最新版21世纪高等学校导学与导考教材

线性代数释疑解惑

XIANXINGDAISHU SHIYI JIEHUO

谢昌云 谢淑翠 高军安 编

陕西科学技术出版社

最新版面向二十一世纪高等学校导学与导考教材

线性代数释疑解惑

谢昌云　谢淑翠　高军安　编

罗卫民　审

陕西科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数释疑解惑 / 谢昌云，谢淑翠，高军安编．西安：陕西科学技术出版社，2003.6

ISBN 7-5369-3649-4

I. 线 ... II. ① 谢 ... ② 谢 ... ③ 高 ... III. 线性代数－高等学校－教学参考资料 IV.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 041527 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编 710003 电话 (029)7211894 传真 (029)7218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话 (029)7212206 7260001
印 刷	陕西省军区古城印刷厂
规 格	880mm×1230mm 32 开本
印 张	10.375
字 数	300 千字
印 数	1～4000册
版 次	2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷
定 价	14.00 元

前　言

线性代数是高等工科院校各专业必修的一门重要基础课，也是大学生跨入大学校门后接触到的描述离散量的第一门课程。它对于后续课程的学习以及考研与深造，特别是对于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、科学表达能力，提高其“数学素质”将起到举足轻重的作用。然而，大凡重要的，往往是难以掌握的。线性代数以其抽象的概念、较强的理论以及多变的习题，使初学者常常感到困难，有时甚至无从下手。《线性代数释疑解惑》一书，如同书名本身涵喻的那样，正是想为初学者拨开疑团，指点迷津。因此，在编写过程中我们紧扣大纲，结合初学者经常遇到的问题，集多年的教学经验与体会，突出重点，消化难点，由浅入深，由易到难，力争使学生在数学概念、计算技能与科学思维诸方面都能得到训练与提高。

本书的每一章均按以下四个部分编写：

一、导学：旨在总结本章基本内容，突出重点与难点，讲清各知识点之间联系，侧重于帮助读者透视脉络，从对细节的了解升华到对全局的认识。

二、释疑：回答了学生在学习中不易掌握和容易混淆的一些概念、理论和方法。对重点内容作扼要的归纳，对重要的计算，通过对不同类型例题的分析总结归纳出一般的方法与步骤。不仅使读者能更好消化吸收基本内容，而且提高其分析问题和解决问题的能力。

三、典型例题：选择了大量具有代表性的例题，通过剖析解题思路，总结归纳解题方法，辅导学生掌握基本的运算技能，提高学生的解题能力。

四、自测题：给出了 A， B 两套自测题及参考答案。自测题 A 旨在检测学生对基本概念、基本运算和基本定理的掌握程度；自测题 B 中选择了部分近年来的研究生入学考试题，以检测学生综合运用所学知识的能力。

本书的第一、三章由谢昌云编写，第二、四章由谢淑翠编写，第五、六章由高军安编写。全书由谢昌云统稿。罗卫民教授认真审阅了原稿。本书的讲义在试用中已获得学生的好评，正式出版前又做了认真的补充与修正。如果它能成为你的良师益友，编者将倍感欣慰。

由于编者水平有限，不妥之处，希望读者批评指正。

编者

2003 年 5 月

目录

第一章　行列式

一　导学

本章由排列及其逆序数入手，引入了行列式的“排列逆序”定义，并给出用行列式定义计算行列式的方法．为了行列式的计算更方便、可行，需要掌握行列式的性质和行列式按行 (列) 展开定理，了解拉普拉斯 (Laplace) 展开定理．最后给出了行列式的一个应用即克莱姆（ Cramer ）法则．该法则给出了判别线性方程组 (方程个数与未知数个数相等) 是否有解的条件，在有解时，给出解的行列式表示．

本章的重点是用行列式的性质及展开定理计算行列式．一般是利用行列式的性质将其化为三角行列式计算，或化简后再按某行 (列) 展为低阶行列式计算．对某些特殊行列式，可采用归纳法、递推法、加边法、拆项法等方法计算．

为了学好本章内容，读者必须做到：

1.正确理解 n 阶行列式定义；
2.掌握行列式性质，并能熟练运用；
3.熟练掌握行列式的计算方法，尤其是三角形法和降阶法；
4.理解并熟练掌握行列式按行 (列) 展开的拉普拉斯定理；
5.理解并熟练运用克莱姆法则，记住线性齐次和非齐次方程组有解的条件．

二　释疑

1．关于 n 阶行列式的“排列逆序”定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

是 n^2 个数排成的数表，按上述法则确定的一个数．定义的三个要点；

(1) 和式是对 $p_1p_2\cdots p_n$ 这 n 个元素的全排列求和，共有 $n!$ 项，且正负项各一半；

(2) 每一项是位于不同行不同列的 n 个元素 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 的乘积；

(3) 每项的符号取决于该项 n 个元素 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 列标排列的逆序数 t，当 t 为奇数时取负号，当 t 为偶数时取正号.

2. 关于 k 阶子式，k 阶余子式的定义

(1) 在 n 阶行列式 D 中，任取 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$，位于这 k 行 k 列交叉点的元素按原来的位置组成的 k 阶行列式 M 称为 n 阶行列式 D 的一个 k 阶子式.

(2)k 阶子式 M 的余子式 N 是 n 阶行列式中划去 M 所在的 k 行 k 列后余下的 $n-k$ 阶行列式. M 的代数余子式 $A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$; $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 分别是 M 所在的行、列指标. 如 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

中第 1,2 两行，第 1,2 两列交叉点的元素构成 2 阶子式 M，其余子式 N 就是划去第 1,2 两行，第 1,2 两列后得到的 2 阶行列式，其代数余子式 $A=(-1)^{1+2+1+2}N$. 这里

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad N=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}.$$

在 D 中由第 1, 2 行元素构成的二阶子式共有 $C_4^2=6$ 个，它们分别是

$$M_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix},\qquad M_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14}\\ a_{21} & a_{24}\end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},\qquad M_5=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14}\\ a_{22} & a_{24}\end{vmatrix},\qquad M_6=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{vmatrix}.$$

这 6 个二阶子式对应的代数余子式也有 6 个，分别是

$$A_1=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix},\qquad A_2=(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34}\\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{42} & a_{43}\end{vmatrix},\qquad A_4=(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34}\\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_5=(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}\\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix},\qquad A_6=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}.$$

3. 应用 Laplace 定理应注意的问题

(1)Laplace 展开定理　在 n 阶行列式 D 中任取 k 行 (或 k 列)$(1\leqslant k\leqslant n)$，由这 k 行 (或列) 元素组成的一切 k 阶子式 (共 C_n^k 个) 与它们对应的代数余子式乘积之和等于该行列式 D．特别当取 $k=1$ 时， Laplace 定理就是行列式按行 (或列) 展开定理.

在应用该定理时要注意 (i) 不能丢项；(ii) 要注意各代数余子式的正负号. 如上述 4 阶行列式等于其第 1 ， 2 行的所有 2 阶子式与其代数余子式乘积之和，即 $D=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4+M_5A_5+M_6A_6$.

(2) Laplace 定理的两种特殊情形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}.$$

注意，在计算行列式时只有当行列式中某几行 (或列) 中有较多 0 元素的情形用 Laplace 定理才比较方便. 一般情况下用它并不简便. 但它有重要的理论价值.

4. 什么是行列式的归纳定义

对 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $n=1$ 时定义 $D=|a_{11}|=a_{11}$ ，当 $n\geq 2$ 时定义 $D=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$ ，其中 A_{1j} 是 a_{1j} 的代数余子式. 此即行列式的归纳定义. 它与 "排列逆序" 定义是等价的. 事实上，归纳定义就是将行列式按第一行展开.

5. 运用行列式性质时应注意什么

以下几点是计算行列式时易犯的错误，应予以注意.

(1) 对换行列式两行 (或列) 后得到的新行列式与原行列式相差一个符号. 若对换 t 次，相差 $(-1)^t$ 倍.

(2) 行列式某几行 (列) 有公因子时，可将每一行 (列) 的公因子提出. 如

$$D=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ la_{31} & la_{32} & la_{33} \end{vmatrix}=kl\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

但

$$D=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq k^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

反之，若给行列式乘以不为 0 的数 k ，可将 k 乘到 D 的某一行 (或列)

的元素上去．如设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$kD=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{或}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{或}} \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(3) 对行列式做变换时，在一次变换完成以后，再做下一次变换；同时应弄清变换中哪一行 (或列) 变，哪一行 (列) 不变．每一步等式至少有一行 (列) 保持不变．如计算

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12,$$

第一次变换是将第 1 行的 2 倍加到第 2 行、第 1 行加到第 3 行，第 2 、 3 行元素改变，第 1 行不变．这一步完成以后，再做第二次变换 (将第 2 行的 (-1) 倍加到第 3 行) 等等．请看以下做法错在哪里？

将 D 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行、第 1 行加到第 3 行、第 3 行加到第 1 行得到

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 11 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

错误在于，经前两步变换后，第 2 ， 3 行元素均已改变，再将第 1 行加到第 3 行时这个第 3 行元素已不是原第 3 行的元素，而应是变换后新的第 3 行．

(4) 行列式按行 (或列) 展开时，应注意元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 的符号是 $(-1)^{i+j}$ ，还应注意不要丢项即行列式等于其某行 (列) 所有元素与其代数余子式乘积之和．

(5) 两个行列式相加时注意与矩阵相加的区别．如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix},$$

而

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

(6) 在给字母行列式的某一行 (列) 乘以 $\frac{1}{k}$ 倍时，分母不能为 0．如

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{1}{a}c_3} \begin{vmatrix} a-a^{-1} & 0 & 1 \\ -a^{-1} & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

在计算中忽略了 $a=0$ 的情况．当 $a \neq 0$ 时可以这样做，当 $a=0$ 时应另行讨论．

(7) 计算中尽量避免除法和分数运算．必要时可通过提取公因子来避免分数的运算．如

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ b+c & c+a & a+b & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3-r_2} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. 行列式的计算应掌握哪些基本技能

(1) 应熟悉一些特殊行列式，如对角行列式、三角行列式、对角分块行列式、范德蒙 (Vandermende) 行列式等.

(2) 应熟练掌握常用的三种变换

1° 对换两行 (列)，记做 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$;

2° 第 i 行 (列) 提出公因子 k;

3° 第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列)，记做 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

(3) 应熟练掌握的基本计算方法

1° 对角线法则. 只适用于二、三阶行列式，四阶以上行列式不能用对角线法则.

2° 三角形法则. 通过三种变换将行列式化为上 (下) 三角形，其对角线元素之积就是行列式的值，它们所带的符号是；当主对角线上元素全不为 0 时取正号；当次对角线上元素全不为 0 时，其符号是: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

3° 降阶法. 应用三种变换和行列式按行 (列) 展开相结合，将高阶行列式逐次降为低阶行列式直到三阶或二阶行列式后求其值.

7. 计算行列式常用哪些方法

三角形法和降阶法是最基本最常用的方法. 在熟练掌握了这些基本技能的基础上，针对不同行列式又有不同方法.

(1) 对稀疏行列式 (0 元素较多的行列式) 可利用行列式定义直接计算.

例 1 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

分析 该行列式有较多 0 元素，在全部 24 项中有许多项为 0，只要找出少数不为 0 的项，求它们的代数和即可.

解 由于行列式的每一项是位于不同行不同列的 4 个元素之积，第 1 行取 a_{11} ，第 2,3 行分别只能取 a_{23}, a_{32} 第 4 行可取 a_{44}，即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是一非 0 项；第 1 行取 a_{12}，第 2,3,4 行分别取 a_{21}, a_{33}, a_{44} 即 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 是

另一非 0 项. 其它项均为 0 ，所以

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{t(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}\\&=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}.\end{aligned}$$

其中 $t(1324)=1, t(2134)=-1$ 为列标排列的逆序数.

(2) 对数字行列式 (元素全部为数字的行列式) 通常用三种变换将其化为三角行列式计算. 也可将其某一行 (列) 化成有较多 0 元素之后，再按该行 (列) 展开降为低阶行列式计算.

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix}3&2&-1&4\\2&-3&5&1\\1&0&-2&3\\5&4&1&3\end{vmatrix}$.

解法 1 这样的数字行列式通常直接化为三角行列式计算

$$\begin{aligned}D&\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\2&-3&5&1\\3&2&-1&4\\5&4&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-5r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}-\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&-3&9&-5\\0&2&5&-5\\0&4&11&-12\end{vmatrix}\\&\xlongequal[r_4-2r_3]{r_2+2r_3}-\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&19&-15\\0&2&5&-5\\0&0&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&19&-15\\0&0&-33&25\\0&0&1&-2\end{vmatrix}\\&\xlongequal{r_3+33r_4}\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&19&-15\\0&0&0&-41\\0&0&1&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&19&-15\\0&0&1&-3\\0&0&0&-41\end{vmatrix}\\&=-41.\end{aligned}$$

解法 2 注意到第 3 行中已有一个 0 元素，故可将第 3 行另两个元素

变为 0 后，按第 3 行展开降为低阶行列式计算.

$$D \xlongequal[c_4-3c_1]{c_3+2c_1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 11 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ -3 & 9 & -5 \\ 4 & 11 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_2]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} -1 & 14 & -10 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & 20 & -17 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+3r_3]{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 34 & -27 \\ 0 & 69 & -56 \\ 1 & 20 & -17 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 34 & -27 \\ 69 & -56 \end{vmatrix} = -41.$$

注 当某行 (列) 有较多 0 元素时，第二种解法比第一种解法优越性更大.

(3) 数字字母混合行列式. 元素由数字和字母组成的行列式叫混合行列式. 根据其元素的特点常用降阶法、拆项法、递推法、归纳法等.

例 3 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$.

解法 1 将数字列化成较多 0 元素，再按该列展开降为低阶行列式，

$$D \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & b^2-ca-a^2+bc \\ 0 & c-a & c^2-ab-ab-a^2+bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & (a+b+c) \\ 1 & (a+b+c) \end{vmatrix} = 0.$$

解法 2 按较复杂的第 3 列展开，降为三个低阶的简单行列式

$$D = (a^2-bc)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} (b^2-ca)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} + (c^2-ab)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$$
$$= (a^2-bc)(c-b) - (b^2-ca)(c-a) + (c^2-ab)(b-a) = 0.$$

解法 3 按第 3 列拆项为二个行列式，第一个是 3 阶范德蒙行列式；对第二个行列式将第一列消元成为只有一个非 0 元素，再按该列展开降为低

阶行列，即得到

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & a & bc\\1 & b & ca\\1 & c & ab\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)-(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\0 & -1 & -1 & 1\\a & b & c & d\\-1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

解法 1 这是一个数字字母混合行列式，按第 3 行展开降为 4 个低阶的数字行列式后，再化为三角行列式

$$D=(-1)^{3+1}a\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}b\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\0 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{3+3}c\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\\-1 & -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}d\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=3a-b+2c+d.$$

解法 2 将第 1 行化成较多 0 元素，再降为低阶行列式计算

$$D\xlongequal[c_4+c_1]{c_3+c_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & 1\\a & b & a+c & d+a\\-1 & -1 & 0 & -1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\b & a+c & d+a\\-1 & 0 & -1\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_3-c_1}\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\b & a+c & a+d-b\\-1 & 0 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\a+c & a+d-b\end{vmatrix}$$
$$=3a-b+2c+d.$$

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$.

解法 1 用数字行的适当倍数将最后一列化成有较多 0 元素，再降为低阶行列式

$$D \xlongequal[r_2-cr_1]{r_3-c^2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-c & b-c & 0 \\ a^3-ac^2 & b^3-bc^2 & 0 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a(a+c) & b(b+c) \end{vmatrix}$$
$$=(a-c)(b-c)(b-a)(a+b+c).$$

解法 2 据原行列式的特点，构造一个 4 阶范德蒙行列式，再利用范德蒙行列式的结论

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$=(c-a)(c-b)(b-a)[x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc],$$

另一方面，对 D_4 按第 4 列展开有

$$D_4 = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} x^3.$$

比较两个展开式中 x^2 项的系数得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-c)(c-b)(b-a)(a+b+c).$$

(4) 字母行列式的计算. 元素全部是字母的行列式叫字母行列式. 其计算技巧性强，难度大，应仔细观察其结构特点，在应用三种变换的基础上，采用相应的技巧. 如降阶法、递推法、归纳法、拆项法、加边法等.

例 6 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.