

人大版考研

买1本书
听1年课

考研数学综合辅导全书

2005年新版 考研数学 考试指南

主编 李恒沛



教育部考试中心
原考研数学命题组组长
亲自编写

中国人民大学出版社

2005 年 考 研 数 学 新 编 考 试 参 考 书

2005

主 编 李恒沛
编著者 (以姓氏笔画为序)
吴纪桃 李恒沛
李忠范 杨 荣
侯书会

服 务 程 序		刮 开 涂 层
		获取16位数字序列号
		上www.1kao.net注册
		登 陆 进 课 堂

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2005 年考研数学新编考试参考书/李恒沛主编
北京: 中国人民大学出版社, 2004

ISBN 7-300-04657-6/G · 969

I. 2...

Ⅰ. 李...

Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

N. 013

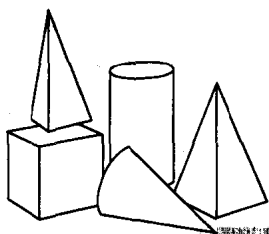
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 018007 号

2005 年考研数学新编考试参考书

主编 李恒沛

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511239 (出版部)
	010-82501706 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京鑫鑫印务有限公司		
开 本	787×1092 毫米 1/16	版 次	2004 年 4 月第 1 版
印 张	39.75	印 次	2004 年 4 月第 1 次印刷
字 数	911 000	定 价	45.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换



前言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第1~8章）、线性代数（第9章）、概率论与数理统计（第10章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并示明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录1为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生备用），附录2、附录3分别为2003年和2004年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用（包括报考“数学一、数学二、数学三、数学四”的考生都适用）。本书也可供在读本科生加深学习内容、复习备考以及教师教学参考之用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：（1）概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。（2）综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。（3）运算性强。正确地运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运作自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力，这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样，概莫能外。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不繁琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；时时小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演练习题，两者都是重要的。

本书第1~4章由吴纪桃编写，第5~8章由李恒沛编写，第9章由侯书会编写，第10章由李忠范、杨荣编写，全书由李恒沛统稿。编著者都长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的参加过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深刻的研究，考研辅导效果显著。编著者愿此书的出版会对考研学子有所裨益。

本书在编写过程中，主要参考书有：

教育部：《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，高等教育出版社，2003。

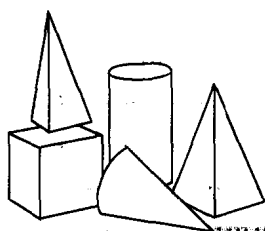
全国高校工科数学课程教学指导委员会《工科数学》编委会：《工科数学·二〇〇一年考研专辑》，2001。

蔡燧林、张继昌：《研究生数学入学考试精编》（第二版），浙江大学出版社，2000。

李恒沛、王日爽、萧亮壮：《全国研究生入学数学统考应试指导》，广西科学技术出版社，1988。

编著者

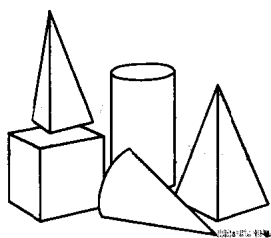
于北京，2004年2月



目 录

第一章 函数、极限、连续性	1
§ 1. 函数	1
§ 2. 极限	5
§ 3. 连续性	18
小结与习题	25
第二章 一元函数微分学	31
§ 1. 导数与微分	31
§ 2. 微分中值定理	44
§ 3. 导数的应用	63
小结与习题	72
第三章 一元函数积分学	79
§ 1. 不定积分	79
§ 2. 定积分	96
§ 3. 定积分的应用	114
§ 4. 广义积分	124
小结与习题	128
第四章 向量代数和空间解析几何	137
§ 1. 空间直角坐标系与向量代数	137
§ 2. 平面与直线	142
§ 3. 二次曲面	152
小结与习题	155
第五章 多元函数微分学	159
§ 1. 多元函数微分法	159
§ 2. 多元函数微分学的应用	172
小结与习题	184
第六章 多元函数积分学	188
§ 1. 二重积分与三重积分	188

§ 2 曲线积分	204
§ 3 曲面积分	217
小结与习题	231
第七章 无穷级数	238
§ 1 常数项级数	238
§ 2 幂级数	250
§ 3 傅里叶级数	265
小结与习题	271
第八章 常微分方程	278
§ 1 一阶微分方程	278
§ 2 高阶微分方程降阶解法	289
§ 3 线性微分方程	292
§ 4 微分方程的应用	305
小结与习题	313
第九章 线性代数	317
§ 1 行列式	317
§ 2 矩阵及其运算	326
§ 3 向量	338
§ 4 线性方程组	354
§ 5 矩阵的特征值和特征向量	372
§ 6 二次型	391
习题	406
第十章 概率论与数理统计	426
§ 1 随机事件和概率	426
§ 2 随机变量及其概率分布	436
§ 3 二维随机变量及其概率分布	450
§ 4 随机变量的数字特征	468
§ 5 大数定律与中心极限定理	484
§ 6 数理统计的基本知识	489
§ 7 参数估计	500
§ 8 假设检验	514
小结与习题	522
附录 1 差分方程简介	543
附录 2 2003 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	545
附录 3 2004 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考解答	583



第一章 函数、极限、连续性

§ 1 函数

▲ 一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义: 设有两个变量 x 与 y , 如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时, 变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量, 也称 y 是因变量, 称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性: 设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义, 如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 (或单调减少的).

(2) 奇偶性: 设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义, 如果对于 I 内任意点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性: 设 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义, 若存在一个正的常数 T , 使得 $f(x + T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在 $M > 0$, 使得对于任何 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u , $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x , 值域为 E , 若 $E \subseteq D_u$, 则对于任何 $x \in D_x$, 有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应, 而 $u \in E \subseteq D_u$, 故又有确定的 y 与 u 对应, 从而, 对于任何 $x \in D_x$, 都有确定的 y 与 x 对应, 按照函数的定义, 确定了 y 是 x 的函数. 此函数是

通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系的,因而,称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数,记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y , 如果对于 D_y 中的任何一个 y 值,从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的 x 值,则按照函数的定义,也确定了 x 是 y 的函数,称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上,用 x 表示自变量、 y 表示因变量,因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.
 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

注意: $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图像是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数:称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数).

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内,其对应法则有着不同的初等函数表达式,则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法.

例如,应会求函数的定义域和值域,会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式,即从 $f(\varphi(x)) = g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式,尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如,应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

▲ 三、例题分析

例 1 已知 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

分析:这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式,欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题.此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中,令 $\varphi(x) = u$,即可得到 $f(u)$ 的表达式,从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解:令 $x + \frac{1}{x} = u$, 则有

$$f(u) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} = \frac{1}{u^2 - 2},$$

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

例 2 已知 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为偶函数, 且 $f(x) = 2x^2 + x (x \in [-2, 0])$, 那么当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 的表达式为 ().

A. $2x^2 + x$ B. $2x^2 - x$ C. $-2x^2 + x$ D. $-2x^2 - x$

分析: 已知函数的奇偶性时, 可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x \in [0, 2]$ 时, $-x \in [-2, 0]$, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以有

$$f(x) = f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) = 2x^2 - x.$$

解: 应选 B.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析: 这是一个分段函数求复合函数的问题, 按照一般求复合函数的方法, 先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数, 要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

$$\text{解: } f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leq 1, \\ 0, & |g(x)| > 1, \end{cases}$$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| \leq 1$, 当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| > 1$.

先来讨论使 $|g(x)| \leq 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x| \leq 2$ 时才可能使 $|g(x)| \leq 1$.

在 $|x| \leq 2$ 范围内, 要使 $|g(x)| = |2 - x^2| \leq 1$,

只须 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$.

所以, 当 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ 时, 有 $|g(x)| \leq 1$.

再来讨论使 $|g(x)| > 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x| > 2$ 时 $|g(x)| > 1$. 另外, 当 $\sqrt{3} < |x| \leq 2$ 或 $|x| < 1$ 时, 也有 $|g(x)| > 1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \text{ 或 } |x| < 1. \end{cases}$$

例 4 设 $y = (a - x^b)^{\frac{1}{n}}$, 当 a, b 满足条件 _____ 时, 该函数的反函数与该函数相等.

分析: 由 $y = (a - x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x = (a - y^n)^{\frac{1}{b}}$$

也即反函数为 $y = (a - x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b = n, a$ 为任意值时, 反函数与直接函数相等.

解: $b = n, a$ 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单增, $f(x)$ 在 $[g(a), g(b)]$ 上单减, 则 $f(g(-x))$ ().

- A. 在 $[a, b]$ 上单增 B. 在 $[a, b]$ 上单减
C. 在 $[-b, -a]$ 上单增 D. 在 $[-b, -a]$ 上单减

分析: 首先, 可知 $f(g(-x))$ 的单调区间应有 $[-b, -a]$, 所以, 可排除 A、B 选项.

然后, 再用单调性定义判断.

任取 $x_1, x_2 \in [-b, -a], x_1 < x_2$.

则 $-x_1, -x_2 \in [a, b]$, 且 $-x_1 > -x_2$.

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1) > g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1)) < f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在 $[-b, -a]$ 上单增.

解: 应选 C 项.

例 6 设 $y = \frac{1}{2x}f(t-x)$, 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$, 求 $f(x)$.

解: $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}f(t-1) = \frac{1}{2}t^2 - t + 5$.

从而 $f(t-1) = t^2 - 2t + 10$.

令 $t-1 = x$, $f(x) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 10$.

所以 $f(x) = x^2 + 9$.

例 7 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ($x \neq 1$), 则 $f(f(f(f(x)))) =$ _____.

分析: $f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$ ($x \neq 1$),

$$f(f(f(x))) = \frac{f(f(x))}{f(f(x))-1} = \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 1),$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1),$$

解: 应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为 ().

- A. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ B. $f(x) = ([x])^2$
C. $f(x) = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$ D. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析: 此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数, B 选项的函数非奇非偶, 故只有选择 C.

因为此时

$$\begin{aligned} f(-x) &= (2 + \sqrt{3})^{-x} + (2 - \sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^x \\ &= (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = f(x). \end{aligned}$$

解: 选择 C.

§2 极限

▲ 一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义: 对于数列 $\{x_n\}$, 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 也记为 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义:

1) 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

2) 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

3) 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

1) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

2) 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

3) 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

(5) 无穷大的定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

类似地,可定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

类似地,还可定义当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$.

1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 高阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$.

2) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A (A \neq 0)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 同阶的无穷小, 记为 $\alpha = O(\beta)$;

特别地, 当 $A = 1$ 时, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 等阶的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

3) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

(2) (保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0 (A < 0)$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0 (f(x) < 0)$.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$, 则 $A \geq 0 (A \leq 0)$.

(4) (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的某去心的邻域 $U^0(x_0, \delta)$, 使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0, \delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) (夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域(或 $|x|$ 充分大时) 内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

5. 极限的运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$.

(3) 若 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大;

反之, 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(6) (等价无穷小替换) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容, 应重点掌握以下几点:

(1) 利用极限的运算法则求极限.

(2) 利用两个重要极限求极限.

(3) 利用等价无穷小替换求极限.

(4) 利用极限存在准则求极限.

(5) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

(6) 利用函数的连续性求极限.

(7) 利用“洛必达法则”求极限.

(上述 6、7 项的内容将在后面复习.)

▲ 二、例题分析

例 1 “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的 ().

A. 充分但非必要条件

B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

分析: 此题是 1999 年全国考研数学二原题, 考查对数列极限的定义的理解. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义是“对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”. 两种说法相比较, 似乎定义中的条件更强些, 显然, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义必能推出“对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”. 但是其逆也是正确的. 因为对任意 $\epsilon_1 > 0$, 取 $\epsilon = \min\left(\frac{\epsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 显然 $\epsilon \in (0, 1)$, 所以总存在正整数 N . 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$, 现取 $N_1 = N - 1$, 于是当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \frac{2\epsilon_1}{3} < \epsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的, 即选项 C 是正确的.

解:应选 C.

例 2 若 ϵ 为任意给定的正数,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件为().

- A. $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的全部点
- B. $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点
- C. $U(a, \epsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点
- D. $U(a, \epsilon)$ 之外可能有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

分析:由于“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”的精确含义是“对任意给定的 $\epsilon > 0$,总存在 N ,当 $n > N$ 时,恒有 $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ ”,所以,在 $U(a, \epsilon)$ 内不一定有 $\{x_n\}$ 的全部点,只含有满足 $n > N$ 的 x_n ,所以 A 不对.而 B“ $U(a, \epsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点”只能保证在某 N 之后的无穷多项 x_n 在 $U(a, \epsilon)$ 内,而不能保证 N 之后的一切 x_n 都在 $U(a, \epsilon)$ 内,故 B 也不对.C“ $U(a, \epsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点”能保证存在 N ,当 $n > N$ 时的 x_n 都在 $U(a, \epsilon)$ 内,所以, C 与“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”是可以互相推出的.易知 D 项也不对.

解:应选 C.

例 3 设对任意的 x ,总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$,且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

- A. 存在且等于零
- B. 存在但不一定为零
- C. 一定不存在
- D. 不一定存在

分析:此题是 2000 年全国考研数学三的原题.有的同学认为由条件“ $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$ ”则可得出“ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ ”,但它们不一定为零,故错选为 B.事实上,由条件“ $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$ ”不一定能保证 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 的存在,例如若取 $g(x) = e^x + e^{-x}$, $\varphi(x) = e^x - e^{-x}$,则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$,但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ 都不存在.这样,可以想像, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 也不一定存在了.例如取 $f(x) = e^x$,则 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$,且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \varphi(x)) = 0$,但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ 不存在.

解:应选 D.

例 4 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$,则必有().

- A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立
- B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
- C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在
- D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

分析:由于极限值的大小只能反映当 $n \rightarrow \infty$ 时的数列的变化趋势,不能反映前面有限项的取值情况.所以, A、B 选项都是不正确的.由极限运算法则知 C 选项也不正确.由无穷大的定义易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$,所以, D 选项正确.

解:应选 D.

例 5 设 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 为().

A. 无穷大量

B. 无穷小量

C. 有界变量

D. 无界变量

分析: 当 n 为奇数时, $x_n \rightarrow \infty$.

n 为偶数时, $x_n \rightarrow 0$.

所以, x_n 既不是无穷大量, 也不是无穷小量. 由于 $x_n \rightarrow \infty$ (n 为奇数), 所以 x_n 不是有界变量而是无界变量, 故 D 选项正确.

解: 应选 D.

例 6 设 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ ().

A. $x \rightarrow \infty$ 时是无穷大量

B. $x \rightarrow \infty$ 时是无穷小量

C. $x \rightarrow 0$ 时是无界变量

D. $x \rightarrow 0$ 时是无穷小量

分析: 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$, 所以 A、B 选项均不对.

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 所以 D 正确而 C 不正确.

解: 应选 D.

例 7 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则必有 ().

A. $f(x_0) = A$

B. $f(x_0)$ 存在但不一定为 A

C. 存在邻域 $U^0(x_0, \delta)$, 使 $f(x)$ 在其中有界

D. 对任何邻域 $U^0(x_0, \delta)$, $f(x)$ 在其中有界

分析: 由极限的定义知“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”的精确含义是“对任何给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $U^0(x_0, \delta)$, 使得 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ ”, 易知 C 正确. 而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的, 故 A、B 不正确. 由极限的定义可知“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界, 故要求 $U^0(x_0, \delta)$ 中的 δ 较小, 不能保证在任意的 $U^0(x_0, \delta)$ 内 $f(x)$ 有界, 所以 D 也不对.

解: 应选 C.

例 8 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

分析: 这是一个 n 项求和求极限的问题. 对这类问题首先应考虑是否这个和式能够求和, 即用一个单项表示. 此时, 所谓的“拆项法”要经常用到, 即将和式“ $\sum_{k=1}^n a_k$ ”写成“ $\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1})$ ”的形式, 再展开求和时就会有许多项“抵消”, 剩下一个单项形式. 然后再求极限.

$$\text{解: } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1.$

例 9 设 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析: 此题是 1999 年全国考研数学四的原题. 此题考查的是对数函数性质, 以及数列极限的求法, 利用对数性质运算.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln f(1) \cdots f(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \ln f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \ln a^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{\ln a}{2}. \end{aligned}$$

解: 应填 $\frac{1}{2} \ln a.$

例 10 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 4} - x).$

分析: 此式中含有“ $\infty - \infty$ ”的因子, 不好判断其极限值, 而且该因子含根号, 常用的处理方法是分子分母同乘一个共轭根式来变形.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 4} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1} = -2. \end{aligned}$$

例 11 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x}.$

分析: 这是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型的极限, 分母上可用等价无穷小替换为 x^3 , 但分子上是两个等价无穷小 $\tan x$ 与 $\sin x$, 它们都与 x 等价但是不能都替换为 x , 因为在加、减运算中不能用等价无穷小替换. 可以将分子也写成无穷小之积的形式, 为此, 将 $\tan x$ 提到括号外来.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

注: 这里用到了 $\tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小还有: $\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax$, 等.

例 12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x \sin^2 x}.$