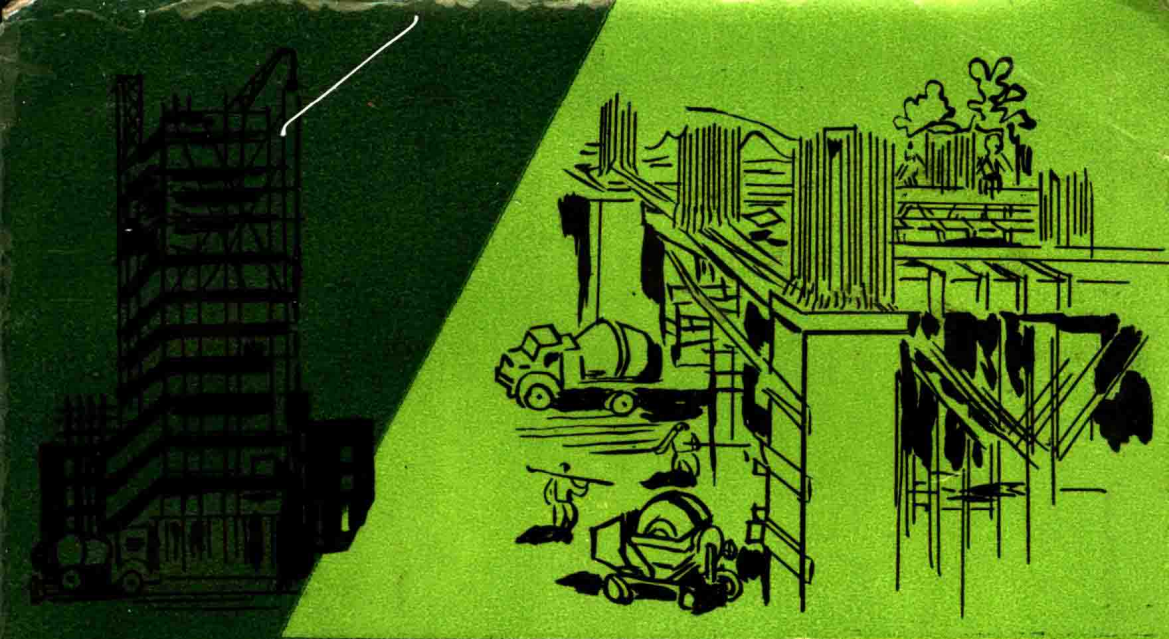
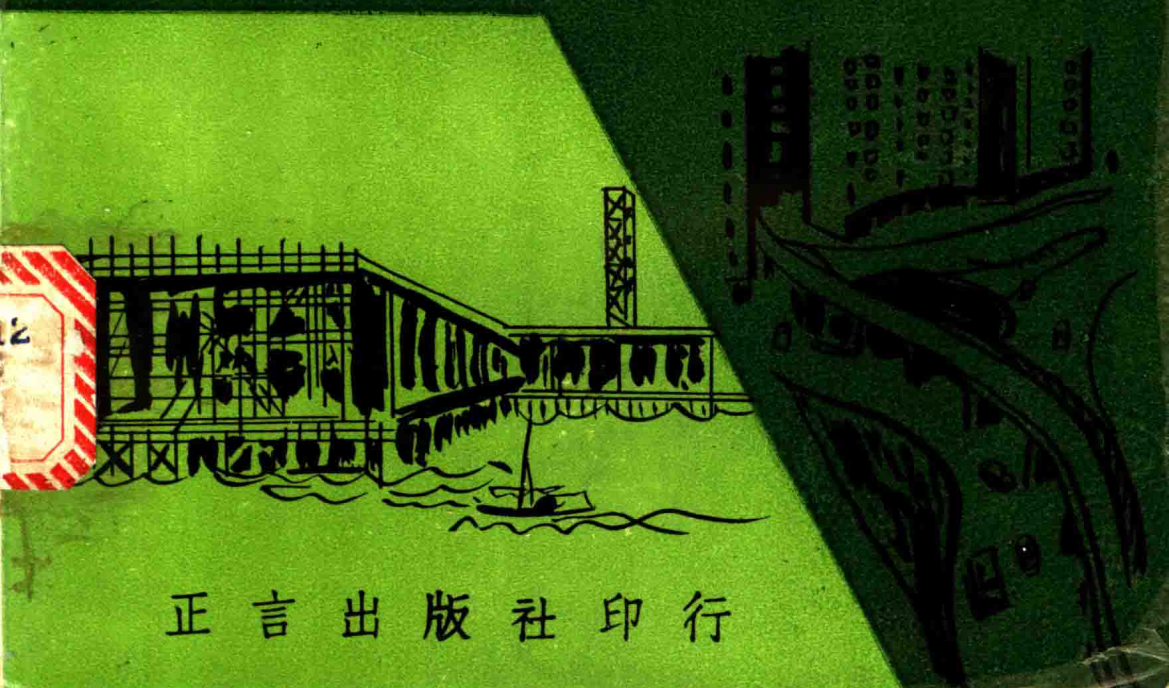




超靜定結構分析



正言出版社印行

實用超靜定結構分析

潘友朋 著

江苏工业学院图书馆
藏书章

正言出版社印行

自序

我編譯這本“實用超靜定結構分析”，主要目的有二：其一係作為高等學校土木工程學系“高等結構學”課程的輔助課本；其二係作為一般實地土木工程工作者自修高等結構學的入門書，與實際解算問題時的參考書。

關於第一個目的，據我學習與講授“高等結構學”的經驗，知道基本理論的瞭解方面，如已有力學與靜定結構學的根底，一般不成大的問題。同學們的主要困難在於習題的解算：不僅作得慢，不能利用最有效的步驟，有時甚至有無從下手之苦。尤其現在受學習時數的限制，可能形成習題積壓的現象，而像結構學這類的課程，如不經過演算習題一步工作是無法澈底瞭解其理論的。所以我覺得應該有一本專門研究解算問題的書，作為一般課本的補充，對於教師和同學都有用處。

其次，一般土木工程工作者，有許多是在學校內沒有學習過“高等結構學”的課程的，但在實地工作中這類超靜定的結構時有遇到，有自學的必要。這樣一本詳細討論解算問題方法步驟的書，再配合以淺顯的理論，很合自學的要求。即如已學過高等結構學的人，在實際工作中，有這樣一冊便於翻檢，可資遵循的書，也很方便的。

我於編譯這冊書時，希望能達到上述的目的，所以在理論方面，儘量求其簡單、直捷、淺顯、明白；在例題方面，儘量使其有系統，有步驟、詳細、清楚。不過編者學識有限，究竟效果如何，是要請讀者提出意見並指出錯誤的。

本書各例題取之於 W. F. Cassie 的 “Structural Analysis — The Solution of Statically Indeterminate Structures” 一書，除儘量保留該書所有優點外，還訂正了錯誤，改移了次序，並增加了一些例題，使之更合於我們的需要。理論方面則參酌各書，加以補充。

鍾 朋

目 次

第一章 緒論

(1.1) 結構分析與結構設計.....	1
(1.2) 靜定結構.....	1
(1.3) 超靜定結構.....	2
(1.4) 靜定結構與超靜定結構之區別.....	5
(1.5) 應變情況.....	5

第二章 力矩面積法及三力矩定理

(2.1) 引言.....	7
---------------	---

力矩面積法

(2.2) 力矩面積定律.....	7
(2.3) 力矩面積法解題步驟.....	8
(2.4) 向號規律.....	9

三力矩定理

(2.5) 支點無沉陷.....	20
(2.6) 支點有沉陷.....	21
(2.7) 用三力矩定理解連續梁之步驟.....	22
(2.8) 固定端之特式.....	27

第三章 應變能法

(3.1) 應變能.....	37
(3.2) 卡斯提里愛諾氏第一定理.....	38

(3.3) 用應變能解超靜定結構·····	40
只含一多餘反力之梁及構架	
具有一個以上多餘反力之梁及構架	
具有斜桿或曲桿之構架	
多跨、多層、空腹及環形構架	
(3.4) 彎矩之向號·····	59

第四章 二鉸拱及固端拱

二鉸拱

(4.1) 拱之意義·····	69
(4.2) 二鉸拱之解法·····	69
(4.3) 斷面變化之拱·····	77
(4.4) 拋物線形拱·····	80
(4.5) 二鉸拱中之推力與剪力·····	85
(4.6) 二鉸拱中之溫度推力·····	88
(4.7) 二鉸拱由於拱肋縮短所生之應力·····	88
(4.8) 桿件本身慣性矩變化之結構的解法·····	92

固端拱

(4.9) 固端拱·····	93
(4.10) 彈性中心·····	97

第五章 傾角變位法

(5.1) 傾角變位法之特點·····	103
(5.2) 傾角變位方程式·····	103
(5.3) 向號規律·····	104

(5.4) 傾角變位方程式之證明	104
------------------	-----

(5.5) 固端力矩	106
------------	-----

連續梁

門架及房屋構架

(5.6) 柱內剪力之平衡	114
---------------	-----

構架之支點沉陷

第六章 力矩分配法

(6.1) 力矩分配法之基礎	138
----------------	-----

(6.2) 固端力矩、不平衡力矩、分配力矩及傳導力矩之定義及其求法	139
-----------------------------------	-----

連續梁

(6.3) 力矩分配法演算的基本程序	142
--------------------	-----

(6.4) 簡支點或鉸端的簡捷步驟	144
-------------------	-----

無側傾之門架及構架

(6.5) 演算形式	148
------------	-----

(6.6) 避免錯誤的方法	150
---------------	-----

有側傾之門架及構架

(6.7) 發生側傾之原因	152
---------------	-----

(6.8) 側傾構架之力矩分配法	152
------------------	-----

受側向荷重之門架及構架

具有斜桿之構架

斷面慣性矩變化桿件之力矩分配法

(6.9)	傳導因數 C	180
(6.10)	真實挺度 K'	181
(6.11)	修正真實挺度 K'^R	182
(6.12)	挺度與傳導因數之關係	182
(6.13)	分配因數及分配力矩	183
(6.14)	固端力矩	183
(6.15)	側傾因數 J	183
(6.16)	曲桿之力矩分配法	184

第七章 似柱法

(7.1)	似柱法的基本概念	185
(7.2)	梁之超靜定力矩與柱之應力	185
(7.3)	似柱之性質	187
(7.4)	向號規律	188

梁

對稱構架

不對稱構架

(7.5)	不對稱柱斷面上之應力	204
-------	------------------	-----

第八章 剛節結構之感應線

(8.1)	感應線	212
(8.2)	馬克斯韋爾變位互易定理	212
(8.3)	應用變位互易定理求感應線	214

超靜定梁之感應線

構架之感應線

二鉸拱及固端拱之感應線

第九章 超靜定樞接結構

- (9.1) 超靜定樞接結構之分類..... 252
具有多餘桿件之桁架
- (9.2) 具有多餘桿件之樞接結構的解算方法..... 252
桿件長度之不適合
多餘反力
斷面面積變化之影響
桁架梁

圖解索引

附錄

1. 自由彎矩圖之性質..... 275
2. 固端力矩..... 275
3. 解聯立方程式的近似方法..... 276

第 一 章

緒 論

(1.1) 結構分析與結構設計

對於任何結構的分析工作，其目的都在於求出這一結構每一部分所受到的直接應力、剪應力及彎應力。當這些應力求出來之後，結構的各肢桿斷面可使與應力數量相當，以抵抗外加荷重。

所以結構學的問題時常可以分爲分析與設計兩部分：

1. 結構分析

(1) 荷重作用後，所引起之反力（包括固定力矩）須與荷重互相平衡。荷重及反力都稱爲外力，因爲都是結構自外面所受的力量。

(2) 自(1)中求出平衡荷重之反力及固定力矩後，全部外力爲已知，結構任一斷面所受之軸向力、剪力及力矩也可算出。爲平衡斷面中所受之力量及力矩，斷面內部發生應力，其數量性質亦可確定。肢桿斷面所受之軸向力、剪力及力矩，稱爲結構之內力。

2. 結構設計

根據所得之應力，選定結構各部分之形式、大小及接合方法，以及其他細節。

結構分析之兩步工作，常因結構是靜定的或超靜定的而有不同之解決方法。本書只討論分析部分，且限於超靜定結構，所以在正式談到分析方法之前，須於靜定結構與超靜定結構之間，作一明確之界限。

(1.2) 靜定結構

凡結構之外部反力及內部應力，只用靜力學之定律即可求出的，叫做靜定結

構。圖 1·1 中(a)至(e)代表一些靜定結構,支持力及力矩與外加荷重平衡,所有反力均可按靜力學平衡條件解出,而內力之數值亦可根據靜力學之定律與外力相抵。假定圖(a)或(c)之支持力去掉一個,或圖(e)中之桿件取消一根,則此一結構受荷重後即將傾毀。關於靜定結構之解法,讀者應該已經非常熟習。

(1·3) 超靜定結構

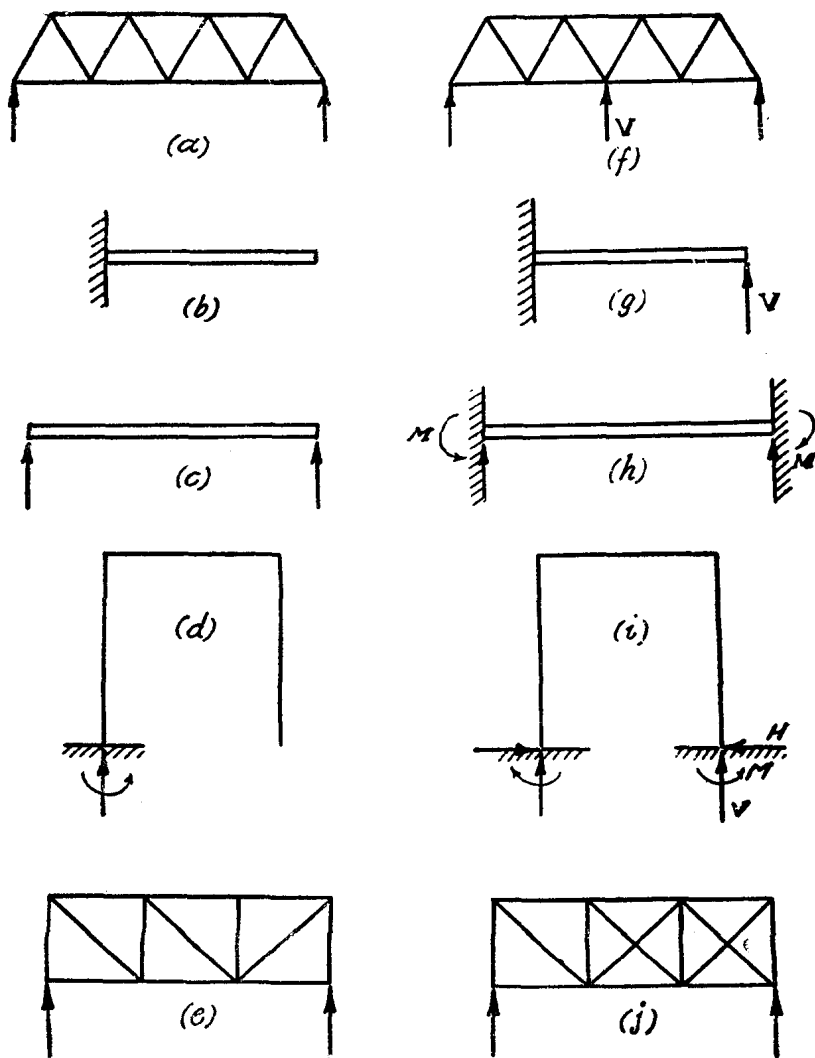


圖 1·1

無論外力或(及)內力不能用靜力學求出的,都稱為超靜定結構。如圖 1.1 中之 (f) 至 (i), 分別與 (a) 至 (d) 相當, 但每一個都增加了支持力或支持力矩, 而不是只用靜力學就可以完全把反力求得的, 是超靜定結構, 為外力超靜定。圖 1.1 之 (j) 是把圖 (e) 之桿件數目加多, 各桿之應力不能用靜力學求出, 也是超靜定結構, 為內力超靜定。

像這樣加多之力量及力矩, 必須先想辦法求出, 然後才可以利用靜力學的方法, 求出所有的反力和應力。

如以下各章所講, 求這樣多餘力量或多餘力矩之方法各有不同。但其基本, 總要利用到結構受荷重後之變形或變位關係。

假如我們把一個超靜定結構, 除去 n 個力量及(或)力矩後, 可以成為靜定結構, 那麼這一超靜定結構是 n 次的, 亦即須自結構變形或變位之研討中, 另外列出 n 個方程式, 才能把這一超靜定結構完全解決。

圖 1.1 中, (f) 及 (g) 都只需要再另加一個方程式, 所以是一次超靜定結構。圖 (h) 是二次, 因為要把兩個力矩除去, 才能達到圖 (c) 那樣的靜定結構。圖 (i) 則需要三個方程式, 以求 H 、 V 及 M , 而變為圖 (d) 的樣子。

圖 1.1 (j), 則是二次內力超靜定的結構。

自然, 也可有內力外力都超靜定的結構, 如圖 (1.2), 其超靜定次數為外力超靜定次數與內力超靜定次數之和。

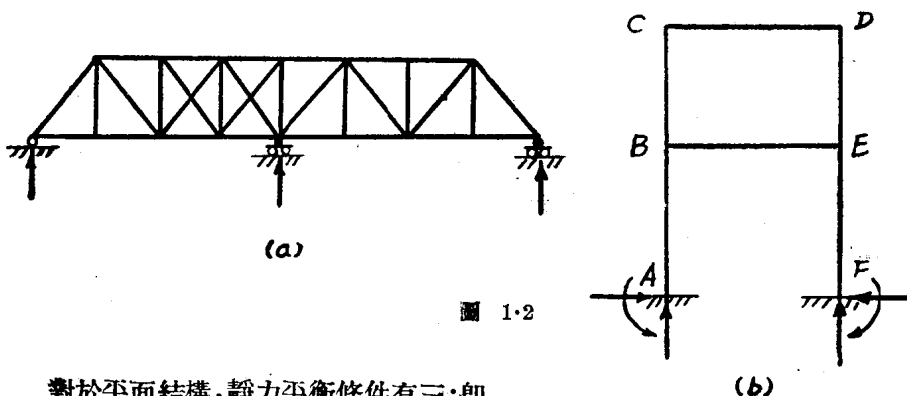


圖 1.2

對於平面結構, 靜力平衡條件有三: 即

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0.$$

故反力之數目超過三個者，即為外力超靜定結構，其外力超靜定之次數 $= N - 3$ ，其中之 N 為反力之總數。

桁架結構之內力超靜定次數，等於其多餘桿件的數目。圖 1.2 (a) 之連續桁架，內力超靜定二次，外力超靜定一次，故超靜定總次數為三。

梁或一般的剛節結構，內力多係靜定，如圖 1.1 之 (g) (h) (i) 都是。但如結構本身具有閉合之環路，因而自一支點經由構件至另一支點之徑路不止一條時，其內力亦為超靜定，如圖 1.2 之 (b)。但如將此閉合環路 $BCDE$ 任一肢割切，如圖 1.3，將割切處產生之軸向力、剪力及力矩三種內力作為外力，則內力靜定。故圖 1.2 (b) 為三次內力超靜定，而總超靜定次數則為 $3 + 3 = 6$ ，因其外力超靜定次數也為三。

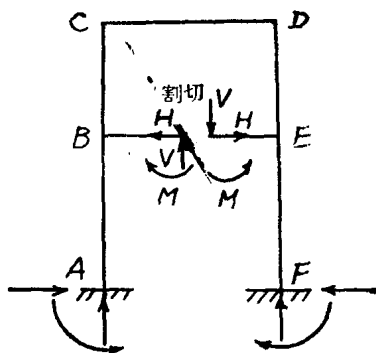


圖 1.3

結構內部每有一鉸接點，其力矩為零，即多一平衡條件，其超靜定次數即減少一次，故一般可用下式求剛節結構之總超靜定次數：

$$\text{超靜定總次數} = N + 3C - 3 - H$$

其中 N = 反力總數目。

C = 消除環路所需之割切次數。

H = 結構內部鉸接點數目。

以上式計算圖 1.4 之結構，知圖 (a) 為四次超靜定 ($6 + 3 \times 1 - 3 - 2 = 4$)，而圖 (b) 則為三次超靜定 ($6 + 3 \times 2 - 3 - 6 = 3$)。

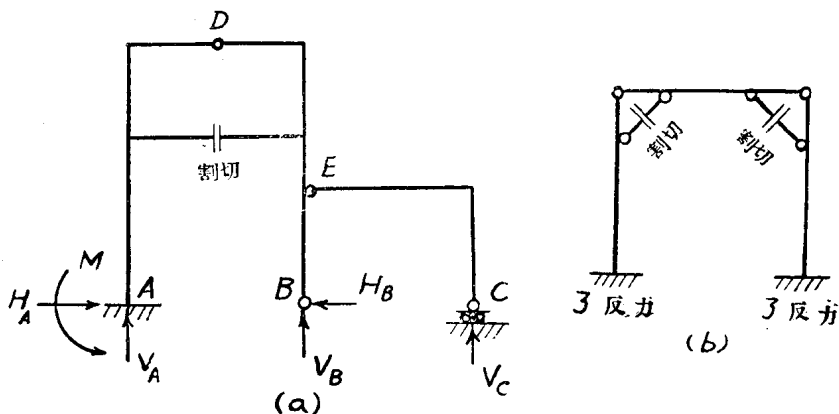


圖 1.4

(1.4) 靜定結構與超靜定結構之區別

1. 靜定結構

(1) 求結構之內力時，結構桿件之斷面面積及慣性矩不必要預先知道。

(2) 支持點輕微的沉陷，及構架結構桿件之輕微的不適合，對於內部力量及力矩沒有什麼影響。

2. 超靜定結構

(1) 結構桿件之斷面面積及慣性矩，對於內部力量及力矩之數值有密切之關係，所以在計算之先，斷面面積及慣性矩均應先行確定。

(2) 支持點輕微的沉陷，約束端輕微的轉動，及構架結構桿件之輕微的不適合，對於內部力量及力矩之數值影響很大，所以在計算之前，這類沉陷及不適合的情況，都需要先加以估計確定。

(1.5) 應變情況

如(1.3)節所說，解超靜定結構時，總直接間接利用結構受荷重後之變位情形，然後可自結構之形狀性質，利用結構幾何圖形之連續性，得應變關係，而多餘量才能解出。又如(1.4)節所說，超靜定結構支持點的沉陷及約束點之旋轉，這種應變之變化，均可使反力及應力因之改變。所以於超靜定結構之設計時，應變情況之確

定，實為一重要之工作。

但此時應特別注意的是，我們所作此種應變情況之假定，必須有事實之證明。設計者必須詳細考察實地情形及模型試驗，得到正確資料以為計算之根據。自未經證實之假定作數學分析，結果是很危險的。應變情況之假定與自靜力學中的平衡條件所得的方程式不同，因為後者是絕對正確的，而前者則尚待事實之證明。

所以以下各章所述各種超靜定結構之分析方法與步驟，只能說在數學方面是正確的。對超靜定結構之設計，正確完善的工程判斷能力較之數學演算更為重要。但如設計正確時，超靜定結構卻較靜定結構更易於達到其預期之效果。

下面第二章至第八章講剛節結構的分析方法，第九章則專門討論樞接結構。剛節結構各桿件所受主要應力為彎曲應力，而樞接結構各桿件則受直接應力。

第 二 章

力矩面積法及三力矩定理

(2.1)引言

本章談到解超靜定梁的兩種方法。超靜定梁包括固端梁及連續梁，屬於外力超靜定結構，是超靜定結構中最簡單的一種。

第一個方法是力矩面積法，我們已在材料力學中學到過，這方法是解超靜定結構的最簡單方法之一，可以作為講到其他應用更廣的方法前的引論。

三力矩定理則可視為力矩面積法的直接應用。

力 矩 面 積 法

(2.2)力矩面積定律

基本力矩面積定律，包括兩項：

1. 第一定律 直梁受荷重後彎曲，在彈性曲線（即變形曲線）上任意兩點 A 、 B 所作切線，其所夾角度 ϕ ，在數量上與 A 、 B 兩點間 $\frac{M}{EI}$ 圖之面積相等。

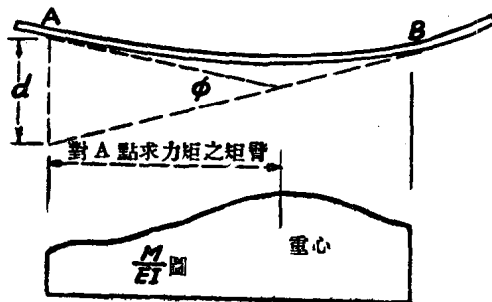


圖 2.1

2. 第二定律 在彈性曲線上, A 點對 B 點切線之豎變位 d , 在數量上與 A 、 B 點間 $\frac{M}{EI}$ 圖之面積繞 A 點之力矩相等。

有兩個重要點須加以注意: (1) 用第二定律求變位時, 要求哪一點的變位, 即對哪一點求 $\frac{M}{EI}$ 圖之力矩; (2) 用第二定律求出的變位, 並不一定代表這一點自原來位置的絕對變位。

(2.3) 力矩面積法解題步驟

1. 移去超靜定力量及力矩, 使結構成為靜定。
2. 使原有荷重, 作用於此靜定結構上, 而得彎矩圖, 此圖稱為自由彎矩圖。
3. 彎矩圖以 EI 之數值除之, 得 $\frac{M}{EI}$ 圖。
4. 移去荷重, 使超靜定力量或力矩作用於結構上, 求由此超靜定力量或力矩所生之彎矩圖及 $\frac{M}{EI}$ 圖。
5. 由於梁之支持情況, 某一斷面或某數斷面之實際傾度或變位通常可以確知。由上述 3、4 兩步之結果, 均可將此斷面之傾度或變位求出: 自第三步求出者, 包括

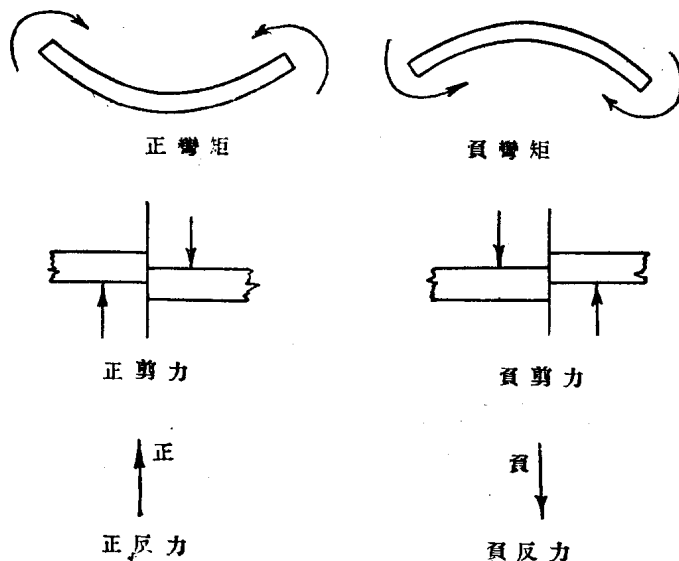


圖 2.2

已知荷重；自第四步求出者，包括未知反力或力矩。加以比較後可將未知量確定。

(2.4) 向號規律

慣常所用彎矩、剪力、反力之正負，如圖 2.2。

例題 2.1 梁 AB 之彈性係數 E 及慣性矩 I 均係常數， A 端固定， B 端簡支， AB 長 10 公尺，其上受 2 公噸/公尺之勻佈荷重，求 B 端之反力 R 。參閱圖(a)。

解法 B 端之反力 R 移去後，梁 AB 成為臂梁，其彈性曲線上 A 點之切線，為橫向的，與原來變形前梁之軸線相合，故可用力矩面積第二定律求 B 之豎變位。

(1) 移去多餘反力 R 後， B 點具有 d 之向下豎變位， d 之值等於由於荷重所生 $\frac{M}{EI}$ 圖面積對 B 點之力矩[圖(b)]：

$$B \text{ 點之變位} = d = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \times 100 \times 10 \right) \times \frac{3}{4} \times 10 = -\frac{2,500}{EI} \text{ 公尺}$$

(2) 移去荷重而以反力 R 作用之。 B 點向上有 d' 之變位，其值等於由 R 所生 $\frac{M}{EI}$ 圖面積對 B 點之力矩[圖(c)]：

$$B \text{ 點之變位} = d' = +\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times 10 R \times 10 \right) \times \frac{2}{3} \times 10 = +\frac{1,000}{3EI} R \text{ 公尺}$$

(3) 如 B 點之支持是剛性而不沉陷的，則 B 點之變位實際上等於零，故 d 及 d' 之絕對值必須相等：

$$-\frac{2,500}{EI} + \frac{1,000}{3EI} R = 0$$

$$\therefore R = 7.5 \text{ 公噸}$$

把所求出之 R 值代入圖(c)，再把(B)(C)兩個彎矩圖重疊，可得(d)，為最後之彎矩圖。(b)(c)兩圖中共同部分互相抵消。

比較複雜的建築構架受荷重後變位的形狀是很重要的，以後每一問題都須將其彈性曲線畫出。這一例題的彈性曲線如圖(e)。

支點沉陷之影響 如支點 B 在荷重作用下有向下 1 公分之沉陷，則 d 與 d' 之代數和不等於零，而為 1 公分，上題中最後方程式變成

$$-\frac{2,500}{EI} + \frac{1,000}{3EI} R = -\frac{1}{100} \text{ 公尺}$$