垂直平分線 DO，二線相交於 O. 從 O 作 $OE\perp AC$，$OF\perp AB$. 連 OB，OC.

$\because$ $OB=OC$（線段的垂直平分線上的點，與線段的兩端等距），

$OF=OE$（角的平分線上的點，與角的二邊等距），

$\angle BFO=\angle CEO$（由作圖，垂線間的角是直角），

$\therefore$ $\triangle BFO\cong\triangle CEO$（$s.s.$ $rt.$ $\angle=s.s.$ $rt.$ $\angle$），

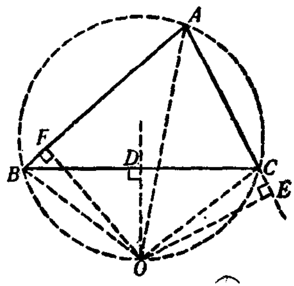
$\angle OBF = \angle OCE$ (全同三角形的對應角相等).

又 $\because$ $\angle OBC = \angle OCB$ (由 $OB = OC$, 等腰△底角相等),

$\therefore$ $\angle OBF + \angle OBC = \angle OCE + \angle OCB$ (等量加等量, 和相等).

卽 $\angle ABC = \angle ACB$ (部分的和等於全量, 代入).

這 $\triangle ABC$ 原是任意的三角形, 現在證得 $\angle ABC = ACB$, 根據'三角形等角必對等邊'的定理, 已變成了一隻等腰三角形, 不又是一件奇怪的事嗎? 其實這又是武斷. 客觀地想, 決不是這樣的.



我們這樣想: 若 $AB = AC$, 則由定理'等腰三角形的頂角平分線必垂直於底邊, 且平分底邊', 知道 $\angle A$ 的平分線和 BC 的垂直平分線必合成一直線, 不能說相交於 O. 若 $AB \neq AC$, 我們作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 取 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點 O, 聯 AO, 則 AO 平分 $\angle A$ (等弧對等圓周角), 卽 $\angle A$ 的平分線過 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點 O. 又因 BC 的垂直平分線也過 O(弦的垂直平分線平分其對弧), 所以這二直線相交於 O, 且 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓上 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點, 必永遠在 $\triangle ABC$ 的外面. 再設 $AB > AC$, 則 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AC}$ (大弦對大弧), 但 $\overset{\frown}{BO} = \overset{\frown}{CO}$, 相加得 $\overset{\frown}{ABO} > \overset{\frown}{ACO}$, 所以 $\overset{\frown}{ABO} > 180° > \overset{\frown}{ACO}$ (因這兩弧的和是 360°), $\angle ACO > 90° > \angle ABO$ (圓周角以所對弧之半來度它),

垂足 E 在 AC 的延長線上，垂足 F 在 AB 邊上（否則一個三角形內含一直角和一鈍角，是不合理的）. 同理，$AB<AC$ 時，垂足 E 在 AC 邊上，垂足 F 在 AB 的延長線上*.

綜上所述，前舉圖形中的 O 在三角形內，且二垂足都在邊上，這是錯誤的. 在準確的圖中，O 在三角形外，垂足 E 和 F，一在邊上，一在邊的延長線上. 故知以前證得的

$$\angle OBF=\angle OCE \cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$

$$\angle OBC=\angle OCB \cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

雖絲毫無誤，但由此決不能得到

$$\angle ABC=\angle ACB \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

爲什麽呢？因爲 (3) 的左邊是 (1) (2) 兩式左邊的差，但 (3) 的右邊卻不是 (1) (2) 兩式右邊的差（這是 $AB>AC$ 時的情形，若 $AB<AC$，則左右相反），所以從 (1) (2) 兩式不能根據等量公理而得 (3) 式，前舉的證明當然是完全錯誤了.

益 智 謎

(1) 行軍不利 —— 某國的軍隊占領某地，列隊遊行示威. 因街道很闊，初列每排十人，列到末排缺少一人. 這軍隊的司令很迷信，認爲末排缺人是不吉利的，於是發令改爲每排九人，但末排仍缺一人. 又改成每排八人，末排仍缺一人；

*這一段的原文，前在進步青年刊出，證 O 點在 $\triangle ABC$ 外所用的方法，不免呆笨費力，且對二垂足 E 和 F 的一在邊上和一在邊的延長線上未述理由，承蒙河南偃師縣立一中王蘊山同志指出，特根據王同志的意見加以修正，並在這裏附致謝意.

再改七人一排、六人一排……直到二人一排，末排終缺一人．於是這司令大起恐慌，認爲這一次行軍一定要失敗了． 試猜這隊兵有多少人．但已知兵數在三千到七千之間．

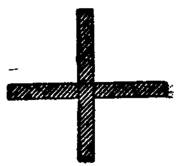
(2) 牧童妙語 —— 某童牧羊歸，牽羊入欄，出外散步． 鄰童問他：‘你今天帶出去的羊羣有幾頭？’牧童說：‘把我的山羊數乘綿羊數，把所得的答數在鏡子裏一照，恰巧是山羊同綿羊的總數．’問兩種羊各多少？

(3) 瓜葛之親 —— 李君宴客，座有趙君，李向衆友介紹，稱趙君是他的親戚． 衆友問他是什麼親，李說：‘他是我父親的妻弟之子，又是我岳翁的甥兒；我是他姑母的姪女之夫，又是他姊夫的哥哥．’衆友都瞠目不解． 這李趙二君的親族關係，讀者能列一系統表來表明嗎？

(4) 智牛避車 —— 一隻牛閒行到鐵路橋上，橋長四十八尺，該牛立在橋心的東五尺處，忽覺一火車自東疾馳而來，速率爲每時一百二十里，剛正是牛走的速率的五倍． 這時候距橋的東端只有二倍橋長的距離． 問這牛應該向哪一方面逃走，纔能保全性命？ （牛的身體大小不計．）

(5) 故弄玄虛 —— 甲問乙說：‘今天是星期幾？’乙素喜故弄玄虛，回答說：‘若以後日爲昨日，則今日與星期日的距離，等於以前日爲明日的今日與星期日的距離．’那末今天究竟是星期幾呢？

(6) 跌碎鐘面 —— 製造時辰鐘的某工人，不小心把鐘上的一塊瓷面跌碎，分爲四塊． 仔細一看，發見每塊上所有的羅馬數字的和恰巧都相等． 問這瓷面碎成什麼形狀？



(7) 十字成方 —— 用木條四根，排列成如右圖的十字形，現在要想移動一根，得一正方形，試問用什麼方法？

思索的三部曲

——猜數遊戲——

同學們遇到了一個難題，往往會想到頭昏腦脹，結果還是一無所獲．等到在‘題解’一類的書中或同學的練習簿裏看到了它的解法，好像跑得滿頭大汗時吃了一杯冷飲，感覺着又痛快又驚異，不知不覺地會發出這樣的疑問：‘他怎樣想出來的？’這疑問的答案，不要說從演式中找不出來，就是那些聰明的懂得它的解法的人也不會告訴你． 他們並不是故意在賣關子，實在是無從說起的緣故．本來，思索一個問題的方法，不是可以抽象地、概括地用言語表達出來的；必須要經過不斷地學習和實際的練習，然後纔能逐漸的得到． 因此我們不能認爲學會了一個問題的做法，便算盡了學習的能事，最要緊的還是要學會思索問題的方法，養成良好的思索習慣．

教了二十多年數學，‘題目要怎樣去想？’這個問題，常常被人問到，每次都苦於無從說起，就是說也不會十分徹底．在這當兒，我只好舉出實例來作答覆． 下面的一個小小的猜數遊戲，就是一個很好的實例．讀者看了之後，對於思索數學問題應有怎樣的過程，也許會知道一個大概．

記得在很多年以前，看見同學們玩着一種猜數的遊戲．方法是叫你隨便寫下一個多位的整數，把這數中各位的數字

加起來,從原數中減去這加得的和,然後在所得的差中留下任何一位數字,把其餘各位數字隨便顛倒地報告出來,他就能立刻猜到你留下的是哪一位數字. 但遇到0是例外,不要留下,也不必報告出來. 要說得明白一些,當然必須舉一個例子. 假定你寫下的是65271,各位數字加起來,得21,相減得65250,留下2,報告出來的三位數字是6,5,5,他立刻會猜出你留下的數字是2.

$$\begin{array}{r} 65271 \\ -\quad 21 \\ \hline 65250 \end{array}$$

我最初看到了,覺得很奇妙. 於是開始這樣想:根本不知道原數,單靠着報告的6,5,5三位數字,怎樣會立刻猜出這留下的是2呢?要解決這一個問題,開頭好像無從着手,但是一注意到報告的數字可以隨便顛倒,就知道猜的方法同實際的數無關,只同各位數字有關——十位的5,實際的數是50,數字是5—;這是第一個關鍵. 再注意到0可以不必報告,可見從報告的數字要猜出留下的數字來,只能用加或減的基本算法,絕對不會用到乘或除;因爲用0做加數或減數是不發生影響的,所以儘可不必報告,但是乘除就完全兩樣了,這是第二個關鍵. 於是任意假定各數,來作實地試驗. 先用前例的65271,再用55437,9889,365028,47965等分別做原數,如法泡製,各減去數字的和,都留下任意的一位,把其餘各位——算是報告的——先用加法算出和數,連同留下的一位數字,列下一張表.

報告的各位數字	6,5,5	5,4,1,3	9,5,5	3,4,5	3,7,4,4	········
報告的各位數字的和	16	13	19	12	18	···· ····
留下的一位數字	2	5	8	6	9	········

那報告出來的各位數字的和，同留下的數字有什麼關係呢？很容易發見 $16+2=18$，$13+5=18$，$19+8=27$，$12+6=18$，$18+9=27$，……它們的和 18，27，……都是 9 的倍數。因此知道猜法的祕訣原來是這樣：'把報告的各位數字加得一個和數，在 9 的倍數中選出一個比那和數略大的，相減就得；但和數剛正是 9 的倍數時，那末留下的數字就是 9。'

上述遊戲的謎是給打破了，不過這是從事實上觀察得來的，只能說是應該要如此，究竟為什麼要如此，這裏還須作一個明確的回答。

就最初的例子考察，$65271=60000+5000+200+70+1$，根據倍數的原則：9 的倍數的任何倍仍是 9 的倍數；9 的倍數同 9 的倍數的和仍是 9 的倍數，可得

$$
\begin{aligned}
60000 &= 10000\times 6 = (9\text{的倍數}+1)\times 6 = 9\text{的倍數}+6,\\
5000 &= 1000\times 5 = (9\text{的倍數}+1)\times 5 = 9\text{的倍數}+5,\\
200 &= 100\times 2 = (9\text{的倍數}+1)\times 2 = 9\text{的倍數}+2,\\
70 &= 10\times 7 = (9\text{的倍數}+1)\times 7 = 9\text{的倍數}+7,\\
1 &= 1,(+\\
\hline
65271 &= 9\text{的倍數}+21.
\end{aligned}
$$

移項得 $65271-21=9$ 的倍數，卽 $65250=9$ 的倍數．根據算術中的質因數檢驗法，知道 65250 旣是 9 的倍數，那末各位數字的和也是 9 的倍數，卽 $6+5+2+5=9$ 的倍數．於是前舉猜法的原理就不難徹底明白了．

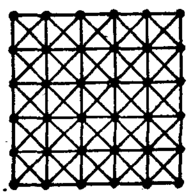
這個數學遊戲的思索過程是怎樣的呢？第一步是要認清問題的關鍵，第二步是要由‘知其然’而進到‘知其所以然’，把它列舉出來，好像是一套三部曲：

（一）想：這是怎麽一回事？
（二）想：這是怎樣做法的？
（三）想：爲什麽這樣做就成功這麽一回事？

益智謎

(8) 教堂怪鐘 —— 瑞士老鐘表匠某，被某禮拜堂請去裝一隻大鐘．因年老目力不濟，把長短二針配錯了，於是短針走的速度反是長針的十二倍．配時是早晨六時，短針指六，長針指十二．老鐘表匠裝畢回家，村人仰看這鐘，一忽兒已七時，後又八時、九時，大爲訝怪．立刻去找老鐘表匠來，等到趕到，已是晚上七時有餘，用表一對，準確無誤，老鐘表匠疑心他們有意作弄，忿忿而歸．不料這鐘又是八時、九時地跑起馬來．村人再去請老鐘表匠，第二天早晨八時後趕到，用表校對，仍舊無誤．鐘表匠大怒，且罵且歸．從此以後，這隻鐘依舊狂走，老鐘表匠不肯再來．試問老鐘表匠往觀時是晚上七時幾分？又是次晨八時幾分？此後何時又能準確？

(9) 巧插金針 —— 在紙上畫如右的圖形，用針六枚，插在圖中有黑點的地方，但在橫、豎、斜各直線上都不許有二針．問怎樣插法？



思想的線索

——算稿補缺——

當我們研究一個問題的時候，必須集中思想，把握思索的方法，有規律地深入到問題裏去． 前次所講的‘思索的三部曲’，就是一種最普通的思索問題的方法． 但是問題的變化往往是很複雜的，當我們碰到這種複雜問題，就必須靈活的運用這種思索的方法． 怎樣去靈活運用呢？ 就是首先要找出思想的線索，按照這個線索集中思想一步一步深入到問題裏面去，從第一個環節找出第二個環節，以至第三、第四、……環節，逐次把問題的連鎖完全解開出來． 這又好比作剝繭抽絲，先要尋到一個正確的頭緒，從此往下抽去，就能很順利地逐漸抽到絲尾． 假使不是這樣的話，我們的思想便不能集中，容易走到‘胡思亂想’的路上去，這樣不但不容易獲得結論，而且勞而無功． 這裏，我們可以用一個實例來說明．

某處的法院受理一件案子，其中唯一的證據是一張不完全的算稿，列着一個除法的算草．這算稿的大部分已殘缺模糊，只留着七個數字可以辨認，堂上無從判斷，徵求算學家把它補足． 原稿的式樣如右，其中 a, b, c, d, ……就是殘缺的數字．

```
a b 9) 6 c 8 d e f ( g 5 h
       i j k 2
       -------
       l 9 m n
       p q 4 r
       -------
         s t u v
         w x y z
         =======
```