高等代数方法导论

钱吉林　陈良植　主编

华中师范大学出版社

前　言

由于科学技术的迅速发展，特别是计算机的普遍使用，使得理工科大学、财经院校对高等代数和线性代数提出了更高、更新的要求．而教科书受教学时数限制，只能介绍一些基本理论和基本方法．我们编写这本书先概述主要内容，再侧重于教科书中未涉及或强调不够的部分，比如本书对广义逆矩阵、M矩阵作了介绍，并对循环阵、幂零阵、幂幺阵、幂等阵、置换阵等作了较系统的叙述．

全书共分十一章，它们是：行列式、线性方程组、矩阵、多项式、线性空间、特征值和特征向量、二次型、矩阵的几种标准形、线性变换、欧氏空间与酉空间、广义逆矩阵与M矩阵．本书每节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部份编写．每章有一节综合题．

本书收入了五大生（电大、函大、职大、夜大、自修大）试题，以及国内外（中、美、苏、日、澳）研究生试题和数学竞赛题．我们在研究成千上万个各类试题的基础上，花了很大的精力，对它们作了双向归纳．一是对题型作了归纳；一是对每一题型的各种不同的解法作了归纳．不仅可使初学者对高等代数方法，有一个较全面和系统的轮廓，而且对数学方法的训练也有一定的帮助．

本书特点是：内容新，观点新，针对性强，适应面广．因此可供各类大学本科生、专科生、研究生和教师参考，也可供其它科技工作者阅读．

本书由钱吉林和陈良植主编，编委是（按姓氏笔划）：

刘文浩　刘代芳　刘恒　叶启云　刘富贵　伍毅　陈良植　余尚智　周长菊　杨谦　胡友思　夏建军　张莲珠　赵德修　钱吉林　郭海根　黄光谷　彭先髦　曾祥金　穆汉林　戴定春．

本书编写得到华中师范大学副校长邓宗琦教授和数学系领导的关心，还得到华中师范大学科研处的支持，我们对他们表示衷心地感谢．

编　者

90.4.

目　　录

第一章 行 列 式

§1 定义与性质

（一）内容提要

1．由 $1,2,\cdots,n$ 组成的不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，其中奇排列数有 $\frac{n!}{2}$ 个，偶排列数也是 $\frac{n!}{2}$ 个．

2．任一 n 级排列 $i_1\ i_1\ \cdots i_n$ 都可以经过 t 次两两对换变为自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$，而且 t 与逆序数 $\tau(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)$ 具有相同的奇偶性．

3．$\tau(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$．

4．设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

$$\begin{aligned}|A|=|A'|&=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.\end{aligned}$$

5．
$$\begin{vmatrix}a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots\ a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n=\begin{vmatrix}a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ * & & \ddots\ a_n\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}* & & b_1 \\ & \iddots & \\ b_n & & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1\cdots b_n=\begin{vmatrix}0 & & b_1 \\ & \iddots & \\ b_n & & *\end{vmatrix}$$

6．若行列式某两行(列)成比例，或者某一行(列)全为零，则行列式等于 0．

7．把两行(列)互换，行列式值反号．

8．行列式可按某一行(列)展开，即行列式等于某一行(列)元素与其相应代数余子式之积之和．

行列式可用拉普拉斯公式展开．

9．$$\begin{vmatrix} \cdots & a_1+b_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n+b_n & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix}$$

其中…部分在等式两边不变．

10．把某一行(列)的倍数加到另一行(列)上去，行列式值不变．

11．一个数乘行列式某一行(列)，等于此数乘此行列式．

（二）答疑辅导

1．行列式通常有哪几种定义？

答 通常有以下六种定义：

(1) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 指的是一切取自 A 的不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1)$$

的代数和 ($j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列)．当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项 (1) 带正号；当它是奇排列时，项 (1) 带负号．

(2) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 指的是项 (1) 的代数和．当 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)>0$ 时，项 (1) 带正号；当 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)>0$ 时，项(1)带负号．这里 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)=\prod\limits_{1\leq t<r\leq n}(j_r-j_t)$，且规定 $v_1(1)>0$．

(3) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式指的是项 (1) 的代数和．项 (1) 的符号这样确定：逐次对换 A 的两行或两列，把

项 (1) 的 n 个元素移到主对角线上时，如果新作对换的个数是偶数，这项带正号；所作对换的个数是奇数，这项带负号.

(4) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 是适合下列条件的一个函数：

1) $|A|$ 是 A 的每列的线性函数；

2) 当 A 有两列相同时，$|A|=0$；

3) 当 $a_{ii}=1$ 而 $a_{ij}=0(i\neq j)$ 时，$|A|=1$.

(5) 逐次用一行或一列的倍数加到另一行或一列，把 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 化成对角阵，记主对角线上元素为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 则 $|A|=a_1a_2\cdots a_n$.

(6) 一阶方阵的行列式定义为这个方阵的元素本身. 设 $n-1$ 阶方阵的行列式已经定义，则 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 定义为

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

其中 M_{ij} 表示划去 A 中第 i 行和第 j 列剩下的 $n-1$ 阶方阵的行列式.

以上 6 种定义是等价的（见[31]）.

2. 下面等式对不对？

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ m+n & s+t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ m & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ n & t \end{vmatrix}.$$

答 一般不对. 正确应拆成 4 个行列式之和，即

原式左端=

$$\begin{vmatrix} a & c \\ m & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & d \\ m & t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c \\ n & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ n & t \end{vmatrix}.$$

(三) 题型归类

1. 计算逆序数

例1 设 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=s$，求 $\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$.

解 取两个固定的 i_k, i_m, 则它们在且仅在下面两个排列

$$i_1i_2\cdots i_n \quad \text{或} \quad i_n\cdots i_2i_1$$

之一构成逆序数. 因此

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(i_n\cdots i_2i_1)=C_n^2.$$

由假设，则 $\qquad \tau(i_n\cdots i_2i_1)=C_n^2-s.$

2. 用定义(或性质)直接计算或证明

例2 试证：n 阶行列式中零元素的个数如果多于 n^2-n 个，则此行列式等于零.

证 每个 n 阶列式由 n^2 个元素组成，如果其中零元素多于 n^2-n 个，则非零元素的个数少于 n 个. 则此行列式中至少有一行(或列)为零，故这个行列式等于 0 .

例3 讨论下面两个行列式的关系：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

解 将 D_2 的最后一行逐次与上行交换，经 $n-1$ 次换到第 1 行. 再将新行列式的最后一行(即 D_2中原来倒数第 2 行)逐次与上一行交换，经 $n-2$次换到第 2 行. 如此继续下去，直到得出 D_1 为止，共交换次数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \quad D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1.$$

§2 计算行列式的方法

(一) 内容提要

计算行列式，方法多，技巧大. 但也有一定规律可循.

其基本思路是：化零，降阶，灵活运用性质和一些公式.

基本计算方法我们将在下面题型归类中介绍.

（二）答疑辅导

1．行列式有哪些降阶定理？

答　有下面几个

(1) 第一降阶定理 (Schur) 设 A 和 D 分别为 n 阶和 m 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |A|\cdot|D-CA^{-1}B| & (\text{当 } A \text{ 可逆时}) \\ |D|\cdot|A-BD^{-1}C| & (\text{当 } D \text{ 可逆时}). \end{cases} \qquad (1)$$

公式 (1) 的证明，由下面两个等式两端取行列式即可.

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

(2) 第二降阶定理　设 n 阶可逆阵 A 和 m阶可逆阵D，B 和 C 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 阵，则

$$|D-CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C|. \qquad (2)$$

公式(2)可由公式(1)直接推出.

(3) 第三降价定理　设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的某一个 k 阶顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$，则

$$|A| = |S|/\Delta_k^{n-k-1}. \qquad (3)$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} S_{k+1,k+1} & \cdots & S_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n,k+1} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \text{称为 Sylvester 矩阵}$$

$$S_{ij} = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & i \\ 1 & 2 & \cdots & k & j \end{pmatrix} \right| \qquad i,j=k+1,\cdots n \qquad (4)$$

记号 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots & i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$ 表示从 A 中取第 $i_1, i_2 \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, j_2 \cdots j_k$ 列作成的子矩阵．

我们来证明(3)式．将 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k \\ 1\ 2 \cdots k \end{pmatrix} & B \\ C & A\begin{pmatrix} k+1 \cdots n \\ k+1 \cdots n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

则由第一降阶定理

$$|A| = \Delta_k \left| A\begin{pmatrix} k+1 \cdots n \\ k+1 \cdots n \end{pmatrix} - CA\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k \\ 1\ 2 \cdots k \end{pmatrix}^{-1} B \right| \quad (5)$$

令

$$\begin{pmatrix} d_{k+1,k+1} \cdots d_{k+1,n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ d_{n;k+1} \quad \cdots d_{nn} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} k+1 \cdots n \\ k+1 \cdots n \end{pmatrix} - CA\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k \\ 1\ 2 \cdots k \end{pmatrix}^{-1} B \quad (6)$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad B = (\beta_{k+1}, \cdots \beta_n)$$

则由第二降阶定理可得

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1;k+1} - \alpha_{k+1} A\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k \\ 1\ 2 \cdots k \end{pmatrix}^{-1} \beta_{k+1}$$

$$= \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k \\ 1\ 2 \cdots k \end{pmatrix} & \beta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} & a_{k+1;k+1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta_k} \left| A\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots k+1 \\ 1\ 2 \cdots k+1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\Delta_k} S_{k+1,k+1}$$

类似可证

$$d_{ij}=\frac{1}{\Delta_k}S_{ij}\quad (i,j=k+1,\cdots n) \tag{7}$$

则由(5).(6).(7)式得

$$|A|=\frac{1}{\Delta_k^{\,n-k-1}}|S|.$$

（4）第四降阶定理　设 A,B,C,D 均为 n阶方阵，且 $AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证明见本书p.93第三章§4例1.

2．什么叫爪型行列式？

答　形如

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & c_2 & & & \\ b_3 & & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & c_n \end{vmatrix}=$$

的行列式称为爪型行列式．按第 1 列展开，可得

$$D=a_1c_2\cdots c_n-a_2b_2c_3\cdots c_n-\sum_{i=3}^{n}a_ib_ic_2\cdots c_{i-1}c_{i+1}\cdots c_n.$$

3．什么叫滑梯型行列式？

答　形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_{n-2} & \\ & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=$$

行列式称为滑梯型行列式．

当 $b_1b_2\cdots b_{n-1}=0$ 时，D_n 可以降阶算出．

当 $b_1b_2\cdots b_n\neq 0$ 时，则

$$D_n=mb_1b_2\cdots b_{n-1}, \tag{8}$$

其中 $m=a_0-a_1\frac{c_1}{b_1}+a_2\frac{c_1c_2}{b_1b_2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2\cdots c_n}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}$．

上面 (8) 式的证明，只要以 D_n 第 n 列的 $-\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}$ 倍加到第 $n-1$ 列，再以第 $n-1$ 列的 $-\frac{c_{n-2}}{b_{n-2}}$ 倍加到第 $n-2$ 列，…，最后以第2列的 $-\frac{c_1}{b_1}$ 倍加到第1列，即可证明．

4．什么叫三对角行列式？

答　形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为三对角行列式．则

$$D_n=\begin{cases} \dfrac{(a+\sqrt{\Delta})^{n+1}-(a-\sqrt{\Delta})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\Delta}} & \text{当 } \Delta\neq 0 \text{时} \\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n & \text{当 } \Delta=0 \text{时} \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\Delta=a^2-4bc$．下面来证明 (9)式(南京大学研究生入学试题)．令 α，β 是 $x^2-ax+bc=0$的两个根，再将 D_n 按第1列展开得

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})$$

$$=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^n \tag{10}$$

类似有

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n. \quad (11)$$

当 $\Delta \neq 0$ $(\alpha \neq \beta)$ 时，由 (10)，(11) 解出

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(a+\sqrt{\Delta})^{n+1} - (a-\sqrt{\Delta})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\Delta}}.$$

当 $\Delta = 0$ $(\alpha = \beta)$ 时，则 (11) 式为

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \alpha^{n-1}) + \alpha^n$$

$$= \cdots = (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

5．什么叫循环行列式？

答　形如

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的行列式称为循环行列式．则

$$D_n = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n) \quad (12)$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$，而 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$，为 $x^n - 1$的全部根．(12)式证明见p.101第三章§5的答疑辅导5。

6．什么叫反循环行列式？

答　形如

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的行列式称为反循环行列式，则

$$D_n = f(\eta_1) f(\eta_2) \cdots f(\eta_n) \quad (13)$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$，而 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 $x^n + 1$ 的全部根．此式证明类似于 (12) 式．

7．什么叫对称行列式？

答 形如

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

的行列式，称为对称行列式．

当 $x_i=a$ 时很容易算出 D．

当 $x_i \neq a$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时，则

$$D=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right) \tag{14}$$

实际上，将 D 升阶为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & & & \\ & & \ddots & & \\ -1 & & & & x_n-a \end{vmatrix}.$$

成为爪型行列式．则由上面已知公式即可证得（14）式．

8．什么叫柯西（Cauchy）行列式？

答 形如

$$D_n=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

的行列式，称为柯西行列式．则

$$D_n=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-b_j)(b_i-b_j)\Big/\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j). \tag{15}$$

（15）式证明方法是，从 D_n 的第1行提出因子 $\dfrac{1}{a_1+b_1}$

再将第1列分别乘以 $-\frac{a_1+b_1}{a_1+b_j}$ $(j=2,3,\cdots,n)$ 后，再分别加到第2, …, n 列，得

$$D_n=\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_i-a_1)(b_i-b_1)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_1)\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1+b_i)}D_{n-1}.$$

然后用递推方法可得（15）式.

9. 什么叫柯西—皮内（Cauchy—Binet）公式?

答　柯西—皮内公式叙述如下：设 A 是 $n\times m$ 阵，B 是 $m\times n$ 阵则

$$|AB|=\begin{cases}\sum\limits_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m}\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right| & \text{当 } n\leqslant m\\ 0 & \text{当 } n>m\end{cases}$$

下面来证明. 当 $n>m$ 时，由第一降阶定理

$$\begin{vmatrix}E & B\\ -A & 0\end{vmatrix}=|0-(-A)EB|=|AB| \qquad (16)$$

将（16）式左端行列式用拉普拉斯展开，按它的最后 n 列展开，任取 n 行所成的 n 阶子式中，至少有 $n-m$ 个行全为零，从而 $|AB|=0$.

当 $n\leqslant m$ 时，对 A, B 分块如下

$$A=(A_1,A_2)\qquad B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$$

其中 $A_1=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$, $B_1=B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$. 令 E_m 为 m 阶单位阵，考虑 $m+n$ 阶行列式